

Chapter 2

Laminar Flow

2.1 ZERO PRESSURE GRADIENT

Problem 2.1.1 — Consider a uniform flow of velocity U_∞ over a flat plate of length L of a fluid of kinematic viscosity ν . Assume that the fluid is incompressible and that the flow is steady and bi-dimensional. The coordinate system has x aligned with the plate, y perpendicular to the plate and the origin at the leading edge of the plate, as illustrated in figure 2.1.

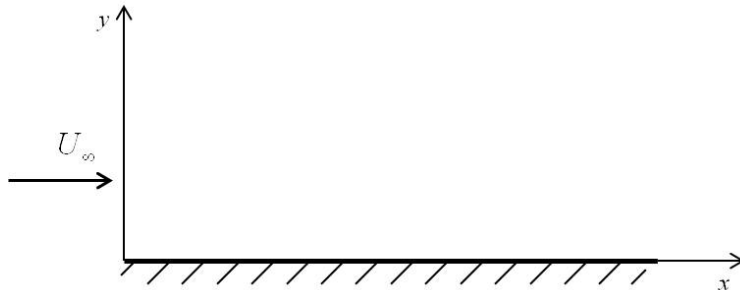


Figure 2.1: Uniform flow of velocity U_∞ over a flat plate of length L .

- Determine the pressure gradient dp/dx imposed to the boundary-layer and the external velocity U_e .
- Determine the resistance force of the plate.

- c) Assuming that the boundary-layer thickness corresponds to $U = 0.99U_e$, determine at which distance from the leading edge x/L does the streamline that is $0.001L$ away from the plate at the leading edge enters the boundary-layer.
- d) Is the velocity component normal to the plate positive, zero or negative? Justify your answer.
- e) In which conditions are the calculations requested above realist?

Problem 2.1.2 — A third degree polynomial is proposed for a zero pressure gradient boundary-layer velocity profile.

$$\frac{U}{U_e} = A_1\eta^3 + A_2\eta^2 + A_3\eta + A_4 \quad \text{with} \quad \eta = \frac{y}{\delta}.$$

U is the velocity component parallel to the wall, U_e is the external velocity, y is the normal distance to the wall, δ is the boundary-layer thickness and A_1, A_2, A_3 and A_4 are constants.

- a) Determine the constants A_1, A_2, A_3 and A_4 .
- b) Determine the displacement thickness, δ^*/δ , the momentum thickness, θ/δ , and the shape factor H .
- c) Using the integral von Kármán equation, determine the boundary layer thickness δ/x as a function of the distance to the leading edge.
- d) Calculate the evolution of δ^*/x , θ/x and the skin friction coefficient, $C_f = \tau_w/\frac{1}{2}\rho U_e^2$, along the plate. (τ_w is the shear-stress at the wall and ρ is the fluid density).
- e) Determine the velocity component normal to the plate V .
- f) Determine the resistance coefficient C_D of a plate of length L .

Problem 2.1.3 — Consider a parabolic velocity profile for a boundary-layer over a flat plate given by:

$$\frac{U}{U_e} = A_1 + A_2\eta + A_3\eta^2 \quad \text{with} \quad \eta = \frac{y}{\delta}.$$

U is the velocity component parallel to the plate, U_e is the external velocity, y is the normal distance to the wall, δ is the boundary-layer thickness and A_1, A_2 and A_3 are constants.

- a) Determine the constants A_1, A_2 and A_3 .

- b) Calculate the dimensionless displacement thickness, δ^*/δ , momentum thickness, θ/δ , and shape factor H .
- c) Using the integral von Kármán equation, determine the boundary layer thickness δ/x as a function of the distance to the leading edge.
- d) Calculate the evolution of δ^*/x , θ/x and the skin friction coefficient, $C_f = \tau_w/\frac{1}{2}\rho U_e^2$, along the plate. (τ_w is the shear-stress at the wall and ρ is the fluid density).
- e) Determine the velocity component normal to the plate V .
- f) Determine the resistance coefficient C_D of a plate of length L .

Problem 2.1.4 — Consider a velocity profile for a boundary-layer over a flat plate given by:

$$\frac{U}{U_e} = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \quad \text{with } \eta = \frac{y}{\delta}.$$

U is the velocity component parallel to the plate, U_e is the external velocity, y is the normal distance to the wall, δ is the boundary-layer thickness and A_1 and A_2 are constants.

- a) Determine the constants A_1 and A_2 .
- b) Calculate the dimensionless displacement thickness, δ^*/δ , momentum thickness, θ/δ , and shape factor H .
- c) Using the integral von Kármán equation, determine the boundary layer thickness δ/x as a function of the distance to the leading edge.
- d) Calculate the evolution of δ^*/x , θ/x and the skin friction coefficient, $C_f = \tau_w/\frac{1}{2}\rho U_e^2$, along the plate. (τ_w is the shear-stress at the wall and ρ is the fluid density).
- e) Determine the velocity component normal to the plate V .
- f) Determine the resistance coefficient C_D of a plate of length L .

Problem 2.1.5 — The velocity profile (U is the velocity component parallel to the plate, U_e is the external velocity, y is the normal distance to the wall and δ is the boundary-layer thickness)

$$\frac{U}{U_e} = 1 - e^{-4.605\eta} \quad \text{with } \eta = \frac{y}{\delta}$$

is a smooth curve that respects $U = 0$ at $y = 0$ and $U = 0.99U_e$ at $y = \delta$, which could suggest a reasonable approximation for zero pressure gradient boundary-layer. However, the integration of the von Kármán equation with this profile leads to

$$\frac{\delta}{x} \simeq 9.2 (Re_x)^{-0.5} \quad \text{with} \quad Re_x = \frac{U_e x}{\nu},$$

which is almost 100% different from the value of the Blasius solution (with $U = 0.99U_e$ for $y = \delta$)

$$\frac{\delta}{x} \simeq 5 (Re_x)^{-0.5}.$$

What is the reason for the poor accuracy of this result?

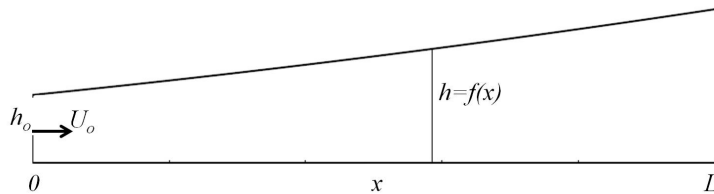


Figure 2.2: Aerodynamic tunnel with adjustable top wall of length L , height h and inlet velocity U_0 .

Problem 2.1.6 — An aerodynamic tunnel of length L has a top wall with adjustable height $h = f(x)$, as illustrated in figure 2.2. At the inlet of the tunnel, the height is h_0 and the flow is uniform with a velocity equal to U_0 . Assume that the tunnel has smooth walls, the fluid is incompressible and the flow is steady and two-dimensional. ($\nu_{\text{ar}} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_{\text{ar}} = 1.2 \text{ kg/m}^3$).

- Without neglecting the effect of the boundary-layers on the walls, determine the shape of the top wall of the tunnel $h = f(x)$ that leads to zero pressure gradient imposed to the bottom wall boundary-layer.
- Determine the resistance force of the bottom wall of the tunnel.
- For $h_0 = 0.3\text{m}$ and $L = 1$, estimate the largest value of U_0 for which the flow inside the tunnel is laminar.

2.2 FAVOURABLE AND ADVERSE PRESSURE GRADIENT

Problem 2.2.1 — Approximate solutions of boundary-layer flows may be obtained solving the von Kármán integral equation supplemented by the definition of the velocity profile. For the velocity profile given by

$$\frac{U}{U_e} = A + B \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \eta \right) + C \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \eta \right) \quad \text{with } \eta = \frac{y}{\delta},$$

where U is the velocity component parallel to the plate, U_e is the external velocity, y is the normal distance to the wall, δ is the boundary-layer thickness and A , B and C are constants:

- a) Indicate the most appropriate values for A , B and C .
- b) Determine the parameter

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

corresponding to flow separation, ($\tau_w = 0$), of this type of profiles.

- c) Determine the constants B and C for the velocity profile of a boundary-layer from a stagnation point flow that exhibits $U_e = ax$.
- d) For a zero pressure gradient boundary-layer, for which regime of flow, laminar or turbulent, is this profile suitable? Justify your answer.

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \eta \right) d\eta = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \operatorname{sen}^3 \left(\frac{\pi}{2} \eta \right) d\eta = \frac{4}{3\pi}$$

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^4 \left(\frac{\pi}{2} \eta \right) d\eta = \frac{3}{8}$$

Problem 2.2.2 — A boundary-layer velocity profiles is defined by:

$$\frac{U}{U_e} = A \ln(\eta + 1) + B\eta + C \quad \text{with } \eta = \frac{y}{\delta}.$$

U is the velocity component parallel to the plate, U_e is the external velocity, y is the normal distance to the wall, δ is the boundary-layer thickness and A , B and C are constants.

- a) Determine the constants A, B and C.
 b) Discuss for which boundary-layer flow is this profile suitable.

$$\int_0^1 \ln(\eta + 1) d\eta = 2\ln(2) - 1, \quad \int_0^1 \eta \ln(\eta + 1) d\eta = 0,25$$

$$\int_0^1 (\ln(\eta + 1))^2 d\eta = 2(1 - \ln(2))^2$$

Problem 2.2.3 — Consider a small wind tunnel with a flat bottom and an adjustable top wall, as illustrated in figure 2.3. Assume that the tunnel is sufficiently wide to assume two-dimensional flow. At the inlet, the velocity profile is uniform and the velocity is equal to $U_o = 25\text{m/s}$. The length of the tunnel is $L = 1\text{m}$ and the height at the inlet is equal to $h_o = 0.3\text{m}$.

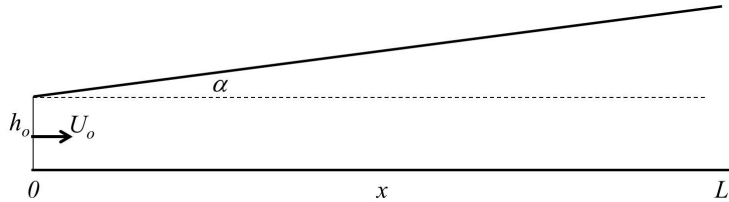


Figure 2.3: Wind tunnel with adjustable flat top wall of angle α and length $L = 1\text{m}$, inlet height $h_o = 0.3\text{m}$ and inlet velocity $U_o = 25\text{m/s}$.

- a) Assuming that the effect of the boundary-layers on the tunnel walls is negligible, determine the distribution of the mean velocity along the tunnel as a function of the distance to the inlet x and the angle α .
 b) Using Thwaites's method, determine the angle α that leads to flow separation at $x = L$ on the bottom wall of the tunnel.
 c) For the conditions of question b), estimate the value of the momentum thickness, θ , on the bottom wall of the tunnel at $x = L$.
 d) For the conditions of question b) and assuming a velocity profile given by

$$\frac{U}{U_e} = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3 \quad \text{with} \quad \eta = \frac{y}{\delta},$$

estimate the boundary-layer thickness, δ , on the bottom wall of the tunnel at $x = L$.

- e) Is the situation defined in question b), laminar flow separation at $x = L$ on the bottom wall of the tunnel, physically realistic?

Problem 2.2.4 — Consider a laminar, two-dimensional boundary-layer of an incompressible fluid developing in a region where the external velocity, U_e , is given by

$$U_e(x) = \frac{U_o}{(1 + x/L)^2} .$$

Momentum thickness θ is zero for $x = 0$. ($\nu = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)

- Determine the pressure gradient dp/dx imposed to the boundary-layer.
- Using Thwaites's method, determine the distance x/L for which the boundary-layer separates.
- Estimate the relation that U_o and L must satisfy to guarantee that the result of question b) is realist.

Problem 2.2.5 — A wind tunnel of length $L = 1\text{m}$ has an adjustable top wall. At the inlet, the tunnel height is $h_o = 0.3\text{m}$ and the flow is uniform with a velocity equal to $U_o = 10\text{m/s}$. Assume that the tunnel has smooth walls, the flow is two-dimensional and the fluid is incompressible.

($\nu_{\text{ar}} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_{\text{ar}} = 1.2 \text{ kg/m}^3$)

- Neglecting the effect of the boundary-layers on the tunnel walls, determine the shape of the top wall of the tunnel, $h = f(x)$, that leads to a pressure gradient imposed to the boundary-layer of the bottom wall given by

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \frac{U_o^2}{L} \left(1 + \frac{x}{L} \right) .$$

- Determine the evolution of the displacement thickness, θ , with the distance to the inlet, x .
- Determine the distributions of displacement thickness δ^* and skin friction coefficient, $C_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho U_e^2$, along the bottom wall. (τ_w is the shear-stress at the wall and ρ is the density of the fluid).

Problem 2.2.6 — Consider a two-dimensional boundary-layer of an incompressible fluid developing in the x direction in the laminar regime. The external velocity is defined by:

$$U_e = ax ,$$

where a is a constant. Assume that the boundary-layer approximations are valid for $x \geq 0$. ($\nu = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

- a) Determine the pressure gradient imposed to the boundary-layer, $\frac{dp}{dx}$.
- b) Determine the evolution of the momentum thickness, θ , with the distance to the inlet of the tunnel, x .
- c) Determine the evolution of the shape factor, H , and of the momentum thickness, δ^* , with x . Comment the result.
- d) Determine the evolution of the skin friction coefficient, C_f , with x .
- e) Discuss if there is any value of a for which the solution above loses physical meaning for $x < 1\text{m}$.

Chapter 3

Turbulent Flow

3.1 ZERO PRESSURE GRADIENT

Problem 3.1.1 — Air flows over a flat plate with a velocity of 20m/s. Assume that the critical Reynolds number (Re_{crit}) is equal to the transition Reynolds number($Re_{x_{tr}}$) with $Re_{crit} = Re_{x_{tr}} = 5 \times 10^5$.

($v = 1.51 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$, $\rho = 1.2 \text{kg}/\text{m}^3$)

- Estimate the distance to the leading edge, x , for which the boundary-layer thickness is equal to $\delta = 10^{-3} \text{m}$.
- Estimate the distance to the leading edge, x , for which the boundary-layer thickness is equal to $\delta = 10^{-2} \text{m}$.
- Estimate the momentum thickness θ , the displacement thickness δ^* and the skin friction coefficient C_f for $x = 0.40 \text{m}$.
- For a plate of length $l = 0.5 \text{m}$, calculate the resistance force per unit width assuming that the flow is laminar for $Re_x < Re_{crit}$ and turbulent for $Re_x > Re_{crit}$. Calculate the same value assuming that the flow is fully-turbulent.
- Repeat the previous question for $l = 5 \text{m}$. Discuss the result.

Problem 3.1.2 — A rectangular publicity panel with an area of 3m^2 is to be placed in a location with wind aligned with the length of the panel l and speed U_o . The length and width of the panel must be larger than 1m. The goal is to design the panel to minimize

the resistance force for a given speed U_o assuming that the thickness of the panel is zero and that the transition from laminar to turbulent flow is instantaneous at $Re_{crit} = Re_{trans} = 5 \times 10^5$.

($v_{air} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_{air} = 1.2 \text{ kg/m}^3$)

- a) Determine the range of speed U_o for which the length of the panel should be larger than its width..
- b) Determine the range of speed U_o for which the length of the panel should be equal to 3m.
- c) Assuming that the thickness of the panel is not zero, but the pressure resistance is negligible, what changes in the solution of the two previous questions? Give a clear justification of your answer.
- d) For the conditions of question c) and wind speed $U_o = 15\text{m/s}$:
 - Determine the resistance force of the panel.
 - Determine the mean velocity U at the trailing edge of the panel when $y = 0.05\delta$.

Problema 3.1.3 — A rectangular publicity panel with an area of 4m^2 is to be placed in a location with wind aligned with the length of the panel l and speed U_o . The length and width of the panel must be larger than 1m. Assume that the transition from laminar to turbulent flow is instantaneous at $Re_{crit} = Re_{trans} = 5 \times 10^5$.

($v_{air} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_{air} = 1.2 \text{ kg/m}^3$)

- a) Assuming that the thickness of the panel is null, determine the dimensions of the panel that minimize the resistance force of the panel for the following conditions:
 1. Wind speed $U_o = 5\text{m/s}$.
 2. Wind speed $U_o = 10\text{m/s}$.
- b) Assuming that the thickness of the panel is finite, but with negligible contribution of the pressure resistance force, determine the dimensions of the panel that minimize the resistance force when the wind speed is $U_o = 10\text{m/s}$.
- c) For the conditions of question b), determine the horizontal component of mean velocity at the trailing edge of the panel when $y = 0.1\delta$.

Problema 3.1.4 — A rectangular publicity panel has an area of 3m^2 . Assume that the panel has no thickness and that its length l cannot be smaller than 1m or larger than 3m, $1\text{m} \leq l \leq 3\text{m}$. Assume that the transition from laminar to turbulent flow is instantaneous at $Re_{crit} = Re_{trans} = 5 \times 10^5$.

$(v_{air} = 151 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \rho_{air} = 1.2 \text{ kg/m}^3)$

Estimate the dimensions of the panel that lead to the minimum and maximum resistance force for the following conditions:

- a) Wind parallel to the panel with a speed of 20km/h.
- b) Wind parallel to the panel with a speed of 44km/h.
- c) Wind with a small angle of attack (for example 0.1°) with a speed of 44km/h.

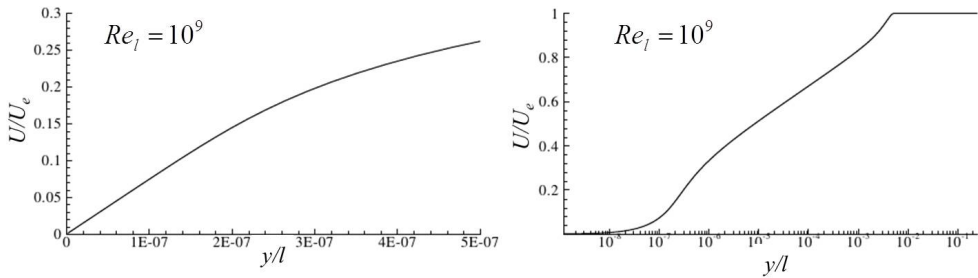


Figure 3.1: Mean velocity profile, U , at a given distance to the leading edge x of the flow over a flat plate at a Reynolds number of $Re_l = 10^9$.

y/l	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
U/U_e	7.466×10^{-3}	7.457×10^{-2}	0.334	0.514	0.671	0.833	1.00	1.00

Table 3.1: Values of the mean velocity profile, U , at a given distance to the leading edge x of the flow y over a flat plate at a Reynolds number of $Re_l = 10^9$.

Problem 3.1.5 — Figure 3.1 and table 3.1 present the mean velocity profile, U , at a given distance to the leading edge x of the flow over a flat plate at the Reynolds number of

$Re_L = 10^9$. The profile was obtained from the numerical solution of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations supplemented with the two-equation eddy-viscosity SST $k - \omega$ turbulence model. Calculations were performed without wall functions, i.e. with the shear-stress at the wall determined directly from its definition. $U_e = U_\infty$ designates the velocity of the outer flow, l is the length of the plate, ν is the kinematic viscosity of the fluid and y is the distance to the wall.

- Determine the skin friction coefficient C_f .
- Determine $y^+ = u_{\tau}y/\nu$ at the point located $10^{-8}l$ away from the wall, $y = 10^{-8}l$.
- Determine the Von Kármán, K constant implied by the numerical results.
- Estimate the distance to the leading edge x/l that corresponds to this velocity profile.

Problem 3.1.6 — Os valores apresentados na tabela 3.2 correspondem a medições efectuadas num ensaio de uma camada limite turbulenta sobre uma placa plana hidrodinamicamente lisa. O fluido que se escoia é ar ($\rho_{\text{ar}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ e $\nu_{\text{ar}} = 1,51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). x representa a distância ao bordo de ataque do local onde se fizeram as medições e y representa a distância à parede.

$x = 1,5\text{m}$	1	2	3	4	5	6
y (mm)	0,5	1,0	5,0	15	20	25
U (m/s)	13,2	15,4	19,3	22,5	25	25

Table 3.2: Medições efectuadas num ensaio de uma camada limite turbulenta sobre uma placa plana hidrodinamicamente lisa.

Com base nos valores apresentados na tabela 3.2, determine a tensão de corte na parede e a espessura da sub-camada linear. Discuta a qualidade das estimativas feitas.

Problema 3.1.7 — Pretende-se obter soluções aproximadas dos parâmetros integrais de uma camada limite turbulenta sobre uma placa plana utilizando a equação integral de von Kármán com um perfil de velocidade média dado por

$$\frac{U}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \quad (6.50)$$

com $n = 7$, em que U é a componente da velocidade média paralela à placa, U_e é a velocidade do escoamento exterior, y é a coordenada normal à parede e δ é a espessura da

camada limite. O coeficiente de tensão de corte superficial C_f é obtido da correlação de Ludwig-Tillman

$$C_f = 0,246 \times 10^{-0,678H} \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{-0,268} \quad (6.54)$$

onde H é o factor de forma do perfil de velocidade média, θ é a espessura de quantidade de movimento e ν a viscosidade cinemática do fluido. Admita que o escoamento é turbulento desde o bordo de ataque ($x = 0$) e apresente os resultados em forma adimensional escolhendo os valores de referência mais apropriados.

- Determine a espessura de quantidade de movimento θ em função da distância ao bordo de ataque da placa x .
- Determine a espessura da camada limite δ e a espessura de deslocamento δ^* em função da distância ao bordo de ataque da placa x .
- Determine o coeficiente de resistência C_D de uma placa de comprimento l .

Problema 3.1.8 — O coeficiente de resistência C_D de uma placa plana de comprimento l imersa num escoamento uniforme de velocidade U_∞ pode ser aproximado por

$$C_D = \frac{\int_0^l \tau_w dx}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 l} \simeq \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_l)}, \quad Re_l = \frac{U_\infty l}{\nu},$$

em que τ_w é a tensão de corte na parede, ρ é a massa volúmica do fluido e ν a viscosidade cinemática do fluido. x representa a distância ao bordo de ataque da placa e y a distância à parede. ($\nu_{ar} = 1,51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3$)

Utilizando a correlação de C_D dada em cima:

- Determine a evolução da espessura de quantidade de movimento ao longo de uma placa com transição forçada no bordo de ataque. Apresente o resultado com parâmetros adimensionais.
- Determine a evolução da espessura de quantidade de movimento ao longo de uma placa com transição natural admitindo transição a regime turbulento concentrada num ponto com $Re_{x_{tr}} = 5 \times 10^5$. Apresente o resultado com parâmetros adimensionais.
- Determine a equação do coeficiente de tensão de corte superficial C_f em função de Re_x admitindo escoamento turbulento desde o bordo de ataque.

- d) Admitindo $Re_l = 5 \times 10^5$ e transição natural com $Re_{x_{tr}} = 5 \times 10^5$, necessita de um modelo de turbulência para obter a solução do escoamento num domínio de cálculo com $-0,25L \leq x \leq 1,25L \wedge 0 \leq y \leq 0,25L$? Justifique a sua resposta.

3.2 MODELOS DE TURBULÊNCIA

Problema 3.2.1 — Pretende-se calcular numericamente o escoamento sobre uma placa plana utilizando as equações de camada limite em média temporal de Reynolds suplementadas por um modelo de viscosidade turbulenta. Admita que a superfície da placa é hidrodinamicamente lisa.

- a) Determine a viscosidade turbulenta $\nu_t = \mu_t/\rho$ na região da lei da parede para que os perfis de velocidade média satisfaçam a lei da parede.

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{K} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C. \quad (6.40)$$

- b) Se escolher os modelos de duas equações $k - \varepsilon$ ou $k - \omega$, qual o comportamento de k , ε e ω na região da lei da parede?
- c) Admitindo que $Re_l = 3 \times 10^6$ e que $Re_{x_{tr}} = 5 \times 10^5$, estime a distância máxima à parede (y_2/l) a que deve colocar o primeiro ponto da malha para aplicar directamente a condição de não escorregamento na parede (sem leis da parede).
- d) A malha da alínea anterior poderá ser utilizada para calcular o escoamento a $Re_l = 10^9$ utilizando leis da parede como condições de fronteira na superfície da placa? Justifique claramente a resposta.

Problema 3.2.2 — Considere o cálculo numérico do escoamento sobre uma placa plana com as equações da continuidade e de Navier-Stokes escritas em média temporal de Reynolds suplementadas por modelos de viscosidade turbulenta. Admita que a superfície da placa é hidrodinamicamente lisa. $Re_l = 5 \times 10^6$.

- a) Se o programa disponível incluir o modelo $k - \varepsilon$ standard [3] e a versão SST do modelo $k - \omega$ [4], qual é o modelo mais indicado para calcular o escoamento com transição natural? Justifique claramente a resposta.
- b) Admitindo transição forçada no bordo de ataque da placa,
1. Estime a distância mínima à parede (y_2/l) a que deve colocar o primeiro ponto da malha para aplicar a condição de não escorregamento.

2. Estime a distância ao bordo de ataque do local em que $y_2 = 0,15\delta$.
 3. Estime a velocidade média U , a viscosidade turbulenta ν_t e a energia cinética da turbulência k para um ponto localizado em $x = 0,5l, y = 0,1\delta$. Apresente os resultados em forma adimensional.
- c) Para placas com superfície rugosa, estime a rugosidade relativa (ϵ_r/l) mínima da superfície da placa para que a força de resistência de atrito se torne independente de Re_l .

Problema 3.2.3 — Considere o cálculo numérico do escoamento sobre uma placa plana com as equações da continuidade e de Navier-Stokes escritas em média temporal de Reynolds suplementadas por modelos de viscosidade turbulenta.

- a) Uma malha com a distância do primeiro ponto de cálculo à parede igual a $y_2 = 10^{-3}l$ foi utilizada para $Re_l = 2,5 \times 10^6$. Para que tipo de transição (forçada ou natural) é que o cálculo foi feito?
- b) Admita que pretende determinar a incerteza da solução numérica utilizando um estudo de refinamento de malha (sequência de malhas com aumento do número de elementos). A distância do primeiro ponto de cálculo à parede deve permanecer constante ou diminuir com o aumento do número de elementos (refinamento da malha)? Justifique a sua resposta.
- c) Estime a rugosidade relativa (ϵ_r/l) máxima da superfície da placa para se poder admitir regime hidrodinamicamente liso.

Problema 3.2.4 — A figura 3.5 apresenta o domínio utilizado no cálculo do escoamento sobre uma placa plana com as equações de Navier-Stokes em média temporal de Reynolds suplementadas por 3 modelos de viscosidade turbulenta: $k - \omega$ SST [4], $\sqrt{k} - L$ (KSKL) [5] e Spalart & Allmaras (SPAL) [6].

Os cálculos foram efectuados em 9 malhas geometricamente semelhantes para $Re_l = 10^7$. A figura 3.5 apresenta a variação do coeficiente de resistência da placa C_D e da espessura de quantidade de movimento θ para $x = 0,75l$ em função do grau de refinamento da malha h_i/h_1 (os modelos de turbulência no gráfico que apresenta θ estão identificados pelas letras A, B e C). A figura contém ainda o coeficiente de tensão de corte superficial C_f em função de Re_x (obtidos na malha mais refinada) e as condições fronteira aplicadas nas fronteiras de entrada 1, saída 2 e exterior 3. As condições fronteira aplicadas na fronteira inferior (superfície da placa e linhas de simetria a montante e juzante da placa) são idênticas em todos os cálculos. A velocidade de referência é U_∞ , o comprimento de referência é l e a pressão de referência é $1/2\rho U_\infty^2$.

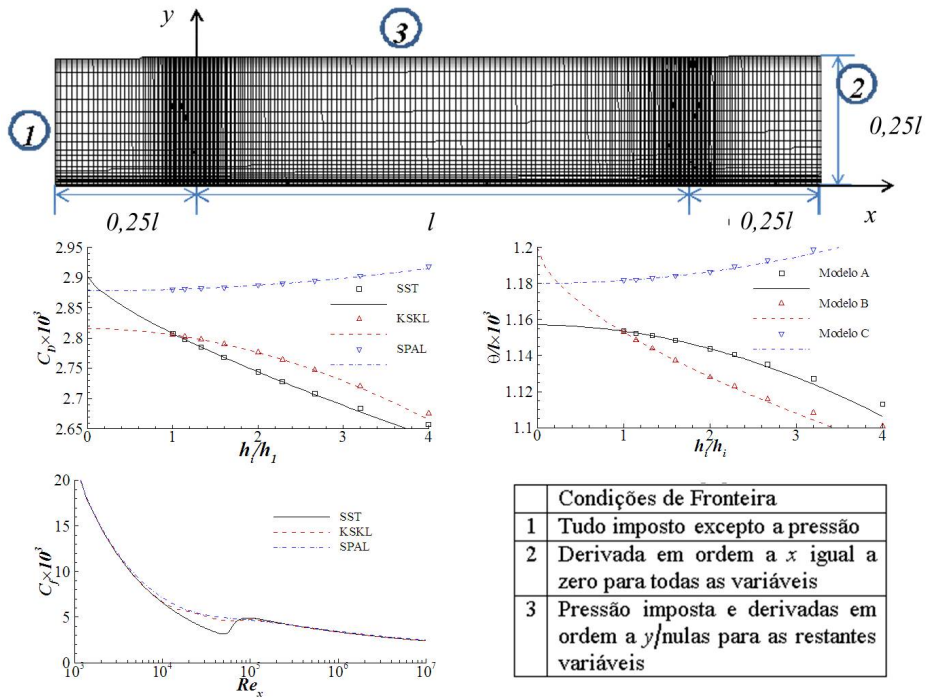


Figure 3.2: Domínio de cálculo e condições fronteira do escoamento sobre uma placa plana. Coeficiente de resistência C_D e espessura de quantidade de movimento θ em $x = 0,75l$ em função do grau de refinamento da malha h_i/h_1 e coeficiente de tensão de corte superficial C_f em função de Re_x para três modelos de viscosidade turbulenta.

- Como foi determinada a tensão de corte τ_w na superfície da placa? Justifique a sua resposta.
- Identifique as linhas correspondentes a cada um dos modelos de turbulência (A, B e C) no gráfico que apresenta a espessura de quantidade de movimento θ . Justifique a sua resposta.
- Sabendo que a distância adimensional do primeiro ponto interior da malha mais refinada à parede é de $y_2^+ = 0,06$ em $x = 0,75l$ estime o valor de y_2/l na malha mais refinada utilizada nos cálculos.

Problema 3.2.5 — A figura 3.6 apresenta o domínio utilizado no cálculo do escoamento sobre uma placa plana com as equações de Navier-Stokes em média temporal de Reynolds

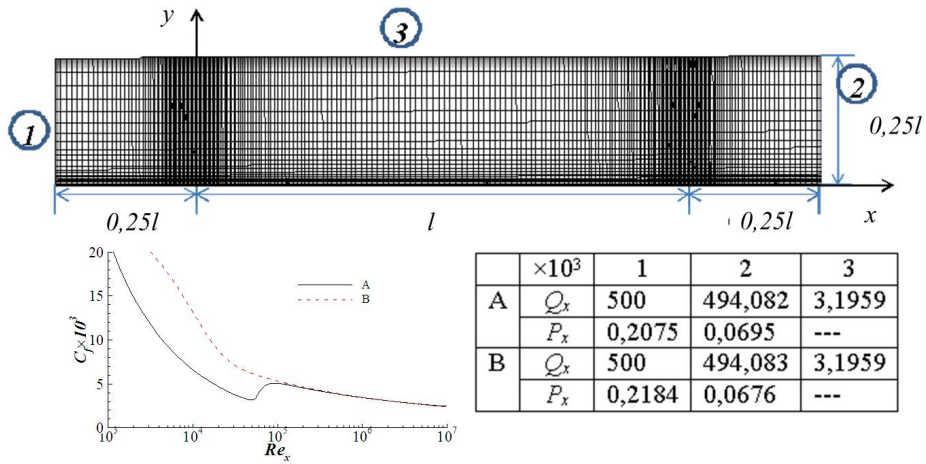


Figure 3.3: Domínio de cálculo do escoamento sobre uma placa plana, coeficiente de tensão de corte superficial C_f em função de Re_x e caudais de quantidade de movimento Q_x e forças de pressão P_x na direcção longitudinal x nas fronteiras de entrada (1), saída (2) e exterior (3).

suplementadas pelo modelo de viscosidade turbulenta $k-\omega$ SST [2]. Os cálculos foram efectuados para $Re_l = 10^7$ em dois conjuntos de malhas (A e B) distintos: um para aplicação de leis da parede como condição de fronteira na parede e o outro para aplicação directa da condição de não escorregamento na parede. Para as malhas mais refinadas, a incerteza numérica é inferior a 0,5% pelo que pode ser desprezada.

A figura 3.6 apresenta ainda o coeficiente de tensão de corte superficial C_f em função de Re_x e uma tabela que apresenta os caudais de quantidade de movimento Q_x e as forças de pressão P_x na direcção longitudinal x nas fronteiras de entrada (1), saída (2) e exterior (3). Os valores apresentados são adimensionais, sendo a velocidade do escoamento de aproximação U_∞ e o comprimento da placa l utilizados como valores de referência.

$$(1,2) \Rightarrow Q_x = \int_0^{0,25} 2 \frac{U}{U_\infty} \frac{U}{U_\infty} d\left(\frac{y}{l}\right), P_x = \int_0^{0,25} \frac{p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} d\left(\frac{y}{l}\right);$$

$$(3) \Rightarrow Q_x = \int_{-0,25}^{1,25} 2 \frac{V}{U_\infty} \frac{U}{U_\infty} d\left(\frac{x}{l}\right).$$

- a) Identifique qual é o grupo de malhas (A ou B) que foi utilizado com leis da parede na aplicação da condição de fronteira na placa. Justifique a sua resposta.

- b) Estime o coeficiente de resistência da placa utilizando a informação apresentada no gráfico de C_f em função de Re_x .
- c) Estime o coeficiente de resistência da placa, utilizando a informação dada na tabela.
- d) Sabendo que a distância dimensional do primeiro ponto interior das malhas mais refinadas à parede é de $y_2^+ = 0,1$ e $y_2^+ = 72,3$ a meio da placa $x = 0,5l$, estime o menor valor de y_2^+ nas duas malhas.

Referências

- 1 Wilcox , D. C. – *Turbulence Modeling for CFD* – Third Edition, DCW Industries, La Canada, CA, 2007.
- 2 *Best Practice Guidelines* – Version 1.0, ERCOFTAC Special Interest Group on "Quality and Trust in Industrial CFD", January 2000.
- 3 Launder B.E., Spalding D.B. – *The numerical computation of turbulent flows* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 1974, pp. 269-289.
- 4 Menter F.R. – *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications* – AIAA Journal, Vol.32, August 1994, pp. 1598-1605.
- 5 Menter F.R., Egorov Y., Rusch D. – *Steady and Unsteady Flow Modelling Using the $k - \sqrt{k}L$ Model* – Turbulence Heat and Mass Transfer 5, 2006.
- 6 Spalart P.R., Allmaras S.R. – *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows* – AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1992.

Chapter 4

Two-dimensional, Incompressible, Potential Flow

4.1 COMPLEX POTENTIAL

Problema 4.1.1 — Considere um escoamento junto a uma costa que faz um ângulo de $7\pi/6$ radianos (210°) tal como se ilustra na figura 4.1. À distância d do canto o módulo da velocidade é igual a U . Admita em primeira aproximação que pode simular o escoamento assumindo fluido perfeito e que o escoamento é permanente, incompressível, potencial e bidimensional.

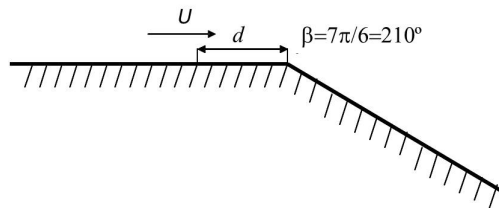


Figure 4.1: Escoamento junto a uma costa que faz um ângulo de $7\pi/6$ radianos (210°).

- Escreva o potencial complexo que representa o escoamento indicando claramente o sistema de eixos que utilizou.
- Determine a distância mínima da linha de corrente $\psi = Ud$ à costa ($\psi = 0$).

- c) Determine a equação da linha que tem $C_p = 0$. Tome como valores de referência para o cálculo de C_p as propriedades do escoamento no ponto à distância d do canto.
- d) Determine o coeficiente de pressão mínimo do escoamento e a sua localização.

Problema 4.1.2 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional no interior das condutas representadas na figura 4.3.

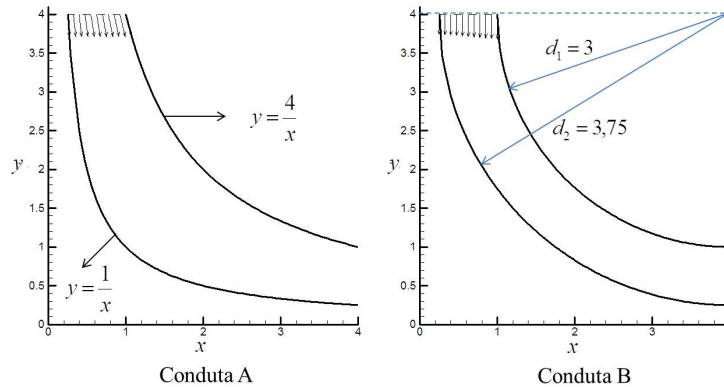


Figure 4.2: Escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional no interior de duas condutas.

- a) Utilizando o sistema de eixos representado na figura 4.3, mostre que o escoamento na conduta A é definido pelo potencial complexo $W = \frac{1}{2}z^2$ com $z = x + iy$ e determine o caudal (por unidade de largura) escoado na conduta.
- b) Determine o coeficiente de pressão máximo e mínimo no interior da conduta A utilizando como condições de referência as correspondentes à velocidade média na secção de entrada ($y = 4$).
- c) Determine o potencial complexo que define o escoamento na conduta B, sabendo que o caudal que se escoa nas duas condutas é idêntico.
- d) Determine a equação das linhas de pressão constante (isobáricas) na conduta B.

Problema 4.1.3 — A figura 4.4 apresenta as linhas de corrente divisórias de um escoamento permanente, bidimensional, incompressível e irrotacional obtido a partir da sobreposição de duas linhas de vórtice de intensidade Γ_1 e Γ_2 colocadas a uma distância d e de um escoamento uniforme de velocidade com módulo igual a U .

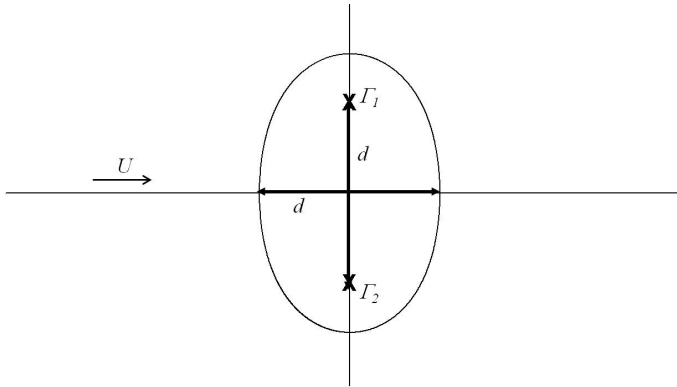


Figure 4.3: Linhas de corrente divisórias do escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional obtido pela sobreposição de duas linhas de vórtice colocadas à distância d e um escoamento uniforme horizontal de velocidade com módulo igual a U .

- a) Escreva o potencial complexo que representa o escoamento em função de U , d , Γ_1 e Γ_2 indicando claramente o sistema de eixos utilizado. Determine a relação entre Γ_1 e Γ_2 e indique o sinal da circulação de cada uma das linhas de vórtice.
- b) Para a situação ilustrada na figura 4.4,
 1. Determine a relação que satisfazem U , d , Γ_1 e Γ_2 .
 2. Determine os pontos de intersecção da linha de corrente divisória com o eixo imaginário.
 3. Determine o coeficiente de pressão mínimo tomando como condições de referência para a pressão estática e dinâmica os valores obtidos em infinito (escoamento uniforme).
- c) Determine o valor limite da relação que devem satisfazer U , d , Γ_1 e Γ_2 para que as linhas de corrente divisórias definam o escoamento em torno de um corpo finito.

Problema 4.1.4 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional definido pela sobreposição de um escoamento uniforme de velocidade U e um par fonte/poço de intensidade $\pm m$ colocados a uma distância d com a fonte à esquerda do poço, tal como ilustrado na figura 4.6.

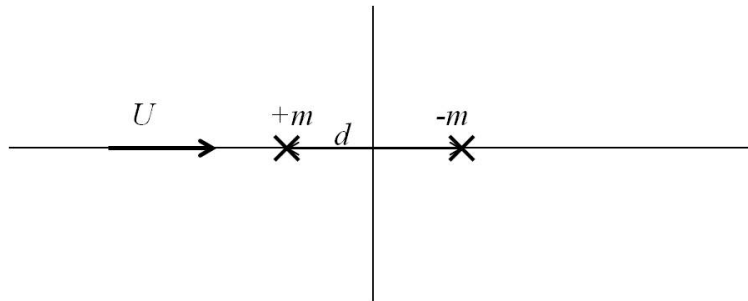


Figure 4.4: Escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional obtido pela sobreposição de um escoamento uniforme de velocidade U e um par fonte/poço de intensidade $\pm m$ colocados a uma distância d com a fonte à esquerda do poço.

- Escreva o potencial complexo que representa o escoamento em função de U , d e m indicando claramente o sistema de eixos utilizado.
- Determine o(s) ponto(s) de estagnação e o parâmetro adimensional que controla a sua localização.
- Determine a equação das linhas de corrente divisórias.
- Esboce as linhas de corrente para o caso em que $m = Ud/2$. Determine a razão entre a altura h e a largura L do corpo finito definido pelas linhas de corrente divisórias.

Problema 4.1.5 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bi-dimensional em torno de um cilindro circular com circulação, Γ , no referencial $z = x + iy$, tal como ilustrado na figura 4.9. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado na origem do referencial $z = 0 + i0$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo $\alpha = 10^\circ$ com o eixo real x e tem uma velocidade com módulo U_∞ . A circulação é introduzida por uma linha de vórtice colocada no centro do cilindro.

- Escreva o potencial complexo que representa o escoamento em função de U_∞ e Γ indicando claramente o sistema de eixos utilizado.
- Determine Γ de tal forma que o ponto de intersecção do cilindro com o eixo real positivo ($x = 1, y = 0$), seja um ponto de estagnação.
- Determine o valor máximo e mínimo do coeficiente de pressão, C_p , na superfície do cilindro e a sua localização. Utilize como condições de referência para a pressão estática e dinâmica os valores obtidos em infinito (escoamento uniforme).

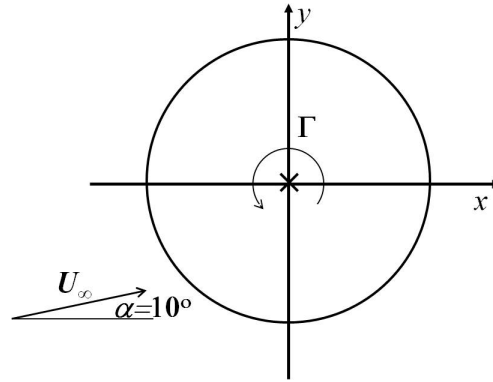


Figure 4.5: Escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular com circulação, Γ , no referencial $z = x + iy$. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado na origem do referencial $z = 0 + i0$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo $\alpha = 10^\circ$ com o eixo real x e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

- d) Determine o coeficiente de força vertical C_{F_y} que se exerce sobre o cilindro definindo os valores de referência mais indicados.

Problema 4.1.5 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular com circulação, Γ , no referencial $z = x + iy$, tal como ilustrado na figura 4.11. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado no ponto $z = 0 + i0,04$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo α , ($|\alpha| < \pi/6$), com o eixo real x e tem uma velocidade com um módulo igual a U_∞ . No centro do cilindro existe um vórtice com a intensidade necessária para que o ponto de intersecção do cilindro com o eixo real positivo, $z = b + i0$, seja um ponto de estagnação. As condições de referência para a pressão estática e dinâmica são os valores obtidos em infinito (escoamento uniforme).

- a) Escreva o potencial complexo que representa o escoamento em função de U_∞ , Γ e α indicando claramente o sistema de eixos que utilizou.
- b) Determine a gama de ângulos de ataque que satisfaz as seguintes condições:
1. Coordenada real do(s) ponto(s) de coeficiente de pressão mínimo maior ou igual do que zero, $x_{C_{p_{\min}}} > 0$.
 2. Coordenada imaginária do(s) ponto(s) de coeficiente de pressão máximo maior ou igual do que zero e menor ou igual do que 0,04, $0 \leq y_{C_{p_{\max}}} \leq 0,04$.

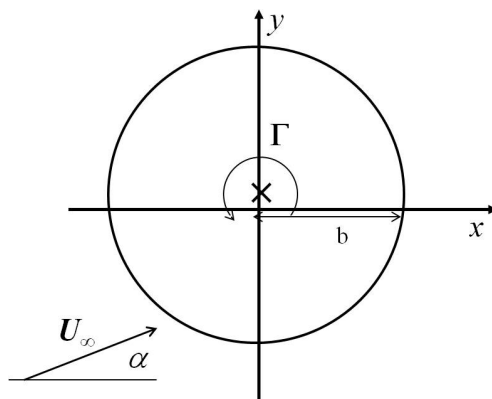


Figure 4.6: Escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular com circulação, Γ , no referencial $z = x + iy$. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado no ponto $z = 0 + i0,04$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo α com o eixo real x e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

3. Coeficiente de pressão mínimo maior ou igual do que $-3,5$, $C_{p_{\min}} \geq -3,5$.

c) Determine o ângulo de ataque em que o coeficiente de força na direção x , C_{F_x} , é máximo ($C_{F_x})_{\max}$ com

$$C_{F_x} = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 d},$$

em que d é o diâmetro do cilindro.

Problema 4.1.7 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular com circulação, Γ , no referencial $z = x + iy$, tal como ilustrado na figura 4.13. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado no ponto $z = c_1 + ic_2$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo α , ($|\alpha| < \pi/4$), com o eixo real ξ e tem uma velocidade com um módulo igual a U_∞ . No centro do cilindro existe um vórtice com a intensidade necessária para que o ponto de intersecção do cilindro com o eixo real positivo, $x = b$, seja um ponto de estagnação. As condições de referência para a pressão estática e dinâmica são os valores obtidos em infinito (escoamento uniforme).

a) Escreva o potencial complexo que representa o escoamento em função de U_∞ , Γ , α , c_1 e c_2 indicando claramente o sistema de eixos que utilizou.

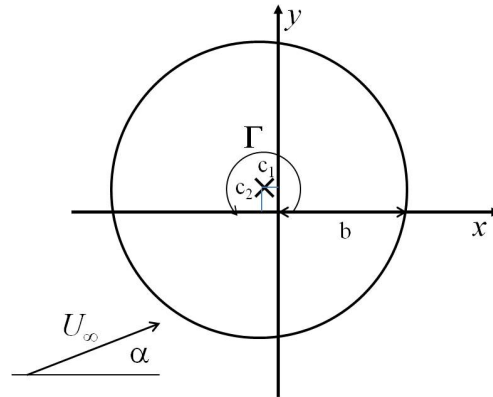


Figure 4.7: Escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular com circulação, Γ , no referencial $z = x + iy$. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado no ponto $z = c_1 + ic_2$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo α com o eixo real ξ e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

- b) Determine os valores de c_1 e c_2 para que o ponto de pressão mínima se encontre no 1º quadrante ($x_{C_{p_{\min}}} \geq 0 \wedge y_{C_{p_{\min}}} \geq 0$) na gama de ângulos de ataque entre $-1,5^\circ$ e $-0,5^\circ$, $-1,5^\circ \leq \alpha \leq -0,5^\circ$.
- c) Determine a relação entre c_1 e c_2 que garante que a coordenada real x do ponto de pressão mínima ($x_{C_{p_{\min}}}$) nunca é positiva, $x_{C_{p_{\min}}} \leq 0$.
- d) Para $c_1 = 0$ e $c_2 = 0,02$, determine a gama de ângulos de ataque para os quais a coordenada real do ponto de coeficiente de pressão mínima é menor do que a coordenada real dos pontos de estagnação, $x_{C_{p_{\min}}} < x_{C_{p_{\max}}}$.

Problema 4.1.8 — Considere um escoamento junto a uma costa que faz um ângulo de $\pi/2$ radianos (90°) tal como se ilustra na figura 4.16. No canto está colocada uma tomada de água que absorve do rio um caudal m por unidade de profundidade. Quando a tomada de água está fechada ($m = 0$), a velocidade na margem A a uma distância d do canto (representada na figura 4.16) tem módulo igual a U . Admita em primeira aproximação que pode simular o escoamento assumindo fluido perfeito e que o escoamento é permanente, incompressível, potencial e bidimensional.

- a) Escreva o potencial complexo que representa o escoamento indicando claramente o sistema de eixos utilizado.

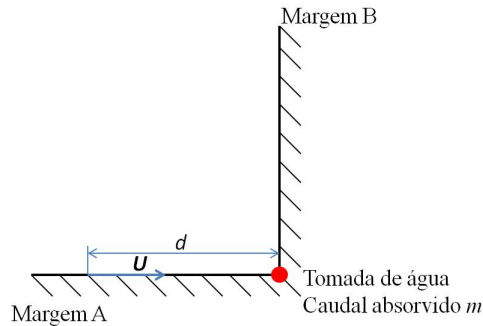


Figure 4.8: Escoamento junto a uma costa que faz um ângulo de $\pi/2$ radianos (90°). No canto está colocada uma tomada de água que absorve do rio um caudal m por unidade de profundidade. Quando a tomada de água está fechada ($m = 0$), a velocidade na margem A a uma distância d do canto tem módulo igual a U .

- b) Determine o(s) ponto(s) de estagnação e determine o parâmetro adimensional que controla o escoamento.
- c) Para $m = \pi U d / 2$,
1. Represente qualitativamente as linhas de corrente do escoamento.
 2. Determine a equação que determina a distância da(s) linha(s) de corrente divisória(s) à margem A.
 3. Determine o coeficiente de pressão máximo nas duas margens e a sua localização. Utilize como condições de referência a velocidade e a pressão na margem A a uma distância de 4m do canto quando a tomada de água está fechada ($m = 0$).

Problema 4.1.9 — Considere um escoamento junto a uma costa que faz um ângulo de $\pi/2$ radianos (90°) tal como se ilustra na figura 4.19. A margem B faz um ângulo de $\pi/6$ radianos (30°) com o eixo x representado na figura 4.19. Na margem B e à distância d do canto está colocada uma descarga de água que descarrega para o rio um caudal m por unidade de profundidade. Quando a descarga de água está fechada ($m = 0$), o módulo da velocidade no local onde se encontra a descarga é igual a U . Admita em primeira aproximação que pode simular o escoamento assumindo fluido perfeito e que o escoamento é permanente, incompressível, potencial e bidimensional.

- a) Escreva o potencial complexo que representa o escoamento quando a descarga se encontra fechada ($m = 0$) indicando claramente o sistema de eixos que utilizou.

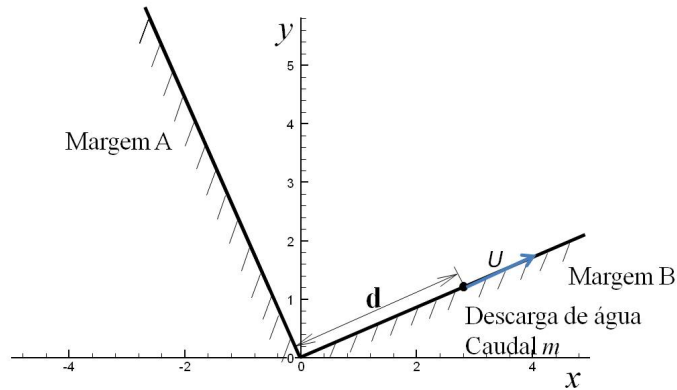


Figure 4.9: Escoamento junto a uma costa que faz um ângulo de $\pi/2$ radianos (90°) com uma descarga de água colocada à distância d do canto que descarrega para o rio um caudal m por unidade de profundidade. Quando a descarga de água está fechada ($m = 0$), o módulo da velocidade no local onde se encontra a descarga é igual a U .

- Escreva o potencial complexo que representa o escoamento quando a descarga se encontra aberta indicando claramente o sistema de eixos que utilizou.
- Determine a relação entre m , U e d para a qual o caudal da descarga não atinge a margem A.
- Para a situação limite da alínea anterior, desenhe qualitativamente o escoamento. Trace rigorosamente as linhas de corrente divisórias junto à margem do rio e quando se afastam para grande distância da descarga de água.

Problema 4.1.10 — A água de uma piscina com 625m^3 é renovada a partir de uma costa que faz um ângulo recto como ilustra a figura 4.22. O caudal m é retirado na tomada A e a descarga de um caudal idêntico (igual a m) é efectuada em B. A distância das tomadas de admissão e descarga (A e B) ao canto é igual a d . Quando as tomadas de admissão e descarga estão fechadas o módulo da velocidade em A e B é igual a U e a velocidade do escoamento tem o sentido indicado na figura 4.22. Admita que a água é um fluido perfeito e que o escoamento é permanente, incompressível, potencial e bidimensional e que a profundidade do escoamento nesta zona (d direcção perpendicular à figura) é 1m .

- Indicando claramente o sistema de eixos que utilizou, escreva o potencial complexo que representa o escoamento e determine o parâmetro adimensional que controla a

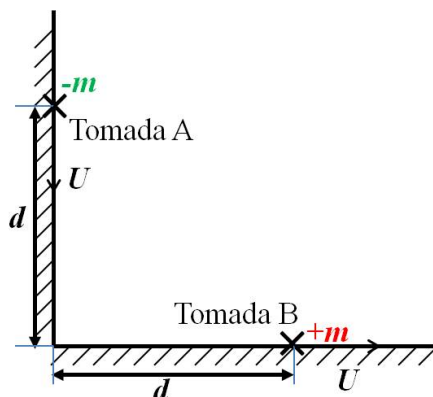


Figure 4.10: Escoamento junto a uma costa que faz um ângulo recto. Um caudal m é retirado na tomada A e a descarga de um caudal idêntico (igual a m) é efectuada em B. A distância das tomadas de admissão e descarga (A e B) ao canto é igual a d .

configuração do escoamento.

- b) Determine o valor mínimo da velocidade U para que a água da piscina seja renovada em 1 hora quando $d = 2\text{m}$ e $m = 0,1736\text{m}^2/\text{s}$.
- c) Determine a equação das linhas de corrente divisórias e represente qualitativamente o escoamento quando a velocidade U é o dobro da determinada na alínea anterior mantendo-se $d = 2\text{m}$ e $m = 0,1736\text{m}^2/\text{s}$. Faça um traçado rigoroso das linhas de corrente divisórias junto à costa.
- d) Determine a localização do(s) ponto(s) de estagnação quando U é igual a $1/5$ do valor mínimo determinado na alínea b) mantendo-se $d = 2\text{m}$ e $m = 0,1736\text{m}^2/\text{s}$.

4.2 CONFORMAL MAPPING

Problem 4.2.1 — Consider the steady, incompressible, potential and two-dimensional flow around a circular cylinder in the coordinate system $\zeta = \xi + i\eta$, as illustrated in figure 4.11. The radius of the cylinder is $a = 1\text{m}$ and its centre is located at the origin of the coordinate system $\zeta = 0 + i0$. The uniform incoming flow is aligned with the real axis ξ and has a velocity equal to U_∞ .

Consider the conformal map applied to the flow in the ζ domain given by

$$z = \zeta - \frac{0,36}{\zeta}.$$

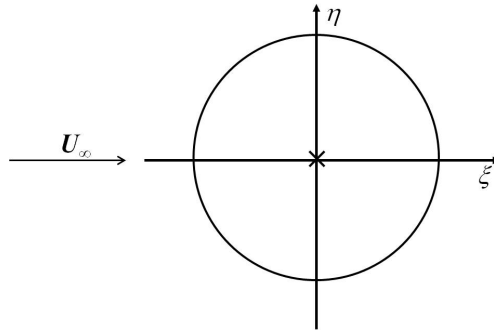


Figure 4.11: Steady, incompressible, two-dimensional, potential flow around a circular cylinder in the $\zeta = \xi + i\eta$ coordinate system. The radius of the cylinder is $a = 1\text{m}$ and its centre is located at the origin of the coordinate system $\zeta = 0 + i0$. The uniform incoming flow is aligned with the real axis ξ and has a velocity equal to U_∞ .

- Determine the exact shape of the body in the transformed plane z .
- Determine the equation of the streamline that contains the point $\zeta = -2 + i1$ of domain ζ in original and transformed domains.
- Determine the intersection of the streamlines of the previous question (domains ζ and z) with the imaginary axis η and y . Discuss the result.
- Determine the minimum distance to the cylinder (domain ζ) and to the body in the transformed domain (z) to obtain a pressure coefficient C_p larger than -1 . The reference conditions for the static and dynamic pressures correspond to the values of the uniform incoming flow at infinity.

Problema 4.2.2 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bi-dimensional em torno de um cilindro circular no referencial $\zeta = \xi + i\eta$, tal como ilustrado na figura 4.26. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado na origem do referencial $\zeta = 0 + i0$. O escoamento de aproximação uniforme está alinhado com o eixo real ξ e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

Considere a transformação conforme aplicada ao escoamento no domínio ζ definida por

$$z = \zeta e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{0.64}{\zeta e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

- Determine a forma do corpo no plano transformado z .
- Determine a localização do(s) ponto(s) de estagnação no plano transformado.
- Determine a(s) equação(ões) que define(m) a(s) linha(s) de corrente divisória(s) no plano transformado.
- Desenhe qualitativamente o escoamento no plano transformado. Faça um traçado rigoroso das linhas de corrente divisórias.

Problema 4.2.3 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular no referencial $\zeta = \xi + i\eta$, tal como ilustrado na figura 4.26. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado na origem do referencial $\zeta = 0 + i0$. O escoamento de aproximação uniforme está alinhado com o eixo real ξ e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

Considere a transformação conforme aplicada ao escoamento no domínio ζ definida por

$$z = \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^{1/2}$$

- Determine a forma do corpo no plano transformado z .
- Determine a localização do(s) ponto(s) de estagnação no plano transformado.
- Determine a(s) equação(ões) que define(m) a(s) linha(s) de corrente divisória(s) no plano transformado.
- Desenhe qualitativamente o escoamento no plano transformado. Faça um traçado rigoroso das linhas de corrente divisórias.

Problema 4.2.4 — Considere o escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular no referencial $\zeta = \xi + i\eta$, tal como ilustrado na figura 4.29. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado na origem do referencial $\zeta = 0 + i0$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo $\alpha = 10^\circ$ com o eixo real ξ e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

Considere a transformação conforme aplicada ao escoamento no domínio ζ referido acima definida por

$$z = \zeta - \frac{1}{\zeta}.$$

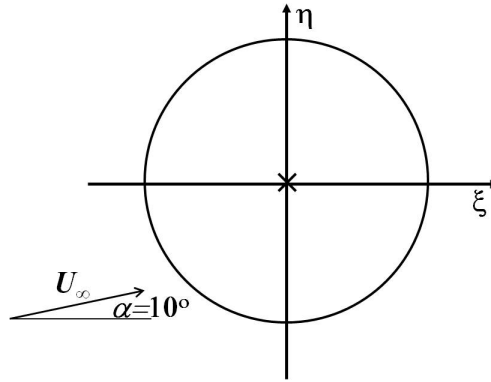


Figure 4.12: Escoamento permanente, incompressível, potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular no referencial $\zeta = \xi + i \eta$. O cilindro de raio $a = 1\text{m}$ está centrado na origem do referencial $\zeta = 0 + i 0$. O escoamento de aproximação uniforme faz um ângulo $\alpha = 10^\circ$ com o eixo real ξ e tem uma velocidade com módulo U_∞ .

- Determine a forma do corpo no plano transformado z .
- Determine a localização do(s) ponto(s) de estagnação no plano transformado.
- Determine o(s) ponto(s) do eixo imaginário do plano transformado para o(s) qual(is) o módulo do vector velocidade é igual a $1,1U_\infty$.
- Represente qualitativamente as linhas de corrente do escoamento no plano transformado. Faça um traçado rigoroso das linhas de corrente divisórias.

Problema 4.2.5 — The complex potential of a steady, incompressible, potential, two-dimensional flow is given by

$$W(z) = U_\infty \left(z^{4/3} + \frac{1}{z^{4/3}} \right) \text{ com } z = x + i y = \rho e^{i\gamma} \wedge \rho \geq 1 .$$

- Determine the stagnation point(s).
- Determine the dividing streamline(s) and sketch the flow.
- Determine (if they exist) the intersection of the streamlines that contains the point $P = -1 + i \sqrt{3} = 2e^{i 2\pi/3}$ with the real x and imaginary y axis.
- Determine the minimum pressure coefficient for $\rho = 1$ and its location ($U_{\text{ref}} = U_\infty$).

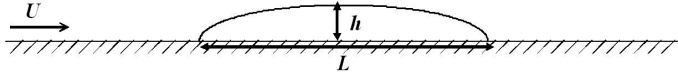


Figure 4.13: Escoamento sobre um hangar de forma semi-elptica com $L = 8h$.

Problema 4.2.6 — Um hangar tem uma secção com forma semi-elíptica de largura L oito vezes maior que a altura h ($L = 8h$), tal como ilustrado na figura 4.32. O escoamento de aproximação uniforme é horizontal e tem velocidade com módulo igual a U . Admita em primeira aproximação que pode simular o escoamento assumindo fluido perfeito e que o escoamento é permanente, incompressível, potencial e bidimensional.

- Escreva o potencial complexo e a transformação conforme caso seja necessária que definem o escoamento. Indique claramente o(s) sistema de eixos que utilizou (plano de partida e plano de chegada se utilizar uma transformação conforme).
- Determine a distância mínima ao hangar da linha de corrente que tem a assíntota horizontal à distância h do chão.
- Determine o caudal Q que se escoia entre essa linha de corrente e o hangar.
- Determine o coeficiente de pressão C_p máximo e mínimo e a sua localização. As condições de referência para a pressão estática e dinâmica são os valores obtidos em infinito (escoamento uniforme).

Problema 4.2.7 — A figura 4.33 apresenta dois escoamentos permanentes, incompressíveis, potenciais e bi-dimensionais. O escoamento no plano z é obtido a partir da aplicação de uma transformação conforme ao escoamento em torno de um cilindro circular de raio $R = 1$ no plano ζ . No plano ζ , o escoamento de aproximação está alinhado com o eixo real e tem uma velocidade com módulo U_∞ . As linhas de corrente representadas nos dois planos correspondem ao mesmo valor de ψ .

- Admita as seguintes transformações conforme:

$$1) z = \zeta^{1/2} + \frac{a}{\zeta^{1/2}}.$$

$$2) z = \left(\zeta + \frac{a}{\zeta} \right)^{1/2}.$$

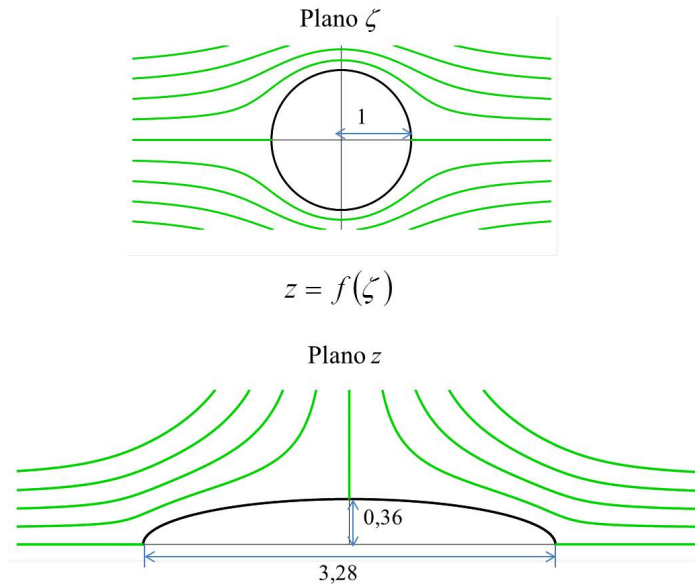


Figure 4.14: Escoamentos permanentes, incompressíveis, potenciais e bi-dimensionais. Escoamento do plano z é obtido através de uma transformação conforme do escoamento no plano ζ . As linhas de corrente representadas nos dois planos correspondem ao mesmo valor de ψ .

em que a é uma constante real. Qual das transformações dadas corresponde à função $z = f(\zeta)$ representada na figura 4.33? Justifique a sua resposta.

- b) Determine o valor da constante a .
- c) Qual dos dois escoamentos apresenta o menor coeficiente de pressão (utilizando os mesmos valores de p_{ref} e de $1/2\rho U^2$ para os dois planos) na superfície do corpo (circunferência e elipse)?
- d) Determine o coeficiente de pressão C_p ao longo do eixo horizontal (x) do plano z utilizando como condições de referência as condições do escoamento de aproximação do plano ζ . Para que valor tende C_p quando $x \rightarrow \infty$?