

## Regras básicas

- 1) Os alunos devem chegar ao laboratório com cópia impressa do relatório, já tendo lido o guia e o relatório e percebido o objectivo e o conceito da medição. No início da aula terá lugar uma breve demonstração da parte mais prática da experiência (utilização da aparelhagem e do material).
- 2) Caso seja patente que os alunos não prepararam o trabalho de acordo com os requisitos do item anterior o docente decidirá se os alunos poderão ou não realizar as tarefas.
- 3) A falta de indicação da unidade de medida numa quantidade física mencionada no relatório será considerada como erro grave na avaliação.
- 4) O nível de clareza, ordem e síntese na apresentação de resultados, comentários e conclusões será também um critério usado na avaliação.
- 5) Quando no relatório for pedida a apresentação dum resultado com erro experimental, é importante que o número de algarismos significativos do valor central e do erro sejam consistentes. O erro deve ser indicado com no máximo dois algarismos significativos (obrigatoriamente dois se o primeiro algarismo for 1 e preferencialmente dois se o primeiro algarismo for 2) e o valor central não deve incluir algarismos menos significativos daqueles do erro. Na representação exponencial, erro e valor central devem ter o mesmo factor exponencial. Exemplos:

$$v = (121.3 \pm 3.3) \text{ m/s} \rightarrow \text{OK}$$

$$v = (121 \pm 3) \text{ m/s} \rightarrow \text{OK}$$

$$v = (1.21 \pm 0.03) \cdot 10^2 \text{ m/s} \rightarrow \text{OK}$$

$$v = (121.3 \pm 3) \text{ m/s} \rightarrow \text{errado}$$

$$v = (121.32 \pm 3.34) \text{ m/s} \rightarrow \text{errado}$$

$$v = 1.21 \cdot 10^2 \text{ m/s} \pm 3 \text{ m/s} \rightarrow \text{muito errado}$$

$$v = 121.32 \text{ m/s} \pm 2248.32 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \rightarrow \text{monstruoso}$$

# Mecânica e Ondas

## Trabalho de Laboratório

### Medição da aceleração da gravidade com a Roda de Maxwell

#### Objectivo

Medição da aceleração da gravidade através do estudo do movimento da roda de Maxwell.

#### 1. Introdução

O sistema a estudar está ilustrado nas fotos da figura 1 e consiste numa roda suspensa



Figure 1: Foto da montagem a utilizar

por dois fios enrolados e que ao ser largada irá cair desenrolando os fios do seu eixo. No fundo esta montagem ilustra o princípio de operação do bem conhecido brinquedo infantil “iô-iô”. A roda está inicialmente travada por uma ponta metálica que ao soltar a roda irá accionar um cronómetro para medir o tempo de queda. No fim do percurso a roda cortará o feixe luminoso do sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) que fará parar a contagem do tempo. Este sistema Lb pode também medir a velocidade “instantânea” da roda ao cortar o feixe luminoso.

Alterando a posição do sistema Lb podemos medir o tempo que a roda demora a cair uma determinada distância e a velocidade que esta atinge nessa posição.

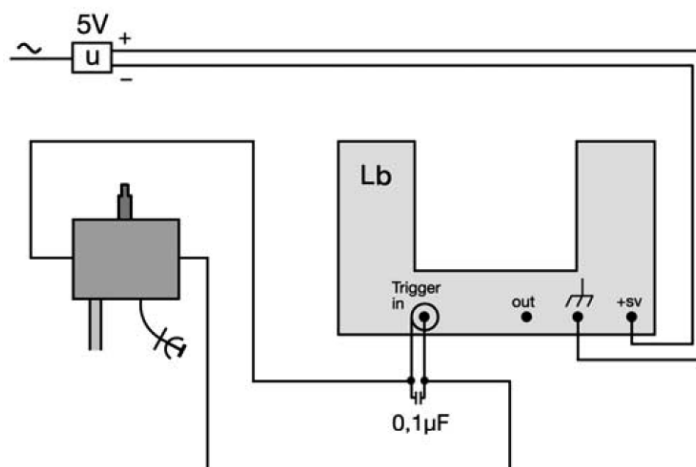


Figura 2: Esquema da ligação do sistema cronómetro/célula fotoelétrica (Lb)

### 1.1 Transferência de energia e aceleração na queda

A energia total  $E$  do disco de Maxwell pode ser expressa como a soma da energia potencial ( $E_p$ ), energia cinética de translação ( $E_T$ ) e energia cinética de rotação ( $E_r$ ). Se o disco tiver a massa  $m$  e o momento de inércia  $I_z$  no seu eixo de rotação, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$E = E_p + E_T + E_r = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} + \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \frac{I_z}{2} \vec{\omega}^2 \quad (1)$$

onde  $\vec{\omega}$  representa a velocidade angular,  $\vec{v}$  é a velocidade de translação,  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade e  $\vec{s}$  é a altura (negativa).

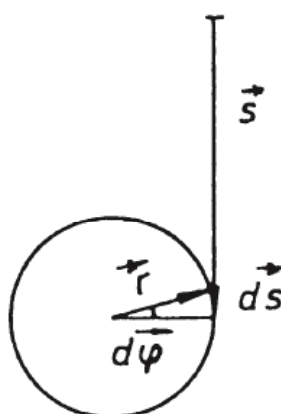


Figura 3: Representação da secção do eixo onde estão enrolados os fios de suspensão da roda de Maxwell, para ilustrar a relação entre a variação angular  $d\vec{\varphi}$  e a diminuição da altura  $d\vec{s}$ .

Como a relação entre a variação do ângulo  $\vec{\varphi}$  e a altura da roda é dado pelo raio  $\vec{r}$  do eixo da roda de Maxwell onde os fios estão enrolados (ver Figura 3)

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \quad (2)$$

e

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3)$$

Neste caso  $\vec{g}$  é paralelo a  $\vec{s}$  e  $\vec{\omega}$  é perpendicular a  $\vec{r}$ , e portanto o produto interno  $\vec{g} \cdot \vec{s}$  e o módulo do produto externo  $|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$  (eq. 3) podem escrever-se da forma

$$\begin{aligned} \vec{g} \cdot \vec{s} &= -g s \\ |\vec{v}| &= \omega r \end{aligned} \quad (4)$$

A energia total do sistema definida em (1) toma a forma

$$E = -m g s(t) + \frac{1}{2} \left( m + I_z / r^2 \right) (v(t))^2. \quad (5)$$

Como de acordo com o “*princípio da conservação da energia*” a energia total E é constante ao longo do tempo, a sua derivada em ordem ao tempo tem de ser nula:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = -m g \frac{ds(t)}{dt} + \left( m + I_z / r^2 \right) v(t) \frac{dv(t)}{dt}. \quad (6a)$$

ou seja

$$0 = -m g \frac{ds(t)}{dt} + \left( m + I_z / r^2 \right) \frac{ds(t)}{dt} \frac{d^2s(t)}{dt^2} \quad (6b)$$

A equação do movimento  $s(t)$  pode ser obtida da eq. (6b). Para tal basta pensar que para satisfazer a eq. (6b)  $s(t)$  tem de se escrever da forma  $s(t) = at^2 + bt + c$ . Sabendo que as condições  $t=0$  são  $s(0) = 0$  e  $v(0) = 0$ , obtemos

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 \quad (7)$$

e

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = a t, \quad (8)$$

com

$$a = g / K, \quad (9)$$

e

$$K = 1 + \frac{I_z}{m r^2}. \quad (10)$$

Lembramos que  $m$  é a massa da roda de Maxwell e  $r$  o raio do eixo onde estão enrolados os fios, muito menor do raio  $R$  da roda. Segundo as equações (7) e (8), a queda da roda de Maxwell é um movimento uniformemente acelerado. Na realidade, sendo a aceleração  $a$  muito menor do que a aceleração da gravidade  $g$

( $I_z = \mathcal{O}(mR^2) \gg mr^2$ ), é muito mais fácil estudar a queda da roda de Maxwell que a queda livre de um corpo, centenas de vezes mais rápida ( $K \approx 400$  no nosso caso). A aceleração gravítica  $g$  pode ser medida com o método que a seguir se descreve.

### 1.1.1 Determinação da aceleração $a$

As equações (7) e (8) podem ser utilizadas para determinar a aceleração  $a$  da roda com uma medição do tempo  $t$  de queda o/ou da velocidade  $v$  de queda por uma dada distância de queda  $s$ .

Até aqui assumimos que a espessura dos fios é desprezável. Mais geralmente, indicando com  $d$  a espessura (= diâmetro da secção) dos fios, a segunda das equações (4) escreve-se mais propriamente como

$$|\vec{v}| = \omega (r + d/2) \quad (11)$$

e as equações sucessivas (5-10) devem ser modificadas com a substituição

$$r \rightarrow r' = r + d/2. \quad (12)$$

### 1.1.2 Determinação do factor $K = g/a$

O factor  $K$  da equação (10) depende do momento de inércia  $I_z$  do sistema em rotação. Segundo o esquema aproximado da Figura 6, podemos escrever  $I_z$  como função dos raios interno ( $R_i$ ) e externo ( $R$ ) da roda, do raio  $r$  do eixo e das massas  $m$  e  $m_e$  da roda e do eixo:

$$I_z = \frac{1}{2} m (R^2 + R_i^2) + \frac{1}{2} m_e r^2. \quad (13)$$

Nesta modelização considerámos desprezável a massa da estrutura de ligação entre roda e eixo. Podemos então escrever  $K$  como

$$K = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 + R_i^2}{r'^2} + \frac{m_e}{m} \frac{r^2}{r'^2} \right). \quad (14)$$

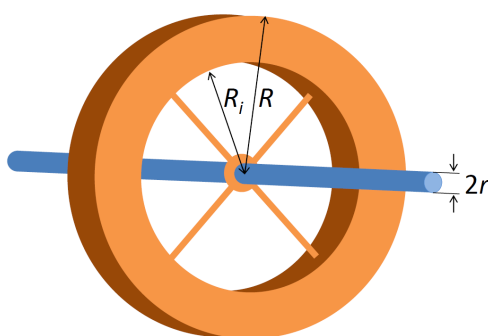


Figura 6: Modelo da roda para o cálculo do momento de inércia.

Utilizando as relações

$$\frac{R^2 + R_i^2}{r'^2} \gg 1, \quad \frac{m_e}{m} \frac{r^2}{r'^2} \ll 1 \quad (15)$$

chegamos enfim à expressão que iremos utilizar na medição:

$$K \approx \frac{R^2 + R_i^2}{2r'^2}. \quad (16)$$

### ***1.1.2 Determinação de g***

Das anteriores determinações de  $a$  e  $K$  obtemos a medida da aceleração da gravidade  $g = K a$ .

## 2. Trabalho experimental

- 1) Para o trabalho experimental convém verificar a seguinte lista de material:
  1. Uma roda de Maxwell
  2. Uma barra com escala graduada e cursores
  3. Ponta de travamento com disparo
  4. Um condensador de  $0.1 \mu\text{F}$
  5. Sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb)
  6. Régua graduada e/ou nónio
- 2) Usando o parafuso de ajuste na barra de sustentação da roda de Maxwell, deve certificar-se que o eixo da roda está perfeitamente na horizontal, para que ao rodar a roda no sentido ascendente os fios enrolem de fora para dentro. A densidade dos fios enrolados deve ser igual em ambos os lados. Este alinhamento é crítico, pois caso não esteja bem afinado existe uma forte tendência da roda para se soltar, partindo os fios e muito possivelmente danificando a montagem.
- 3) A ponta de travamento, ou seja a ponta metálica que é introduzida num dos buracos existentes na parte exterior da roda, é utilizada para soltar mecanicamente a roda de Maxwell e activar o contador do sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb) aquando das medições de distancia versus tempo. A ponta de travamento deve ser ajustada por forma que a roda não oscile ou role a seguir a ser solta. Sendo assim, os fios devem desenrolar sempre no mesmo sentido quando a roda é largada.
- 4) Verificar que o sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb) se encontra bem posicionado por forma que a roda de Maxwell ao descer passe com um dos lados do seu eixo no meio do garfo cortando o feixe de luz.
- 5) A barra com escala graduada e cursores deve estar posicionada o mais próximo do percurso da roda mas sem que os seus cursores estejam no caminho desta.

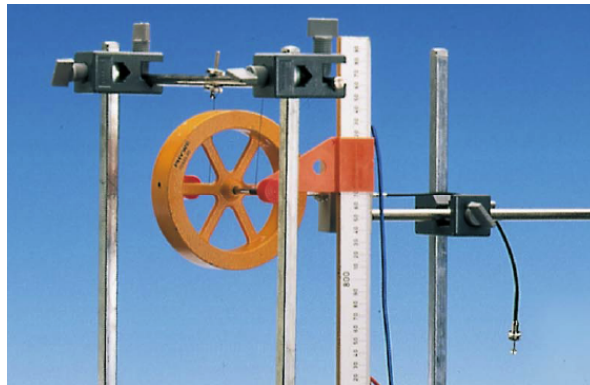


Figura 9: Foto do enrolamento no eixo da roda de Maxwell

### 2.1 Determinação da constante $K$

Use a régua graduada e/ou o nónio para medir os raios interno e externo,  $R_i$  e  $R$ , da roda, o raio  $r$  do eixo e a espessura  $d$  do fio. Verifique a calibração (zero) do nónio. Tenha em atenção que os erros de leitura (metade da menor divisão da escala) são só uma parte, provavelmente pequena, da incerteza associada a estas medições. Leve em conta erros de alinhamento do instrumento com o objecto e também o facto que o fio

é comprimível. Estime incertezas razoáveis, por exemplo repetindo as medições mais vezes. Calcule  $K$  usando a equação (16):

$$K \approx \frac{R^2 + R_i^2}{2(r + \frac{1}{2}d)^2}. \quad (17)$$

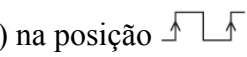
O erro experimental na medida de  $K$  é dominado pelas incertezas  $\Delta r$  e  $\Delta d$  nas medidas das quantidades mais pequenas,  $r$  e  $d$ . Desprezando, em comparação, os erros nas medidas de  $R_i$ ,  $R$ , do cálculo da propagação dos erros obtemos que o erro no valor de  $K$  é

$$\Delta K = 2K \frac{\sqrt{(\Delta r)^2 + \frac{1}{4}(\Delta d)^2}}{r + \frac{1}{2}d}. \quad (18)$$

## 2.2 Determinação da aceleração $a$ da roda

### 2.2.1 Primeiro método: medição do tempo de queda


Efectue a medição do tempo de queda para um conjunto de 10 posições (por exemplo de 3 em 3 cm):

- 1) Ligue a ponta de travamento ao sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb) tal como está esquematizado na Figura 2.
- 2) Pressione o botão de disparo (que faz soltar a roda) e bloqueie-o nessa posição.
- 3) Posicione o selector de tipo de funcionamento do sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb) na posição .
- 4) Pressione o botão de “set” no sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb)
- 5) Solte o botão de disparo e a ponta largará a roda que deverá começar a mover-se.
- 6) Depois de a ponta de travamento ter saído completamente da roda, o botão de disparo deve ser **pressionado novamente e bloqueado antes que o feixe de luz seja interrompido**.
- 7) O cronómetro é parado assim que o eixo da roda interrompa o feixe de luz da célula fotoelétrica.
- 8) A medição da distância percorrida é efectuada através da barra com escala posicionando um cursor no início, ao nível do eixo da roda onde ela é largada, e o outro cursor no fim, ou seja, ao nível do feixe do sistema cronómetro/célula fotoelétrica (Lb). Tenha em atenção que para além do erro de leitura, que nunca será inferior a metade da menor divisão da escala, pode estar a introduzir nas medições um erro devido à paralaxe no posicionamento dos cursores.
- 9) Por cada ponto experimental calcule um valor da aceleração  $a$  da roda de Maxwell, usando a equação (7):  $a = 2s/t^2$ . O valor central da medição final de  $a$  será a média dos 10 valores obtidos. Da distribuição destes valores obtenha uma estima aproximada do erro da medição:  $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/2$ .



### 2.2.2 Segundo método: medição da velocidade de queda

Efectue a medição do tempo de passagem do eixo na queda para o mesmo conjunto de posições do ponto anterior:

- 1) Desligue o sinal de “Trigger In” no sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb) (Ver Figura 2).
- 2) Coloque a roda na sua posição usando a ponta metálica de travamento.
- 3) Posicione agora o selector de tipo de funcionamento do sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb) na posição 
- 4) Pressione o Botão de “set” no sistema de cronómetro/célula fotoelétrica (Lb)
- 5) Solte o botão de disparo e a ponta largará a roda que deverá começar a mover-se.
- 6) O cronómetro só é accionado e logo parado quando o eixo da roda passa pelo feixe luminoso que incide na célula fotoelétrica. O valor obtido  $t^*$  é o tempo que o eixo da roda demora a passar totalmente pelo feixe luminoso.
- 7) A velocidade de translação ao tempo  $t$  (o mesmo  $t$  obtido nas medições do ponto anterior) é determinada como

$$v(t) = \frac{2r}{t^*},$$

onde  $2r$  é a espessura do eixo da roda, medida anteriormente.

- 8) Por cada ponto experimental calcule um valor da aceleração  $a$  da roda de Maxwell, usando a equação (8):  $a = v/t$ . O valor central da medição final de  $a$  será a média dos 10 valores obtidos. Da distribuição destes valores obtenha uma estima aproximada do erro da medição:  $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/2$ .

### 2.3 Determinação da aceleração da gravidade $g$

Por cada conjunto de dados experimentais (dois métodos) determine o valor da aceleração da gravidade com o seu erro experimental:

$$g = K a, \quad \Delta g = g \sqrt{\left(\frac{\Delta K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2}. \quad (19)$$

#### Bibliografia

- An introduction to error analysis: the study of uncertainties in physical measurements, J. R. Taylor, Second Edition, University Science Books, 1997.
- [Tratamento e Apresentação de Dados Experimentais](#), M. R. da Silva, DF, IST, 2003.
- Introdução à Física, J. Dias de Deus, M. Pimenta, A. Noronha, T. Peña, P. Brogueira, McGraw-Hill (1992).
- The Art of Experimental Physics, D. Preston, E. Dietz, John Wiley, New York, 1991.

## Mecânica e Ondas

### Relatório

(destaque para entregar no fim da aula ao docente)

### Medição da aceleração gravítica com a Roda de Maxwell

Nº	Nome	Curso

Data	Turno	Grupo

#### 1. Objectivo deste trabalho:

#### 2 Determinação da constante $K = g/a$

$$R = ( \quad \pm \quad ) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$R_i = ( \quad \pm \quad ) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$r = ( \quad \pm \quad ) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = ( \quad \pm \quad ) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$K = ( \quad \pm \quad ) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

### 3 Medição de tempos de queda e primeira determinação de $g$

Medição nº	tempo $t$ [ ]	distância $s$ [ ]	$a = 2s/t^2$ [ ]
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

$$\Delta s = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta t = \underline{\hspace{2cm}}$$

Resultados:

$$a = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) \underline{\hspace{2cm}}$$

Observações:

#### 4 Medição de velocidades de queda e segunda determinação de $g$

Medição nº	tempo $t$ [ ] medido anteriormente	tempo $t^*$ [ ]	velocidade $v$ [ ]	$a = v/t$ [ ]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

$$\Delta t^* = \underline{\hspace{2cm}}$$

Resultados:

$$a = (\underline{\hspace{1cm}} \pm \underline{\hspace{1cm}}) \underline{\hspace{1cm}}$$

$$g = (\underline{\hspace{1cm}} \pm \underline{\hspace{1cm}}) \underline{\hspace{1cm}}$$

Observações:

