PROPRIEDADES DA LOCALIZAÇÃO

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2º semestre 2019/2020

Facto 1: Sejam R um anel comutativo, W um conjunto multiplicativamente fechado de R, e $f : N \longrightarrow M$ um homomorfismo de R-módulos. Então, $f_W : N_W \longrightarrow M_W$ é um homomorfismo de R_W-módulos, onde

$$f_W(\frac{n}{t}) = \frac{f(n)}{t}.$$

Facto 2. Sejam R um anel comutativo e W um conjunto multiplicativamente fechado de R. Se

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

é uma sequencia exacta de R-módulos e R-homomorfismos, então

$$0 \longrightarrow N_W \xrightarrow{f_W} M_W \xrightarrow{g_W} P_W \longrightarrow 0$$

também é exacta (onde f_W e g_W são definidos como no Facto 1).

Facto 3: Sejam R um anel, M um R-módulo, N um R-submódulo de M, e W um conjunto multiplicativamente fechado de R. Então

a) $M \otimes_R R_W \cong M_W$ (isomorfismo de R-módulos e de R_W-módulos);

b) R_W é um R-módulo flat;

c) $(M/N)_W \cong M_W/N_W$.

Facto 4. Sejam R um anel comutativo, W um conjunto multiplicativamente fechado de R, M um R-módulo, e N e P R-submódulos de M. Entaõ:

a) $(N + P)_W = N_W + P_W$

b) $(N \cap P)_W = N_W \cap P_W$

Facto 5. Sejam R um anel comutativo, M um R-módulo finitamente gerado e W um subconjunto multiplicativamente fechado de R. Então,

a) $(\mathrm{Ann}_R(M))_W \;=\; \mathrm{Ann}_{R_W}(M_W)$.

Se N e P são R-submódulos de M, defina

$$(N :_R P) \;=\; \{r \in R : \; rP \subseteq N \;\} \; .$$

b) $(N :_R P) = \mathrm{Ann}_R((N+P)/N)$.

Se P é finitamente gerado,

c) $(N :_R P)_W \;=\; (N_W :_{R_W} P_W)$.

Facto 6. Sejam R um anel comutativo e W um conjunto multiplicativamente fechado de R. Temos o homomorfismo de anéis (que também é homomorfismo de R-módulos)

$$\alpha : R \longrightarrow R_W, \qquad \text{onde} \qquad \alpha(r) = \frac{r}{1} \; .$$

Então:

a) Se I é um ideal de R, $I_W := \alpha(I)R_W$ é um ideal de R_W.

b) Se J é um ideal de R_W, $\alpha^{-1}(J)$ é um ideal de R.

c) Se J é um ideal de R_W, então $J = (\alpha^{-1}(J))_W$.

d) Se I é um ideal de R, então

$$I = \alpha^{-1}(I_W) \iff w \text{ não é um divisor de zero em } R/I, \; \forall \, w \in W.$$

e) Conclusão: existe uma correspondencia biunívoca entre os ideais I de R tais que w não é um divisor de zero em R/I, $\forall w \in W$, e os ideais de R_W.

f) Há uma correspondencia biunívoca entre os ideais primos, Q, de R, tais que $Q \cap W = \emptyset$, e os ideais primos de R_W.

g) No caso em que $W = R - P$, usamos a notação R_P para indicar R_W. Neste caso, há uma correspondencia biunívoca entre os ideais primos, Q, de R, tais que $Q \subseteq P$, e os ideais primos de R_P.

h) R_P tem um único ideal maximal, P_P.

Facto 7. Seja R um anel comutativo e seja W um conjunto multiplicativamente fechado de R. Seja $\alpha : R \longrightarrow R_W$ o homomorfismo canónico de anéis,

$$\alpha(r) = \frac{r}{1} \ .$$

a) Se T é outro conjunto multiplicativamente fechado de R, tal que $W \subseteq T$, e se $T' = \alpha(T)$, então

i) T' é um conjunto multiplicativamente fechado de R_W ;

ii) $(R_W)_{T'} \cong R_T$ (isomorfismo de anéis).

b) Defina $T'' = \{\frac{r}{w} \in R_W : r \in T, w \in W\}$. Então,

i) T'' é um conjunto multiplicativamente fechado de R_W ;

ii) $(R_W)_{T'}$ é um subanel de $(R_W)_{T''}$.

iii) $(R_W)_{T'} = (R_W)_{T''}$.

c) Se P é um ideal primo de R tal que $P \cap W = \emptyset$, então

i) $(R_W)_{P_W} \cong R_P$;

ii) Se Q é outro ideal primo de R e $P \subseteq Q$, então $(R_Q)_{P_Q} \cong R_P$.