DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2017/2018
04/07/2018 – **11:30**

Duração: 90 minutos **1º Teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Um relatório anual estabelece que 63% dos utilizadores de serviços móveis possuem um *smartphone*. A probabilidade de um utilizador aceder à internet através do seu telemóvel é igual a 77% (respetivamente 8%), se o utilizador possui um *smartphone* (respetivamente não possui um *smartphone*). Considere um utilizador de serviços móveis escolhido casualmente.

(a) Calcule a probabilidade de esse utilizador aceder à internet através do seu telemóvel. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$S = \{\text{utilizador possui smartphone}\}$	$P(S) = 0.63$
$I = \{\text{utilizador acede à internet}\}$	$P(I) = ?$
	$P(I \mid S) = 0.77$
	$P(I \mid \overline{S}) = 0.08$

- **Probabilidade pedida**
Pela lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I \mid S) \times P(S) + P(I \mid \overline{S}) \times P(\overline{S}) \\ &= 0.77 \times 0.63 + 0.08 \times (1 - 0.63) \\ &= 0.5147 \end{aligned}$$

(b) Qual é a probabilidade de esse utilizador possuir um *smartphone*, sabendo que acede à internet através do seu telemóvel? (2.5)

- **Probabilidade pedida**
Invocando o teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(S \mid I) &= \frac{P(I \mid S) \times P(S)}{P(I)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.77 \times 0.63}{0.5147} \\ &\simeq 0.942491. \end{aligned}$$

2. O tempo de vida (em hora) de certo tipo de válvula é descrito pela variável aleatória X com função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 100 \\ 1 - \frac{100^2}{x^2}, & x > 100. \end{cases}$$

(a) Determine a mediana de X. (1.0)

- **V.a. de interesse**
X = tempo de vida de certo tipo de válvula

- **Mediana de X**

$$me = me(X) \in (100, +\infty) \quad : \quad F_X(me) = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{100^2}{me^2} = \frac{1}{2}$$

$$me = me(X) \in (100, +\infty) \quad : \quad \frac{100^2}{me^2} = 0.5$$
$$me = 100\sqrt{2}$$
$$me \simeq 141.421356.$$

(b) Deduza a função de densidade de probabilidade de X e calcule o valor esperado do tempo de vida desse tipo de válvula. (2.0)

- **F.d.p. de X**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\ &= \begin{cases} \frac{d[1-100^2\times x^{-2}]}{dx} = 2\times 100^2 \times x^{-3}, & x > 100 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)\, dx \\ &= \int_{100}^{+\infty} x \times 2 \times 100^2 \times x^{-3}\, dx \\ &= \int_{100}^{+\infty} 2 \times 100^2 \times x^{-2}\, dx \\ &= -2 \times 100^2 \times x^{-1}\Big|_{100}^{+\infty} \\ &= 200. \end{aligned}$$

(c) Selecionadas ao acaso 5 válvulas deste tipo, qual é a probabilidade de exatamente 2 delas terem tempo de vida superior a 200 horas ? (2.0)

- **V.a. de interesse**
  Y = no. de válvulas com tempo de vida superior a 200 horas, em 5 selecionadas ao acaso

- **Distribuição de Y**
  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$
  com
  $n = 5$
  $p = P(X > 200) = 1 - F_X(200) = 1 - \left(1 - \frac{100^2}{200^2}\right) = \frac{1}{4} = 0.25$

- **F.p. de Y**
  $P(Y = y) = \binom{5}{y} 0.25^y\, (1-0.25)^{5-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, 5$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \binom{5}{2} 0.25^2\, (1-0.25)^{5-2} \\ &= 0.263671875 \\ [&= F_{binomial(5,0.25)}(2) - F_{binomial(5,0.25)}(1) \stackrel{tabela}{\simeq} 0.8965 - 0.6328 = 0.2637]. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. A dureza de uma peça de aço (na escala de *Rockwell*) é descrita por uma variável aleatória X com distribuição uniforme contínua no intervalo [50, 70].

(a) Calcule a probabilidade de a dureza de uma peça estar compreendida entre 53 e 68 unidades. (1.5)

- **V.a. de interesse**
  X = dureza de uma peça de aço
- **Distribuição de X**
  $X \sim$ uniforme contínua$(50, 70)$
  $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20}, & 50 \le x \le 70 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- **Prob. pedida**
  $$\begin{aligned} P(53 < X < 68) &= \int_{53}^{68} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{53}^{68} \frac{1}{20}\,dx \\ &= \left(\frac{x}{20}\right|_{53}^{68} \\ &= \frac{68-53}{20} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(b) Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de a média das durezas de 36 peças ser inferior a 62 unidades, considerando as durezas dessas peças variáveis aleatórias independentes. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = dureza da peça i, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 36$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim$ uniforme contínua$(50, 70)$, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{50+70}{2} = 60, \quad i = 1, \ldots, n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \frac{(70-50)^2}{12} = \frac{100}{3}, \quad i = 1, \ldots, n$
- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ = média da dureza de n peças
- **Valor esperado e variância de $\bar{X}_n$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^n V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$
- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se
  $$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$
- **Valor aproximado da probabilidade pedida**
  $$\begin{aligned} P(\bar{X} < 62) &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{62-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{62-60}{\sqrt{\frac{100/3}{36}}}\right) \\ &\simeq \Phi(2.08) \\ &\overset{tabela/calc}{=} 0.9812. \end{aligned}$$

2. Considere o par aleatório (X, Y) com função de probabilidade conjunta

	Y			
X	1	2	3	4
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	a

(a) Complete a tabela e averigúe se X e Y são variáveis aleatórias independentes. (1.5)

- **Obtenção de a**

$$\begin{aligned} a \quad : \quad & \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{4} P(X=x, Y=y) = 1 \\ & \left(\frac{2}{32}+\frac{3}{32}+\frac{4}{32}+\frac{5}{32}\right)+\left(\frac{3}{32}+\frac{4}{32}+\frac{5}{32}+a\right)=1 \\ & a = 1-\frac{26}{32}=\frac{3}{16} \end{aligned}$$

- **F.p. conjunta e marginais de X e Y**
  Foram sumariadas na tabela seguinte:

	Y				
X	1	2	3	4	$P(X=x)$
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{14}{32}$
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{18}{32}$
$P(Y=y)$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	1

- **Dependência entre X e Y**
  X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\times P(Y=y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Se por um lado

$$P(X=1, Y=1) = \frac{2}{32} \qquad [=\frac{1}{16}=0.0625],$$

por outro

$$P(X=1)\times P(Y=1) = \frac{14}{32}\times\frac{5}{32}=\frac{35}{512} \qquad [\simeq 0.068359].$$

Deste modo conclui-se que

$$P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)\times P(Y=1),$$

pelo que X e Y são v.a. DEPENDENTES.

(b) Determine $E(X|Y=2)$. (1.5)

- **V.a.**
  $X \mid Y=2$

- **F.p. de $X \mid Y=2$**
  Uma vez que

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \sum_{x=1}^{2} P(X=x, Y=2) \\ &= \frac{3}{32}+\frac{4}{32} \\ &= \frac{7}{32}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} P(X=x \mid Y=2) &= \frac{P(X=x, Y=2)}{P(Y=2)} \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{3}{32}}{\frac{7}{32}} = \frac{3}{7}, & x=1 \\ \frac{\frac{4}{32}}{\frac{7}{32}} = \frac{4}{7}, & x=2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** $X \mid Y=2$

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=2) &= \sum_{x=1}^{2} x \times P(X=x \mid Y=2) \\ &= 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

(c) Calcule $V(X-Y)$. (2.5)

- **Variância pedida**
Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} V(X-Y) &= V(X) + V(Y) - 2 \times cov(X,Y) \\ &= V(X) + V(Y) - 2 \times [E(XY) - E(X) \times E(Y)], \end{aligned}$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X,Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea (a).

- **Valor esperado e variância de** X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{2} x \times P(X=x) \\ &= 1 \times \frac{14}{32} + 2 \times \frac{18}{32} \\ &= \frac{25}{16} \\ V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \sum_{x=1}^{2} x^2 \times P(X=x) - E^2(X) \\ &= \left(1^2 \times \frac{14}{32} + 2^2 \times \frac{18}{32}\right) - \left(\frac{25}{16}\right)^2 \\ &= \frac{86}{32} - \frac{625}{256} \\ &= \frac{63}{256} \end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de** Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=1}^{4} y \times P(Y=y) \\ &= 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 3 \times \frac{9}{32} + 4 \times \frac{11}{32} \\ &= \frac{45}{16} \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \sum_{y=1}^{2} y^2 \times P(Y=y) - E^2(Y) \\ &= \left(1^2 \times \frac{5}{32} + 2^2 \times \frac{7}{32} + 3^2 \times \frac{9}{32} + 4^2 \times \frac{11}{32}\right) - \left(\frac{45}{16}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{290}{32} - \frac{2025}{256} \\ &= \frac{295}{256} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** XY

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{4} xy \times P(X=x, Y=y) \\ &= \left(1\times 1\times \frac{2}{32} + 1\times 2\times \frac{3}{32} + 1\times 3\times \frac{4}{32} + 1\times 4\times \frac{5}{32}\right) \\ &\quad + \left(2\times 1\times \frac{3}{32} + 2\times 2\times \frac{4}{32} + 2\times 3\times \frac{5}{32} + 2\times 4\times \frac{6}{32}\right) \\ &= \frac{35}{8} \end{aligned}$$

- **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\times E(Y) \\ &= \frac{35}{8} - \frac{25}{16}\times\frac{45}{16} \\ &= -\frac{5}{256} \end{aligned}$$

- **Variância pedida (cont.)**

$$\begin{aligned} V(X-Y) &= V(X) + V(Y) - 2\times cov(X,Y) \\ &= \frac{63}{256} + \frac{295}{256} - 2\times\left(-\frac{5}{256}\right) \\ &= \frac{23}{16}. \end{aligned}$$