Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

RESOLUÇÃO DO EXAME DE 15/1/2020

MEAER

(1) Usando o método de Gauss-Jordan, calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$..

Resolução: Temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2,\ 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Logo a inversa pretendida é $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) Determine o conjunto das soluções $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^6$$

Resolução: A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ tem característica 2 logo é invertível com inversa

$$\frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aplicando a lei do corte à equação acima ficamos com a equação equivalente

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

logo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(3) Considere a base $B = ((1,0,1),(-1,2,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$

(a) Determine as coordenadas do vetor $(1,3,1) \in \mathbb{R}^3$ com respeito à base B.

(b) Sendo $B' = ((1,3,1),(0,1,1),(-1,2,0))$, determine a matriz de mudança de coordenadas $S_{B'\to B}$.

Resolução:

(a) Temos que achar α, β, γ tais que $\alpha(1,0,1) + \beta(-1,2,0) + \gamma(0,1,1) = (1,3,1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Donde se conclui que $\gamma = -3, \beta = 3$ e $\alpha = 4$. As coordenadas são portanto $(4, 3, -3)$.

(b) Tendo em conta a alínea anterior temos

$$S_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) Defina transformação linear.
Resolução: Uma transformação linear é uma função $T\colon V \to W$ entre espaços vetoriais V e W tais que para todo o escalar α e vetores $v, w \in V$ se tem $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ e $T(v + w) = T(v) + T(w)$.

(5) Determine a expressão geral da transformação linear $T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifica as seguintes condições:
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de T com valor próprio 2,
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de T com valor próprio -1,
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y+x & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset N(T)$.

Resolução: As condições dizem-nos que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Portanto

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e concluímos que

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-3b+3d & -a-b+d \\ 0 & -a-3b+3d \end{bmatrix}$$

(6) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$$

Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^3$ tais que a equação $T(T(x, y, z)) = b$ tem solução e, para cada um desses valores de b, determine o conjunto das soluções.
Resolução: A matriz que representa T com respeito à base canónica é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Os vetores para os quais a equação tem solução são os que estão no

espaço das colunas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A terceira coluna é igual à segunda menos a primeira logo o espaço das colunas é gerado pelas primeiras duas colunas (que são independentes) e o núcleo da matriz (tendo dimensão 1) é $\{\gamma(-1,1,-1)\colon \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Conclui-se que os vetores para os quais a equação tem solução são os vetores $b \in L(\{(1,1,0),(2,1,1)\})$, sendo a solução geral de $T^2(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(2,1,1)$ dada por

$$(x,y,z) = (\alpha,\beta,0) + \gamma(-1,1,-1) \qquad \text{com } \gamma \in \mathbb{R}.$$

(7) Seja U o espaço vetorial dos polinómios reais de grau ≤ 3, V o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 4 e $W = \{p(t) \in U \colon p(0) + p''(0) = 0\}$. Considere a transformação linear $T\colon W \to V$ definida por

$$(T(p))(t) = \int_0^t p(x)dx$$

(ou seja, $T(p)$ é o integral indefinido de p).

(a) Mostre que W é um subespaço vetorial de U e determine uma base B_1 para W.

(b) Calcule A_{T,B_1,B_2} onde $B_2 = (1,t,t^2,t^3,t^4)$ é a base canónica de V. *Se não resolveu a alínea anterior pode considerar* $B_1 = (1+t, t-t^2, t^3)$ *(que não é uma das respostas possíveis).*

(c) Determine em função de $\alpha \in \mathbb{R}$ a dimensão do subespaço de V dado por

$$\operatorname{Im}(T) \cap L(\{1+\alpha t^4, \alpha t - t^2\})$$

Resolução:

(a) Claramente $0 \in W$ logo W é não vazio. Se $p,q \in W$ então

$$(p+q)(0)+(p+q)''(0) = p(0)+q(0)+p''(0)+q''(0) = p(0)+p''(0)+q(0)+q''(0) = 0+0 = 0$$

logo W é fechado para a soma. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \in W$ temos

$$(\alpha p)(0) + (\alpha p)''(0) = \alpha p(0) + \alpha p''(0) = \alpha \cdot 0 = 0$$

logo W é fechado para o produto por escalar. Conclui-se que W é um subespaço vetorial de U.

Sendo $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, temos

$$p(0) + p''(0) = a + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -2c$$

logo

$$W = \{bt + c(-2+t^2) + dt^3 \colon b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

pelo que $B_1 = (t, -2+t^2, t^3)$ é uma base para W.

(b) Temos $T(t) = t^2, T(-2+t^2) = -2t + \frac{t^3}{3}, T(t^3) = \frac{t^4}{4}$, logo

$$A_{T,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(c) Seja $S_\alpha = L(\{1+\alpha t^4, \alpha t - t^2\})$. Uma vez que

$$\dim(S_\alpha \cap \operatorname{Im} T) = \dim S_\alpha + \dim \operatorname{Im} T - \dim(S_\alpha + \operatorname{Im} T) = 5 - \dim(S_\alpha + \operatorname{Im} T)$$

basta calcular $\dim(S_\alpha + \operatorname{Im} T)$, que é a dimensão do espaço das linhas da primeira das matrizes abaixo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_5 + \frac{\alpha}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{\alpha}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_5 \leftrightarrow L_3, L_4 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Conclui-se portanto que $\dim(S_\alpha \cap \operatorname{Im} T) = 0$ se $\alpha \neq 0$ e $\dim(S_\alpha \cap \operatorname{Im} T) = 1$ se $\alpha = 0$.

(8) Sejam U, V espaços vetoriais de dimensão finita e $T, S \colon U \to V$ transformações lineares. Mostre que se $\dim N(T) = \dim N(S)$ então existem isomorfismos $\phi \colon U \to U$ e $\psi \colon V \to V$ tais que

$$S \circ \phi = \psi \circ T$$

Resolução: Seja $\{u_1, \ldots, u_k\}$ uma base para o núcleo de T (se $k = 0$ trata-se do conjunto vazio), e seja $\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ um conjunto linearmente independente tal que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ forma uma base para U. Recorde da demonstração do Teorema da Característica-Nulidade que $\{T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$ é um subconjunto linearmente independente de V (que é uma base para a imagem de T). Seja $\{v_1, \ldots, v_l\}$ um conjunto de vetores de V tal que $\{T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n), v_1, \ldots, v_l\}$ forma uma base para V (novamente l pode ser 0).

Uma vez que por hipótese temos $\dim \ker S = \dim \ker T = k$ podemos escolher analogamente uma base $\{u'_1, \ldots, u'_k\}$ para o núcleo de S e completar este conjunto numa base $\{u'_1, \ldots, u'_n\}$ para U. Podemos ainda completar o conjunto linearmente independente $\{S(u'_{k+1}), \ldots, S(u'_n)\}$ numa base $\{S(u'_{k+1}), \ldots, S(u'_n), v'_1, \ldots, v'_l\}$ de V (note-se que o índice l é igual ao do parágrafo anterior uma vez que duas bases de V têm o mesmo número de elementos).

Sejam ϕ e ψ as transformações lineares definidas por

$$\phi(u_i) = u'_i, \qquad \psi(T(u_i)) = S(u'_i) \text{ para } i = k+1, \ldots, n, \qquad \psi(v_j) = v'_j$$

Estas transformações são isomorfismos porque levam uma base numa base (por exemplo são sobrejetivas e portanto isomorfismos uma vez que U e V têm dimensão finita). Para ver que se verifica a relação do enunciado basta calcular o valor de $S \circ \phi$ e $\psi \circ T$ na base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de U. Para $i = 1, \ldots, k$ temos

$$(S \circ \phi)(u_i) = S(u'_i) = 0 = \psi(0) = (\psi \circ T)(u_i).$$

Para $i = k+1, \ldots, n$ temos

$$(S \circ \phi)(u_i) = S(u'_i) = \psi(T(u_i)) = (\psi \circ T)(u_i).$$

(9) Determine o volume do paralelipípedo em $\mathbb{R}^3$ que tem um vértice na origem e arestas $(1,0,-1)$, $(-1,2,-2)$ e $(0,1,-2)$.
Resolução: Pela regra de Sarros temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4+1+2=-1$$

logo o volume do paralelipípedo em questão é $|-1|=1$.

(10) Determine o conjunto dos valores de x para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível.
Resolução: Temos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-2x)\left(\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (3-2x)\left(3(x+2) - x(-3(x+2))\right) = (3-2x)(3x+3)(x+2) \end{aligned}$$

Logo a matriz é invertível sse $x \notin \{\frac{3}{2}, -1, -2\}$.

(11) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine uma forma canónica de Jordan J para A, assim como uma matriz S tal que $A = SJS^{-1}$.
Resolução: O polinómio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)^3 + (2-\lambda)) - (2-\lambda)^2 = (2-\lambda)^4. \end{aligned}$$

Logo o único valor próprio de A é 2 com multiplicidade algébrica 4. Os vetores próprios são as soluções de

$$(A-2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

O espaço próprio de 2 é $\{(a, 0, -a, d) \colon a, d \in \mathbb{R}\}$. Logo a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 2. As possibilidades para a forma canónica de Jordan são

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

O que distingue os dois casos é que no primeiro caso temos $(A - 2I)^2 \neq 0$ e no segundo $(A - 2I)^2 = 0$. Como

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que temos um bloco de Jordan de tamanho 3 e outro de tamanho 1. Sendo (v_1, v_2, v_3, v_4) uma base de $\mathbb{R}^4$ que pôe A na forma canónica de Jordan indicada acima, temos que v_1 e v_4 são uma base do espaço próprio de 2. Como $(A - 2I)v_2 = v_1$ e $(A - 2I)v_3 = v_2$ temos $(A - 2I)^2 v_3 = v_1$ logo v_1 tem de pertencer ao espaço das colunas de $(A - 2I)^2$. Podemos assim tomar $v_1 = (1, 0, -1, 1)$ e v_4 um qualquer vetor próprio que forme uma base para o espaço próprio juntamente com v_1, por exemplo, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Os restantes vetores v_2 e v_3 acham-se resolvendo as equações acima:

$$(A-2I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Claramente uma solução é $v_2 = (0, 1, 0, 0)$. Finalmente

$$(A-2I)v_3 = v_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que podemos tomar $v_3 = (1, 0, 0, 0)$. Conclui-se que podemos tomar

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(12) Considere o subespaço

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x - y + w = 0\}$$

com (a restrição d)o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine uma base ortogonal para W.

(b) Calcule a distância em W entre $(1, 1, 2, 0)$ e o plano

$$P = \{(x, y, z, w) \in W \colon x + y = 3\}.$$

Resolução:

(a) Uma vez que $W = \{(x,y,z,y-x)\colon x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,0)\colon x,y,z\in\mathbb{R}\}$ uma base para W é dada por $(v_1,v_2,v_3) = ((1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,0))$. Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos a base ortogonal $w_1 = v_1$,

$$w_2 = (0,1,0,1) - \frac{\langle(1,0,0,-1),(0,1,0,1)\rangle}{\langle(1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1) = (0,1,0,1) - \tfrac{-1}{2}(1,0,0,-1) = (\tfrac{1}{2},1,0,\tfrac{1}{2})$$

e (uma vez que v_3 é ortogonal a v_1 e v_2) $w_3 = v_3$. Conclui-se que uma base ortogonal para W é

$$\{(1,0,0,-1),(\tfrac{1}{2},1,0,\tfrac{1}{2}),(0,0,1,0)\}$$

(b) $(1,1,0,0)$ é uma direção perpendicular ao plano $x+y=3$. Uma vez que $(1,1,0,0)\in W$, é a direção perpendicular a P em W. A reta perpendicular a P que passa por $(1,1,2,0)$ é descrita por

$$(1,1,2,0)+\alpha(1,1,0,0) = (1+\alpha,1+\alpha,2,0) \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

A interseção com P é determinada por

$$(1+\alpha)+(1+\alpha) = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Conclui-se que a distância de $(1,1,2,0)$ a P é dada por

$$\|\frac{1}{2}(1,1,0,0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(13) Considere o espaço $V = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\colon A = A^T\}$ das matrizes simétricas com o produto interno para o qual

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada. Determine o conjunto das matrizes que são perpendiculares a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e fazem um ângulo de 30 graus com $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução: As coordenadas de $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ na base indicada são $(2,1,0)$. Uma vez que numa base ortonormada o produto interno se calcula da forma usual procuramos os vetores com coordenadas (α,β,γ) tais que

$$\langle(1,0,0),(\alpha,\beta,\gamma)\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \qquad \langle(2,1,0),(\alpha,\beta,\gamma)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{5}\|(\alpha,\beta,\gamma)\|$$

(sendo que na segunda equação é necessário que $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$ para que o ângulo esteja definido). Como $\alpha = 0$, a segunda equação é equivalente a

$$2\beta = \sqrt{15(\beta^2+\gamma^2)} \Rightarrow 4\beta^2 = 15\beta^2 + 15\gamma^2 \Leftrightarrow 11\beta^2 + 15\gamma^2 = 0$$

logo a única solução das duas equações é $(0,0,0)$ que é um vetor para o qual o ângulo não está definido. Conclui-se que não existem matrizes satisfazendo as condições do enunciado, ou seja, que o conjunto em questão é vazio.

(14) Determine todas as matrizes unitárias $A \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$ que satisfazem $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -i \end{bmatrix}$.

Resolução: $(1,1)$ é um vetor próprio de A com valor próprio $-i$. Como uma matriz unitária é diagonalizável por uma base ortonormada e tem por valores próprios complexos de módulo 1, o vetor $(1,-1)$ será também um vector próprio com valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Sendo

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

a matriz que muda da base ortonormada dos vetores próprios para a base canónica temos então

$$A = S \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} S^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda - i & -\lambda - i \\ -\lambda - i & \lambda - i \end{bmatrix}$$

com λ um complexo de módulo 1.

(15) Considere a forma quadrática $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,u,v) = x^2 + y^2 - 4xy - 2u^2 + uv + 3v^2$$

(a) Classifique f.
(b) Existe algum subespaço $U \subset \mathbb{R}^4$ de dimensão 3 tal que a restrição de f a U seja definida positiva? Justifique.

Resolução:

(a) Temos

$$f(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x & y & u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Uma vez que a matriz é diagonal por blocos, os seus valores próprios são os dos blocos diagonais. O primeiro bloco tem determinante -3 logo tem um valor próprio positivo e outro negativo. O segundo bloco tem determinante $-\frac{23}{4}$ logo tem um valor próprio positivo e outro negativo. Conclui-se que a matriz tem dois valores próprios positivos e dois negativos pelo que a forma quadrática é indefinida.

(b) Não. Um tal espaço U intersetaria numa reta a soma dos espaços próprios dos valores próprios negativos da matriz da alínea anterior (que tem dimensão 2). Nessa reta f toma necessariamente valores negativos.

(16) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz tal que $A^2 = 0$. Que valores pode tomar a característica de A? Justifique.

Resolução: Uma vez que $A^2 = 0$, o único valor próprio de A é 0 (se $Av = \lambda v$ com $\lambda \neq 0$ então $A^2 v = \lambda^2 v \neq 0$). Sendo J uma forma canónica de Jordan de A temos $A = SJS^{-1}$ com S invertível logo $0 = A^2 = SJ^2S^{-1}$ pelo que $J^2 = 0$. Isto significa que para cada bloco de Jordan J_i em J temos $J_i^2 = 0$, o que acontece sse cada bloco de Jordan tem comprimento ≤ 2 (e 0 na diagonal claro). Cada bloco contribui 1 para a característica se tiver comprimento 2 e 0 se tiver comprimento 1. Logo a característica de A será um número entre 0 e $\frac{n}{2}$ quando n é par, e um número entre 0 e $\frac{n-1}{2}$ quando n é ímpar.