



Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

2º Teste — Versão A

(CURSO: LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEEC, MEQ)

19 de Dezembro de 2015, 11h

Duração: 1h 30m

1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^3}; \quad y(1) = 1$$

indicando o intervalo máximo de definição.

(1,0 val.)

- (b) Determine a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t$$

Indique uma condição inicial, da forma $y(0) = y_0$, para a qual a solução do problema de valor inicial explode.

Resolução:

- (a) Trata-se de uma equação linear. O factor integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = t$$

Assim

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^3} \Leftrightarrow (ty)' = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{C}{t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Sendo $y(1) = 1$, conclui-se que $C = 2$ e assim a solução do (PVI) é

$$y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}.$$

O intervalo máximo de existência de solução é $I_{\max} =]0, \infty[$ — o maior intervalo contido no domínio de y' que contém $t_0 = 1$.

- (b) Começamos por observar que $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação. No caso geral, trata-se de uma equação separável. Assim

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y(1+y)} dy = \int 2t dt \\ &\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int 2t dt \\ &\Leftrightarrow \log \left| \frac{y}{y+1} \right| = t^2 + c \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução geral da equação é:

(i)

$$y(t) = \frac{e^{t^2} k}{1 - e^{t^2} k}$$

se para todo $t \in \mathbb{R}$ se tem que $y(t) \neq 0$ e $y(t) \neq -1$;

(ii) $y(t) \equiv 0$ se para algum $t \in \mathbb{R}$ se tem que $y(t) = 0$;

(iii) $y(t) \equiv -1$ se para algum $t \in \mathbb{R}$ se tem que $y(t) = -1$.

Teremos agora que indicar $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, para o qual a solução do (PVI)

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t, \quad y(t_0) = y_0$$

tenha um blow-up. Dado que as soluções constantes não explodem podemos concluir de imediato que $y_0 \neq 0$ e $y_0 \neq -1$. A solução dada por $\frac{e^{t^2} k}{1 - e^{t^2} k}$ explode se para algum valor de t e de k a expressão $1 - e^{t^2} k$ se anula. Teremos então que k terá de ser positivo (ou seja se $k \leq 0$ a solução do (PVI) não explode). Para qualquer valor de $k > 0$ a solução explode em $t = \pm \sqrt{\log(\frac{1}{k})}$. Se escolhermos $k = 1$ a solução explode em $t = 0$. Para determinar a condição inicial basta escolher qualquer $t_0 \neq 0$ e $y_0 = \frac{e^{t_0^2}}{1 - e^{t_0^2}}$. Por exemplo, se $t_0 = 1$ ter-se-á $y_0 = \frac{e}{1 - e}$.

2. Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine e^{At} , e resolva o problema $Y' = AY$, $Y(0) = (1, -1)$.

(b) Determine uma solução particular da equação $Y' = AY + B(t)$ em que $B(t) = (0, e^{-t})$.

Resolução:

(a) A matriz A é triangular pelo que os seus valores próprios são -1 e 2 . Podemos desde já concluir que A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz não singular, S , tal que

$$A = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

As colunas de S são os vectores próprios associados a -1 e 2 respectivamente. Assim, a primeira coluna de S será uma solução de

$$(A + I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -3v_1 + 3v_2 = 0$$

Por outro lado, a segunda coluna de S será uma solução de

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então (por exemplo)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$



A solução de $Y' = AY$, $Y(0) = (1, -1)$ é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

(b) Uma solução particular de $Y' = AY + B(t)$ será dada por (usando a fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} Y_P(t) &= e^{At} \int^t e^{-As} B(s) ds = e^{At} \int^t \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ e^s - e^{-2s} & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \int^s e^{-3s} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{-e^{-3t}}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \end{aligned}$$

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - 7y' + 6y = h(t) .$$

- (a) Considerando $h(t) \equiv 0$, determine a solução geral da equação. Indique, justificando, a forma das soluções limitadas em $[0, \infty[$. Existem soluções limitadas em \mathbb{R} ?
- (b) Determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, escolhendo para $h(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções:

$$h(t) = 20\delta(t - 2) \quad \text{ou} \quad h(t) = 16e^t$$

onde $\delta(t - 2)$ representa a distribuição delta de Dirac centrada em 2.

Resolução:

(a) Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^3 - 7D + 6)y = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico é

$$P(R) = R^3 - 7R + 6 = (R - 1)(R - 2)(R + 3)$$

Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = ae^t + be^{2t} + ce^{-3t} \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

A forma das soluções limitadas em \mathbb{R}^+ é ce^{-3t} ou seja as soluções correspondentes a $a = b = 0$. A única solução limitada em \mathbb{R} é a solução nula.

(b1) Sendo $h(t) = 20\delta(t - 2)$, vamos usar a transformada de Laplace para resolver o (PVI). Assim,

$$\begin{aligned} y''' - 7y' + 6y &= 20\delta(t - 2) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''' - 7y' + 6y\}(s) &= \mathcal{L}\{20\delta(t - 2)\}(s) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y'''\}(s) - 7\mathcal{L}\{y'\}(s) + 6\mathcal{L}\{y\}(s) &= 20e^{-2s} \\ \Leftrightarrow s^3\mathcal{L}\{y\}(s) - 7s^2\mathcal{L}\{y\}(s) + 6\mathcal{L}\{y\}(s) &= 20e^{-2s} \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{20e^{-2s}}{s^3 - 7s + 6} = \frac{20e^{-2s}}{(s - 1)(s - 2)(s + 3)} \end{aligned}$$

Visto

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - 1)(s - 2)(s + 3)} &= \mathcal{L} \left\{ \text{Res}_{s=1} \frac{e^{st}}{(s - 1)(s - 2)(s + 3)} + \text{Res}_{s=2} \frac{e^{st}}{(s - 1)(s - 2)(s + 3)} \right. \\ &\quad \left. + \text{Res}_{s=-3} \frac{e^{st}}{(s - 1)(s - 2)(s + 3)} \right\} \\ &= \mathcal{L} \left\{ -\frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{5} + \frac{e^{-3t}}{20} \right\} \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{20e^{-2s}}{s^3 - 7s + 6} = \frac{20e^{-2s}}{(s - 1)(s - 2)(s + 3)} \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\}(s) &= e^{-2s} \mathcal{L}\{-5e^t + 4e^{2t} + e^{-3t}\}(s) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\}(s) &= \mathcal{L}\{H(t - 2)(-5e^{t-2} + 4e^{2(t-2)} + e^{-3(t-2)})\}(s) \end{aligned}$$

onde $H(t - 2)$ representa a função de Heaviside centrada em 2. Conclui-se que a solução do (PVI) é

$$H(t - 2) \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ -5e^{t-2} + 4e^{2(t-2)} + e^{-3(t-2)} & \text{se } t \geq 2 \end{cases} .$$

(b1) Sendo $h(t) = 16e^t$ vamos também usar a transformada de Laplace para resolver o (PVI). Assim,

$$\begin{aligned} y''' - 7y' + 6y &= 16e^t \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''' - 7y' + 6y\}(s) &= \mathcal{L}\{16e^t\}(s) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y'''\}(s) - 7\mathcal{L}\{y'\}(s) + 6\mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{16}{s - 1} \\ \Leftrightarrow s^3\mathcal{L}\{y\}(s) - 7s\mathcal{L}\{y\}(s) + 6\mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{16}{s - 1} \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{16}{(s - 1)(s^3 - 7s + 6)} = \frac{16}{(s - 1)^2(s - 2)(s + 3)} \end{aligned}$$



Conclui-se que a solução do (PVI) é

$$\begin{aligned}y(t) &= \operatorname{Res}_{s=1} \frac{16}{(s-1)^2(s-2)(s+3)} + \operatorname{Res}_{s=2} \frac{16}{(s-1)^2(s-2)(s+3)} + \operatorname{Res}_{s=-3} \frac{16}{(s-1)^2(s-2)(s+3)} \\ &= -3e^t - 4te^t + \frac{16}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}.\end{aligned}$$

4. Considere a função f definida no intervalo $[-4, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}.$$

Calcule a sua série de Fourier e indique a soma da série no intervalo $[-4, 4]$.

Resolução:

Sendo $L = 4$, a série de Fourier é da forma

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{4} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} \right)$$

Os coeficientes da série são dados por (observe que f é uma função par)

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 -2 dx = -2$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{1}{2} \int_2^4 -2 \cos \frac{n\pi x}{4} dx = -\frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} \Big|_2^4 = \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Sendo f uma função par, tem-se que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} dx = 0.$$

Conclui-se que a série de Fourier associada a f é

$$SF_f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{4}$$

Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que

$$SF_f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -4 \leq x < -2 \\ -1 & \text{se } x = -2 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 2 \\ -1 & \text{se } x = 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

5. Considere o problema de valor inicial com condições de Dirichlet homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x & , \quad t > 0 , 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = 0 , u(t, \pi) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(0, x) = -x^3 + \pi^2 x + \sum_{n=1}^5 \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Determine uma solução estacionária, isto é da forma $u(t, x) = v(x)$, da equação diferencial que verifique $v(0) = 0$ e $v(\pi) = 0$.
 (b) Determine uma solução de (1)

Resolução:

- (a) Queremos determinar uma solução estacionária do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x & , \quad t > 0 , 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = 0 , u(t, \pi) = 0 & , \quad t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo $u(t, x)$ por $v(x)$ na equação diferencial, obtém-se:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow v''(x) = -6x$$

Primitivando duas vezes, resulta então que:

$$v(x) = -x^3 + ax + b \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Como $v(0) = v(\pi) = 0$, então $b = 0$ e $-\pi^3 + a\pi = 0 \Rightarrow a = \pi^2$. Assim:

$$v(x) = -x^3 + \pi^2 x$$

- (b) Note que devido à presença do termo $6x$ a equação diferencial **não é homogênea**. Vamos, por isso, procurar soluções do problema (1) da forma

$$u(t, x) = w(t, x) + v(x)$$

onde $v(x)$ é a solução estacionária determinada em (a) (que é uma solução particular de (2)). Tendo em conta que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x \Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{v''(x) + 6x}_{=0} \Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

e usando as condições fronteira e iniciais para u e v , então w é a solução do problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & , \quad t > 0 , 0 < x < \pi \\ w(t, 0) = 0 , w(t, \pi) = 0 & , \quad t > 0 \\ w(0, x) = \sum_{n=1}^5 \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad (3)$$

Para obter uma solução formal do problema de Dirichlet prolonga-se w a uma função ímpar. Para cada $t \geq 0$ a série de Fourier de w é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}(nx).$$

Substituindo em (3), vem para cada $n \geq 0$

$$b'_n(t) = -n^2 b_n(t).$$

Portanto $b_n(t) = B_n e^{-n^2 t}$ e

$$-x^3 + \pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)$$

é uma solução formal da equação (1) que verifica as condições de Dirichlet. Utilizando a condição inicial do problema (2),

$$w(0, x) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen}((2k+1)x),$$

resulta que:

$$\begin{aligned} B_{2k+1} &= \frac{1}{2k+1} & \text{para } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B_n &= 0 & \text{para } n \notin \{3, 5, 7, 9, 11\} \end{aligned}$$

Assim sendo, a solução de (1) é:

$$-x^3 + \pi^2 x + \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t} \operatorname{sen}((2k+1)x)$$

6. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , limitada em \mathbb{R} . Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y\varphi(t+y) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \quad (4)$$

em que α é uma constante real positiva. Mostre que o problema tem solução única e que o seu intervalo máximo de existência é \mathbb{R} . Se adicionalmente se tiver que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r)$ existe e é positivo, calcule justificando o $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, onde y representa a solução do problema.

Resolução:

Seja $f(t, y) = -y\varphi(t+y)$; esta função está definida e é de classe C^1 em \mathbb{R} , o que implica que é lipschitziana (e contínua) em \mathbb{R} . Pelo teorema de Picard, o problema de valor inicial (4) tem solução única, de classe C^1 , definida num intervalo da forma $]a, b[$, com $a < 0 < b$. Pelo teorema de extensão de solução — e dado que a fronteira do domínio de f é o conjunto vazio — ou $b = +\infty$ (respectivamente, $a = -\infty$), ou a solução, $y(t)$, explode quando $t \rightarrow b^-$ e $b < +\infty$ (respectivamente, $t \rightarrow a^+$ e $a > -\infty$).

Note que $x(t) \equiv 0$ é solução da equação diferencial pelo que, por unicidade de solução, o gráfico da solução $y(t)$ não pode intersectar o eixo $y = 0$. Como $y(0) = \alpha > 0$, então $y(t) > 0$ para qualquer $t \in]a, b[$. Temos também que

$$\frac{y'}{y} = -\varphi(t + y).$$

Como $y(t) > 0$, então

$$\frac{d}{dt} (\log y(t)) = -\varphi(t + y),$$

pelo que (e tendo em conta que $\log y(0) = \log \alpha$) $y(t)$ satisfaz a equação integral:

$$\log y(t) = \log \alpha + \int_0^t -\varphi(s + y(s)) ds$$

então, para qualquer $t \in]a, b[$:

$$|\log y(t) - \log \alpha| \leq \int_0^t \underbrace{|\varphi(s + y(s))|}_{\leq M} |ds| \leq M \int_0^t |ds| = M|t|$$

Isto mostra que $y(t)$ não explode em tempo finito em ambos os extremos do seu intervalo máximo de solução; concluímos então que $y(t)$ está definida (e é de classe C^1) em \mathbb{R} .

Determinemos agora o $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$. Como sabemos que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = L > 0$, então pela definição de limite existe $R \in \mathbb{R}$ tal que se $r > R$ então $\varphi(r) > \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{2} > 0$. Consideramos agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y\varphi(t + y) \\ y(R) = y_R \end{cases} \quad (5)$$

onde y_1 é o valor da solução de (4) em $t = R$. Por unicidade de solução, as soluções de (4) e (5) são idênticas (e iguais à função $y(t)$). Como anteriormente, o problema (5) é equivalente à equação integral

$$\log y(t) = \log y_R + \int_R^t -\varphi(s + y(s)) ds,$$

pelo que, para qualquer $t \geq R$:

$$\log y(t) = \log y_R + \int_R^t \underbrace{-\varphi(s + y(s))}_{< -\beta} ds < \log y_R - \beta \int_R^t ds = \log y_R - \beta(t - R)$$

Resulta assim que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \log y(t) = -\infty$, o que implica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.