



# **Propagação de ondas eletromagnéticas em materiais não-hermitianos**

**Rodrigo Nuno Diógenes Moreira da Silva**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

## **Engenharia Eletrotécnica e de Computadores**

Orientadores: Prof. Mário Gonçalo Mestre Veríssimo Silveirinha  
Prof. Filipa Isabel Rodrigues Prudêncio

### **Júri**

Presidente: Prof. José Eduardo Charters Ribeiro da Cunha Sanguino  
Orientador: Prof. Mário Gonçalo Mestre Veríssimo Silveirinha  
Vogal: Prof. Tiago André Nogueira Morgado

**Novembro 2022**



## **Declaração**

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.

## **Declaration**

I declare that this document is an original work of my own authorship and that it fulfills all the requirements of the Code of Conduct and Good Practices of the Universidade de Lisboa.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais pela sua amizade, encorajamento e carinho ao longo de todos estes anos, por estarem sempre presentes para mim, mesmo no melhor e no pior e sem os quais este projeto não seria possível, e em particular, à minha mãe, pela pressão voluntária e involuntária, que até se tornou irrazoável, e ao meu pai, pela revisão literária. Gostaria também de agradecer à minha irmã e especialmente à minha namorada pela sua compreensão e apoio ao longo de todos estes anos.

Gostaria também de agradecer aos meus professores orientadores Prof. Mário Silveirinha e Prof<sup>a</sup>. Filipa Prudêncio pela sua supervisão, imensa paciência, apoio e partilha de conhecimentos que tornaram possível esta tese. No mesmo seguimento, gostaria também de agradecer ao Instituto de Telecomunicações.

Por último, mas não menos importante, a todos os meus amigos e colegas, que me ajudaram a crescer como pessoa e que sempre me apoiaram durante os bons e maus momentos da minha vida, mas especialmente aos meus grandes companheiros Filipe Almeida e Tiago Angélico Gonçalves por toda a ajuda, com assuntos académicos ou não, toda a paciência, tolerância e pachorra que depositaram em mim, e, sem perda de generalidade, pelos anos de estudante fantásticos que me proporcionaram. Obrigado.

A todos e a cada um de vós, obrigado.

# Abstract

Metamaterials are materials which exotic properties allow electromagnetic waves to propagate in unnatural ways. In this sense, non-hermitian materials arise, which, not necessarily being composed of metamaterials, allow the absorption/amplification of the energy of the waves that pass through these media. Precisely because they present matrices of their constituent parameters that are non-hermitian, these materials allow situations that transcend the mere compensation of losses that would naturally be observed in any medium.

In this work, a theoretical model of a non-hermitian metamaterial is studied and developed, governed by the operating principle of a transistor, to build an implementation of the same, based on a system of transmission lines periodically charged by transistors. To this end, a few models are built, equivalent to each other, and several comparisons are made to confirm the validity of the respective models and analogies between them.

## Keywords

Metamaterial, Electromagnetic Waves, Non-Hermitian Materials, Transmission Line, Transistors, Wave Propagation

# Resumo

Os metamateriais são materiais cujas propriedades exóticas permitem a propagação de ondas eletromagnéticas de formas não naturais. Nesse sentido, surgem os materiais não-hermitianos que, não sendo necessariamente constituídos por metamateriais, permitem a absorção/amplificação da energia das ondas que por estes meios se atravessam. Exatamente por apresentarem matrizes dos seus parâmetros constituintes que são não-hermitianas, estes materiais permitem situações que transcendem a mera compensação das perdas que naturalmente se observariam em qualquer meio.

Neste trabalho, um modelo teórico de um metamaterial não-hermitiano, regido pelo princípio de funcionamento de um transistor, é estudado e desenvolvido, afim de se construir uma implementação do mesmo, baseada num sistema de linhas de transmissão carregado periodicamente por transistores. Para isso, são construídos alguns modelos, equivalentes entre e são estabelecidas várias comparações, de modo a confirmar a validade dos respetivos modelos e analogias entre eles.

## Palavras Chave

Metamaterial, Ondas Eletromagnéticas, Materiais Não-Hermitianos, Linha de Transmissão, Transistores, Propagação de Ondas

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão do estado da arte . . . . .	2
1.2	Motivação . . . . .	3
1.3	Objetivo . . . . .	4
1.4	Estrutura . . . . .	4
<b>2</b>	<b>MOSFET-metamaterial</b>	<b>6</b>
2.1	Conceito e modelo do sistema . . . . .	7
2.2	Modos suportados . . . . .	8
2.3	Caracterização do fluxo de energia . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Analogia com teoria das linhas de transmissão</b>	<b>23</b>
3.1	Definição das linhas de transmissão . . . . .	24
3.2	Concretização do modelo estudado . . . . .	28
3.2.1	Bloco-linha . . . . .	28
3.2.2	Bloco-MOSFET . . . . .	29
3.2.3	Bloco-MOSFET simplificado . . . . .	31
3.2.4	Matriz de transmissão global . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Validação do modelo estudado</b>	<b>33</b>
4.1	Solução do problema efetivo . . . . .	34
4.2	Comparação dos problemas e resposta em frequência . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>44</b>
5.1	Conclusões do trabalho . . . . .	45
5.2	Trabalho futuro . . . . .	46
5.3	Métodos utilizados . . . . .	46
	<b>Bibliography</b>	<b>47</b>
<b>A</b>	<b>Código Utilizado</b>	<b>51</b>

# Listas de Figuras

2.1	Representação do perfil de um transistor Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor (MOSFET), com os 3 portos do mesmo, <i>gate</i> (G), <i>drain</i> (D) e <i>source</i> (S), evidenciados.	7
2.2	Representação da superfície de iso-frequência do meio, com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1.1$ , $\epsilon_{zz} = 1.2$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	9
2.3	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>xoy</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1.1$ , $\epsilon_{zz} = 1.2$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	10
2.4	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>yoZ</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1.1$ , $\epsilon_{zz} = 1.2$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	10
2.5	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>xoz</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1.1$ , $\epsilon_{zz} = 1.2$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	11
2.6	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>xoz</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1.1$ , $\epsilon_{zz} = 1.2$ , e $\epsilon_{xz} = 0$ .	12
2.7	Representação da superfície de iso-frequência do meio, com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1$ , $\epsilon_{zz} = 1$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	13
2.8	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>xoy</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1$ , $\epsilon_{zz} = 1$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	13
2.9	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>yoZ</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1$ , $\epsilon_{zz} = 1$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	14
2.10	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>xoz</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1$ , $\epsilon_{zz} = 1$ , e $\epsilon_{xz} = 0.1$ .	14
2.11	Representação da superfície de iso-frequência do meio, com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1$ , $\epsilon_{zz} = 1$ , e $\epsilon_{xz} = 0$ .	15
2.12	Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano <i>xoz</i> , com $\omega = 1$ , $\epsilon_{xx} = 1$ , $\epsilon_{yy} = 1$ , $\epsilon_{zz} = 1$ , e $\epsilon_{xz} = 0$ .	16



2.13	Representação da componente $x$ do valor médio do vetor de Poynting $S_x^x$ (normalizado em relação ao valor $S_0$ , neste caso, o seu próprio valor) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $x$ . . . . .	17
2.14	Representação da componente $y$ do valor médio do vetor de Poynting $S_x^y$ (normalizado em relação ao valor $S_0$ , neste caso, o valor de $S_x^x$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $x$ . . . . .	17
2.15	Representação da componente $z$ do valor médio do vetor de Poynting $S_x^z$ (normalizado em relação ao valor $S_0$ , neste caso, o valor de $S_x^x$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $x$ . . . . .	18
2.16	Representação do valor médio do vetor de Poynting $S_y$ (normalizado em relação ao valor $S_0$ , neste caso, ao seu valor mínimo) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $y$ . . . . .	18
2.17	Representação do valor médio do vetor de Poynting $S_z$ (normalizado em relação ao valor $S_0$ , neste caso, o seu próprio valor) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $z$ . . . . .	19
2.18	Representação adimensional do andamento do vetor de Poynting para a propagação ao longo do eixo $x$ , $S_x$ (ou mais concretamente, apenas de $S_x^x$ e $S_x^y$ ), ao longo do plano $xoy$ , para a propagação ao longo do eixo $x$ . . . . .	19
2.19	Representação do valor médio do vetor de Poynting $S_y$ (normalizado em relação ao seu mínimo $S_0$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $y$ , com $A_1 = 1$ e $A_2 = j$ . . . . .	21
2.20	Representação do valor médio do vetor de Poynting $S_y$ (normalizado em relação ao seu mínimo $S_0$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $y$ , com $A_1 = 1$ e $A_2 = -j$ . . . . .	22
3.1	Problema análogo ao do MOSFET-metamaterial: duas linhas de transmissão dispostas paralelamente, orientadas segundo $y$ . Aqui, $L_1$ , $L_2$ , $C_{11}$ e $C_{22}$ são os parâmetros distribuídos de indutância para a linha 1 e 2, e de capacidade para a linha 1 e 2, respetivamente. . . . .	24
3.2	Representação do valor médio da potência no sistema idealizado de linhas de transmissão acopladas $P_y$ (normalizado em relação ao seu mínimo $P_0$ ), em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $y$ . . . . .	26
3.3	Representação do valor médio da potência no sistema idealizado de linhas de transmissão acopladas $P_y$ (normalizado em relação ao seu mínimo $P_0$ ), em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $y$ , com $A_1 = 1$ e $A_2 = j$ . . . . .	27

3.4	Representação do valor médio do vetor de Poynting no sistema idealizado de linhas de transmissão acopladas $S_y$ (normalizado em relação ao seu máximo $S_0$ ), em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo $y$ , com $A_1 = 1$ e $A_2 = -j$ . . . . .	27
3.5	Sistema de linhas de transmissão carregado periodicamente por transístores. O sistema é composto por transístores alternados por blocos de linha com comprimento $d$ , sendo essa alternância repetida $N$ vezes. A direção considerada é a direção $y$ . . . . .	28
3.6	Circuito equivalente de um transístor MOS. $V_{in}$ , $I_{in}$ , $V_{out}$ , $I_{out}$ e $V_C$ são a tensão e corrente de entrada, tensão e corrente de saída do circuito e tensão no condensador $C_{gs}$ respetivamente. Os parâmetros $C_{gd}$ , $C_{gs}$ , $C_{ds}$ , $R_i$ , $R_{ds}$ e $g_m$ são, respetivamente, as capacidades entre a porta e o dreno, entre a porta e a fonte, entre o dreno e a fonte, a resistência entre a porta e a fonte, entre o dreno e a fonte, e a transcondutância do transístor. . . . .	29
4.1	Sistema considerado no problema exato, com um porto de cada linha de transmissão terminado com cargas adaptadas (às respetivas linhas), de modo a que o sistema fique disposto como um diporto (com o porto 1 de entrada, em baixo à esquerda, e o porto 2 de saída, em cima e à direita). . . . .	35
4.2	Convenção assumida de direção das ondas de <i>scattering</i> de um diporto, como o considerado nesta secção. . . . .	38
4.3	Módulo do parâmetro $s_{11}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência. . . . .	39
4.4	Módulo do parâmetro $s_{12}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência. . . . .	39
4.5	Módulo do parâmetro $s_{21}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência. . . . .	40
4.6	Módulo do parâmetro $s_{22}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência. . . . .	40
4.7	Módulo do parâmetro $s_{11}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET. . . . .	41
4.8	Módulo do parâmetro $s_{12}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET. . . . .	42

4.9	Módulo do parâmetro $s_{21}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET. . . . .	42
4.10	Módulo do parâmetro $s_{22}$ da matriz de <i>scattering</i> (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET. . . . .	43

# Listagens

A.1	Codigo MatLab utilizado na maioria do capitulo 2 . . . . .	51
A.2	Codigo Mathematica para as superficies de isofrequencia do capitulo 2 . . . .	56
A.3	Codigo Mathematica principal utilizado no capitulo 3 e 4 . . . . .	57
A.4	Codigo Mathematica utilizado para obter a matriz de admitancias do MOSFET	62
A.5	Codigo Mathematica utilizado para obter a matriz de scattering . . . . .	63

# Acrónimos

**MOSFET** Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor

# 1

## Introdução

### Conteúdo

---

1.1	Revisão do estado da arte . . . . .	2
1.2	Motivação . . . . .	3
1.3	Objetivo . . . . .	4
1.4	Estrutura . . . . .	4

---

## 1.1 Revisão do estado da arte

Os metamateriais têm sido bastante analisados nos últimos anos, mas o seu conceito já tinha sido descoberto há mais tempo. Os primeiros estudos com o que já se poderiam considerar metamateriais datam de finais do séc. XIX, conduzidos por *Sir Jagadish Chandra Bose* e princípios do séc. XX, com *Karl Ferdinand Lindman* e *Winston E. Kock* que estudaram materiais com propriedades quirais. A seguir, *Victor Veselago* descreveu o conceito de um material com índice de refração negativo em 1968 [1, 2], mas só trinta e três anos mais tarde é que o conceito foi aplicado na prática, por *Robert Shelby* [2, 3]. Entretanto, na década de noventa, *John Brian Pendry* conseguiu sintetizar metamateriais que podiam adquirir valores de permitividade elétrica e permeabilidade magnética negativos e em 2002 este tipo de materiais já estavam a ser implementados em tecnologia de micro-tiras. Já em 2006, foi feito o primeiro dispositivo de camuflagem que fornecia uma invisibilidade imperfeita, da autoria de *David Schurig* [2, 4].

Já a nível de materiais não recíprocos, que garantem uma resposta diferente dependendo do sentido, numa determinada direção [5], pode dizer-se que as suas aplicações atuais, a nível de soluções eletromagnéticas, passam muito pela construção de elementos não-recíprocos em redes de micro-ondas. Mais concretamente, estes sistemas têm sido utilizados para a implementação de isoladores, elementos que apenas permitem a propagação de ondas de um modo unidirecional, e circuladores eletromagnéticos, que apenas permitem a propagação de ondas de um terminal para um outro imediatamente a seguir, desta forma só permitindo uma propagação "em círculo", usualmente à base de ferrites (magnetizadas, ou seja, com recurso a campos magnéticos de *bias*) [5–8], mas nem sempre, tendo sido exploradas alternativas às mesmas [8–11].

Por outro lado, também são de bastante interesse os materiais não-hermitianos, estes que começaram a ser explorados mais recentemente e, numa primeira fase, o conceito terá sido introduzido na física quântica, tendo-se depois descoberto as suas possíveis aplicações no ramo da ótica. Para além destas, várias topologias têm sido analisadas por investigadores ainda a respeito de materiais com características não-hermitianas, recorrendo a metamateriais e às suas propriedades exóticas. Grande parte das soluções utilizam a magnetização destes materiais (campos magnéticos de *bias*) [12, 13], o que constitui uma das formas para quebrar a reciprocidade, mas que, apesar de fornecerem os resultados esperados, exigem a utilização de elementos pouco convenientes à produção destas soluções em *chips* de reduzidas dimensões, tais como bobines, solenoides e ímanes.

Em [14], utiliza-se um modelo teórico inspirado no funcionamento dos Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor (MOSFET) e recorre-se a um campo elétrico de *bias*, em alternativa a um campo magnético, o que é bastante mais conveniente para implementações em escalas mais reduzidas. Depois de estabelecida a matriz de permitividade do modelo teórico do metamaterial, calculam-se as constantes de onda e os campos elétricos dos modos suportados e posteriormente o valor médio do vetor de Poynting, verificando-se assim a não-hermiticidade do sistema, pela oscilação "sinusoidal" que

ocorre em função da posição.

Por fim, é proposta uma implementação de um isolador eletromagnético. Este é baseado no metamaterial idealizado disposto entre polarizadores lineares ortogonais (entre si). Assim, se uma onda passar pelo isolador numa das direções (por ter sido gerada uma componente extra, ortogonal à componente que passa no primeiro polarizador, no metamaterial devido à sua resposta anisotrópica), outra não passará na direção contrária (pois na direção oposta não é gerada nenhuma outra componente que passe pelo segundo polarizador). Para além disso, neste artigo observam-se os níveis de transmissão unidirecional em função da espessura do metamaterial, que, tal como já referido, influencia diretamente o balanço entre perdas e ganho presente no mesmo. Tal como o batimento de potência, também o coeficiente de transmissão vai variar periodicamente com a espessura, e, portanto, existe uma espessura ótima que ocorre quando o coeficiente de transmissão atinge o máximo.

Outra técnica muito utilizada é a implementação por empilhamento periódico alternado de camadas constituídas por materiais que inserem perdas e ganho, desta forma conseguindo um metamaterial que tem uma característica dual de amplificação e atenuação. Por exemplo, em [15], definiu-se um modelo teórico de um metamaterial multicamadas com dois materiais hipotéticos.

Outros estudos levados a cabo no mesmo âmbito de sistemas não-hermitianos, têm explorado aplicações em ramos diferentes, tais como a acústica [16] e a mecânica [17].

Qualquer que seja o ramo do âmbito da aplicação investigada, uma das conclusões interessantes destes estudos é o facto de se conseguir, através do dimensionamento dos materiais constituintes das propostas apresentadas, e para além disso, das próprias propriedades dos mesmos (não-reciprocidade, não-hermiticidade, anisotropia), atingir balanços entre ganho e perdas que podem traduzir a transcendência da mera compensação das perdas, ou seja, alcançando a amplificação dos sinais.

Relativamente a outras formas de quebrar a reciprocidade, para além da utilização de campos magnéticos estáticos já referidos, existem ainda duas relevantes. Uma delas é usando efeitos não-lineares [18, 19] e a outra é explorando o balanço ganho/perdas (como em sistemas com simetria PT) [20, 21] e sistemas com parâmetros variáveis no tempo [22].

## 1.2 Motivação

A propagação de ondas eletromagnéticas está, no geral, sujeita à Lei da Reciprocidade de Lorentz, quando se fala em materiais dielétricos convencionais, que são sistemas lineares recíprocos. Esta declara que a propagação nestes meios seja obrigatoriamente bidirecional. No entanto este princípio poderá ser transgredido, se se conseguir mudar as características dos meios de propagação das ondas, ou seja, dos próprios materiais.

Os metamateriais são materiais artificiais cujas propriedades óticas não são encontradas normal-



mente na natureza (como por exemplo possuir índice de refração negativo), exibindo comportamentos e respostas não convencionais. Sistemas não-hermitianos são meios que podem amplificar ou absorver localmente as ondas eletromagnéticas que neles se propagam, dependendo da estrutura dos materiais (podendo estes ser meta-materiais ou não) que os constituem, que é criteriosamente escolhida aquando da sua síntese, a fim de se obter determinadas respostas. Estas podem ser, por exemplo, respostas não-recíprocas, sendo possível, nesse caso, contornar a anteriormente referida Lei de Lorentz, permitindo assim que a propagação de ondas eletromagnéticas se dê de um modo unidirecional, o que é útil para a construção de elementos não-recíprocos tais como isoladores e circuladores.

Posto isto, estes materiais (quer materiais não-hermitianos quer meta-materiais no geral) têm assim um grande potencial de exploração e o seu desenvolvimento poderá ter fortes impactos nos ramos da ótica e da fotónica, bem como da computação e da transmissão de informação, e ser utilizado em diversas aplicações tanto a nível militar (por exemplo na produção de sensores como o radar e dispositivos de camuflagem) como a nível das telecomunicações (por exemplo na produção de antenas com elevado ganho no âmbito da quinta geração tecnológica).

### **1.3 Objetivo**

O objetivo deste trabalho é estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em sistemas não-hermitianos, partindo da aferição das propriedades óticas de um metamaterial teórico com um modelo baseado no funcionamento dos dispositivos MOSFET. Nomeadamente pretende-se, a partir do estudo de uma solução que permite quebrar a Lei da Reciprocidade de Lorentz e, localmente, a Lei da Conservação de Energia, chegar a uma implementação física (baseada num sistema de linhas de transmissão, carregadas periodicamente por transístores) do modelo teórico analisado.

### **1.4 Estrutura**

Esta dissertação, para além deste capítulo introdutório, é composta por mais 4 capítulos. No segundo capítulo, compara-se os materiais não-hermitianos com os dispositivos MOSFET, retirando dessa comparação um modelo genérico para um desses materiais (um MOSFET-metamaterial). De seguida, utiliza-se esse modelo para calcular as soluções das equações de Maxwell suportadas segundo as várias direções do espaço e os respetivos campos elétricos. Com estes, calcula-se e observa-se graficamente o vetor de Poynting associado a cada direção de propagação.

Já no terceiro capítulo, utilizando as equações de Maxwell e as "equações do telégrafo", constrói-se uma analogia entre o modelo do metamaterial até então estudado e um sistema de linhas de transmissão acopladas (por hipótese), estabelecendo-se uma comparação entre os dois modelos através da

obtenção da matriz de transmissão e potência média do novo sistema. De seguida, define-se um problema mais pratico, baseado num conjunto de duas linhas de transmissão acopladas periodicamente por transístores, correspondendo a uma implementação física possível e, portanto, ao problema exato.

No quarto e último capítulo antes do capítulo conclusivo, define-se o segundo problema, correspondente ao problema equivalente efetivo do anterior, baseando-se num sistema que é a representação homogénea deste: duas linhas acopladas pelo efeito capacitivo distribuído (ao longo de um período do sistema do problema exato) de um transístor. Por fim, é estabelecida a comparação entre os dois problemas, através das respostas em frequência dos parâmetros da matriz de *scattering*.

# 2

## MOSFET-metamaterial

### Conteúdo

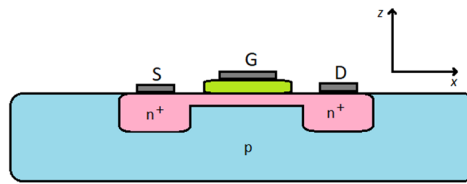
---

2.1	Conceito e modelo do sistema . . . . .	7
2.2	Modos suportados . . . . .	8
2.3	Caracterização do fluxo de energia . . . . .	16

---

## 2.1 Conceito e modelo do sistema

Tal como já referido, o MOSFET comporta-se como um meio não recíproco e não-linear. A tensão aplicada no seu terminal *gate* influencia a largura do canal formado entre os seus terminais *drain* e *source* (representados respetivamente pelas suas iniciais "G", "D" e "S" na figura 2.1), permitindo a passagem de mais ou menos corrente. Para efeitos práticos, acontece que o campo elétrico aplicado na "porta" (ao longo da direção  $z$ , por convenção) afeta a impedância do canal entre o "dreno" e a "fonte" (ao longo da direção  $x$ , por convenção).



**Figura 2.1:** Representação do perfil de um transistor MOSFET, com os 3 portos do mesmo, *gate* (G), *drain* (D) e *source* (S), evidenciados.

Assumindo agora um metamaterial com o comportamento idêntico ao descrito em cima, pode dizer-se que o vetor de polarização  $\mathbf{P}$  neste meio toma a forma

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \bar{\chi} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

onde  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo e

$$\bar{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{xx}(E_z) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde  $\chi_{xx}$ ,  $\chi_{yy}$  e  $\chi_{zz}$  são as suscetibilidades ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respetivamente [14]. Note-se que a primeira é a única que depende da componente  $z$  do campo elétrico, assumindo-se que as outras são independentes do mesmo.

Assuma-se agora um campo elétrico de *bias* aplicado da forma  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}$ , onde  $\mathbf{E}_0 = E_{x0} \hat{x} + E_{z0} \hat{z}$  (campo no plano  $xoz$ ) e  $\delta\mathbf{E}$  são as pequenas variações de  $\mathbf{E}$  em torno de  $\mathbf{E}_0$  [14]. O vetor de polarização  $\mathbf{P}$  pode ser linearizado através de uma expansão em série de Taylor, tomando a forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P} = \varepsilon_0 \bar{\chi}(\mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{E}_0 + \varepsilon_0 \sum_{i=x,y,z} \left[ \frac{\partial}{\partial E_i} [\bar{\chi}(\mathbf{E}) \mathbf{E}] \right]_{\mathbf{E}=\mathbf{E}_0} \delta E_i, \quad (2.3)$$

onde

$$\delta \mathbf{P} = \varepsilon_0 \sum_{i=x,y,z} \left[ \frac{\partial}{\partial E_i} [\bar{\chi}(\mathbf{E}) \mathbf{E}] \right]_{\mathbf{E}=\mathbf{E}_0} \delta E_i = \varepsilon_0 \left[ \bar{\chi}(\mathbf{E}_0) \cdot \delta \mathbf{E} + \sum_{i=x,y,z} \left[ \frac{\partial \bar{\chi}(\mathbf{E})}{\partial E_i} \right]_{\mathbf{E}=\mathbf{E}_0} \cdot \mathbf{E}_0 \delta E_i \right]. \quad (2.4)$$

Visto que a matriz de suscetibilidade assume a forma em (2.2) fica-se com

$$\delta \mathbf{P} = \varepsilon_0 \bar{\chi}_{\text{lin}} \cdot \delta \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

onde

$$\bar{\chi}_{\text{lin}} = \begin{bmatrix} \chi_{xx}(E_{z0}) & 0 & \frac{\partial \chi_{xx}(E_{z0})}{\partial E_z} \cdot E_{x0} \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

Tendo em conta (2.5) e que  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  (considerando apenas as componentes AC,  $\delta \mathbf{E}$  e  $\delta \mathbf{P}$ ) tem-se que

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \bar{\chi}_{\text{lin}} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \bar{\chi}_{\text{lin}}) \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

onde, finalmente, a matriz  $\bar{\varepsilon}$  é da forma

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 + \chi_{xx}(E_{z0}) & 0 & \frac{\partial \chi_{xx}(E_{z0})}{\partial E_z} E_{x0} \\ 0 & 1 + \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Tal como se pode ver, a matriz acima não é hermitiana ( $\bar{\varepsilon} \neq \bar{\varepsilon}^\dagger$ ), o que na prática quer dizer que o material pode absorver ou gerar energia. Para além disto, com esta análise conseguiu-se obter uma resposta linear a partir de um material análogo a um elemento não-linear como o MOSFET.

## 2.2 Modos suportados

Defina-se agora os modos de ondas planas suportados pelo sistema. Através da manipulação das equações de Maxwell (na forma diferencial), a saber,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\bar{\varepsilon}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{E}$  representa o campo elétrico,  $\mathbf{H}$  o campo magnético,  $\omega$  a frequência angular,  $\bar{\varepsilon}_{\mathbf{a}}$  a permitividade elétrica absoluta (considera-se neste caso  $\bar{\varepsilon}_{\mathbf{a}} = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}$ , onde  $\bar{\varepsilon}$  a permitividade elétrica relativa, aqui em forma de matriz, tal como já discutido) e  $\mu$  a permeabilidade magnética (considera-se neste caso  $\mu = \mu_0$ ,

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo) [5], obtém-se a equação de onda

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E} &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\quad (2.10)$$

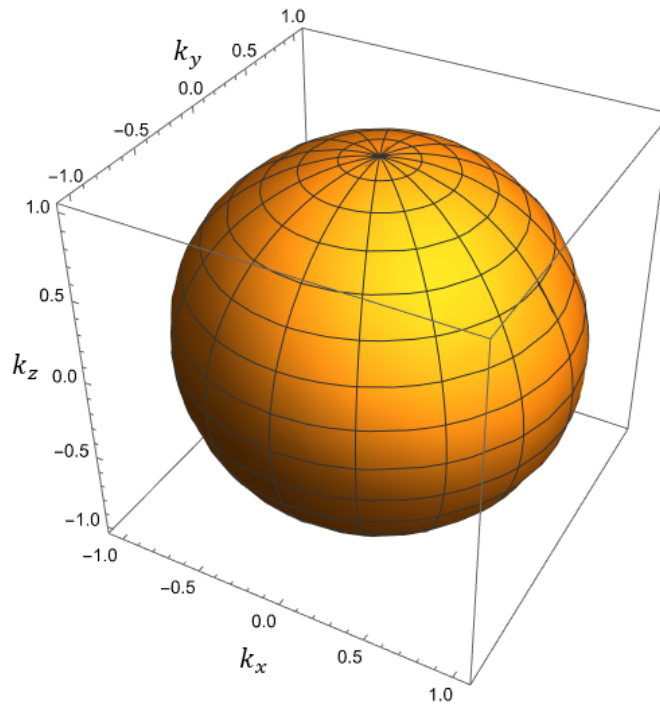
e finalmente

$$\bar{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{E} = \left( k^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \bar{\varepsilon} \right) \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{k}$  representa o(s) vetor(es) de onda. De seguida, utiliza-se o facto de a matriz  $\bar{\mathbf{M}}$  não poder ser invertível, e portanto

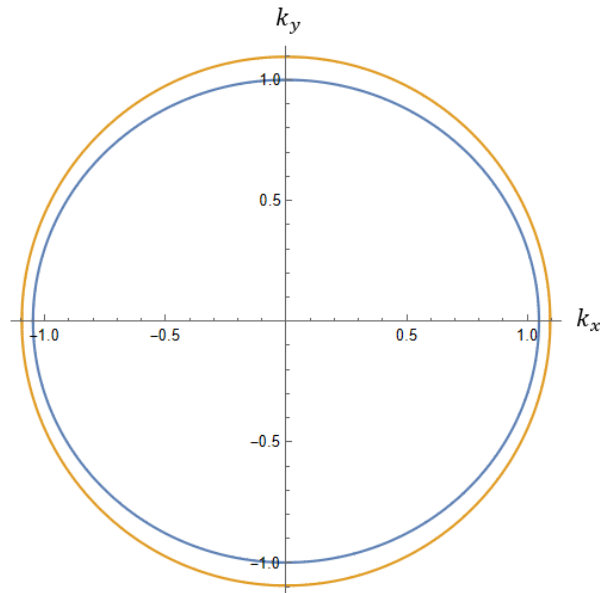
$$\det(\bar{\mathbf{M}}) = 0, \quad (2.12)$$

para encontrar os vetores  $\mathbf{k}$  possíveis, associados aos modos suportados pelo meio. Fixando (com unidades normalizadas e portanto adimensionais)  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1.1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1.2$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ , obtém-se o elipsoide tridimensional da figura 2.2, que representa a superfície de iso-frequência do meio, contendo esta todas as soluções da equação de onda (vetores de onda  $\mathbf{k}$ ) possíveis, considerando todo o espaço.

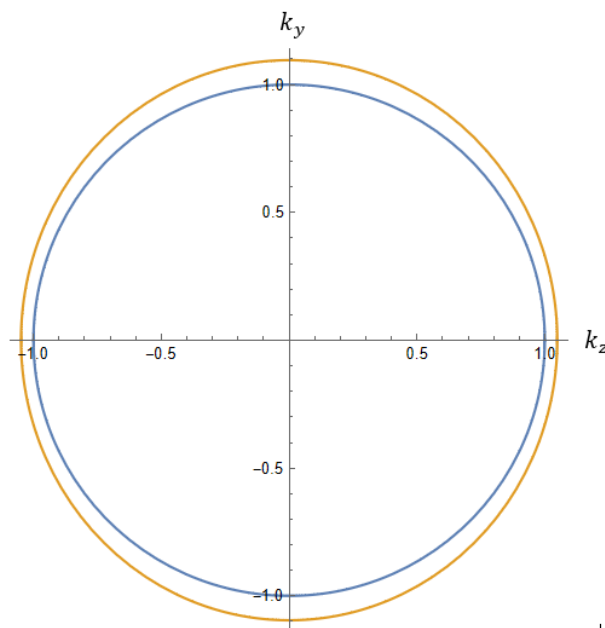


**Figura 2.2:** Representação da superfície de iso-frequência do meio, com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1.1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1.2$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .

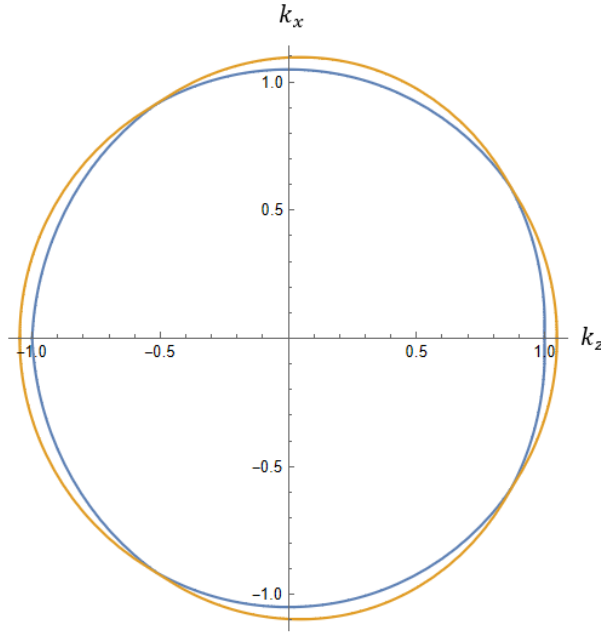
Agora é possível retirar os cortes da superfície de iso-frequência em cada um dos três planos do espaço  $xoy$ ,  $yoz$  e  $xoz$ , estando estes representados nas figuras 2.3, 2.4 e 2.5, respetivamente.



**Figura 2.3:** Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano  $xoy$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1.1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1.2$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .



**Figura 2.4:** Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano  $yoz$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1.1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1.2$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .



**Figura 2.5:** Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano  $xoz$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1.1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1.2$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .

Tal como se pode observar nestas últimas figuras, para cada direção do espaço o meio suporta dois vetores de onda  $\mathbf{k}$ , ou seja, dois modos distintos (duas ondas), aos quais vão estar associadas duas constantes de propagação e duas polarizações.

Assim, segundo a direção  $x$  tem-se

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{yy}} \hat{\mathbf{x}}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_1 \sim \hat{\mathbf{y}} \quad (2.13)$$

e

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{zz}} \hat{\mathbf{x}}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_2 \sim -\varepsilon_{xz} \hat{\mathbf{x}} + \varepsilon_{xx} \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.14)$$

Segundo a direção  $y$  [14] tem-se

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{xx}} \hat{\mathbf{y}}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_1 \sim \hat{\mathbf{x}} \quad (2.15)$$

e

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{zz}} \hat{\mathbf{y}}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_2 \sim \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.16)$$

Segundo a direção  $z$  tem-se



$$\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{xx}} \hat{\mathbf{z}}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_1 \sim \hat{\mathbf{x}} \quad (2.17)$$

e

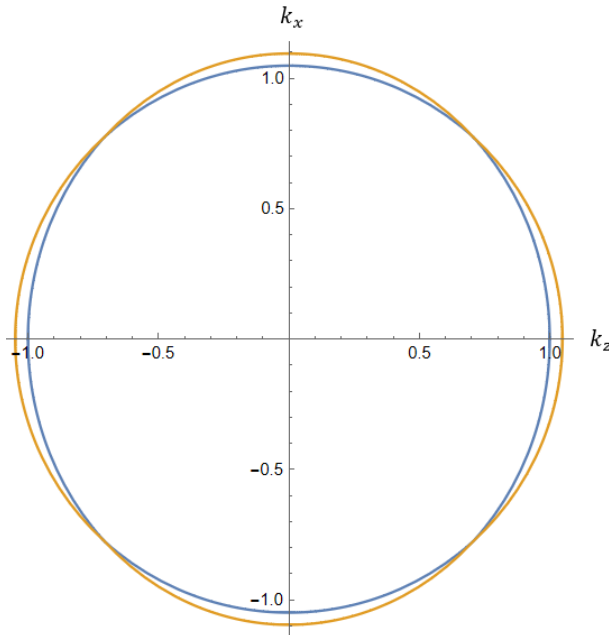
$$\mathbf{k}_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{yy}} \hat{\mathbf{z}}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_2 \sim \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.18)$$

Daqui retiram-se diretamente os ângulos  $\theta_x = 90^\circ$ ,  $\theta_y = 63.43^\circ$  e  $\theta_z = 90^\circ$  entre as duas polarizações na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respetivamente.

Pode comparar-se estes resultados com os que se obteriam no caso em que não existe parâmetro  $\varepsilon_{xz}$ . Assim, tendo uma matriz

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

os cortes da superfície de iso-frequência das figuras 2.3 e 2.4 não se alterariam. No entanto, o corte presente na figura 2.5, do plano  $xoz$ , seria perfeitamente simétrico, tal como mostra a figura 2.6.

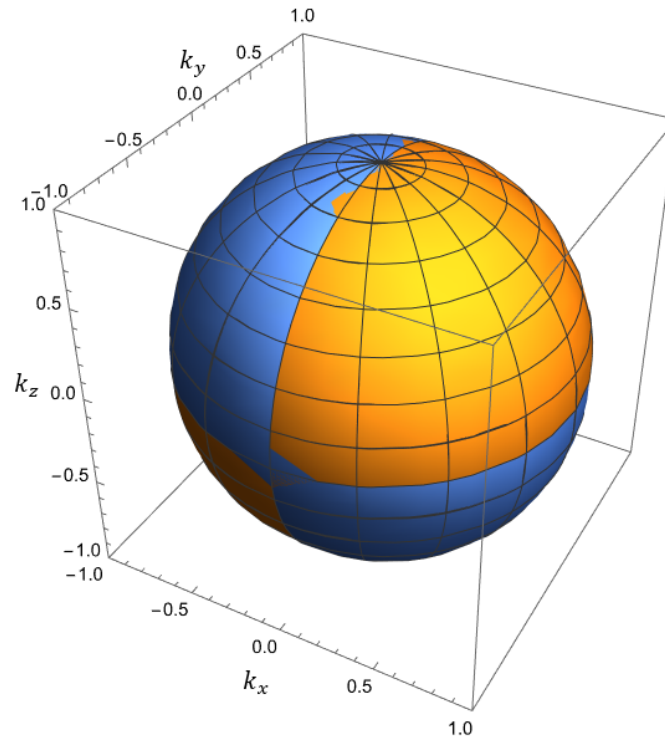


**Figura 2.6:** Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano  $xoz$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1.1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1.2$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0$ .

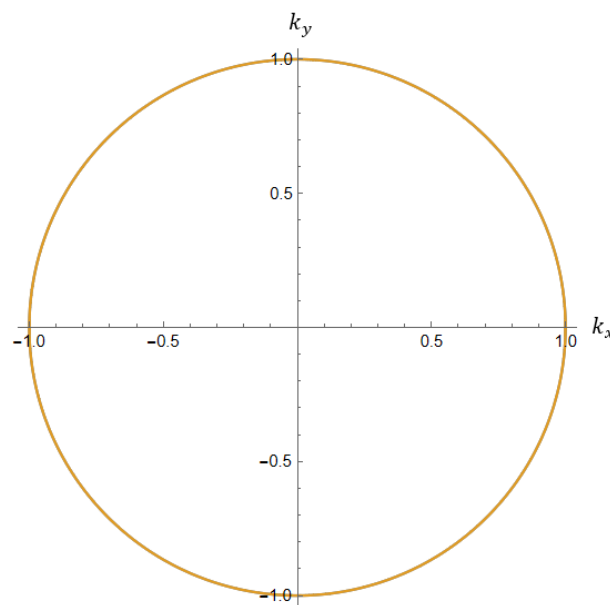
Pode também observar-se o que acontece quando a matriz  $\bar{\varepsilon}$  é do tipo

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

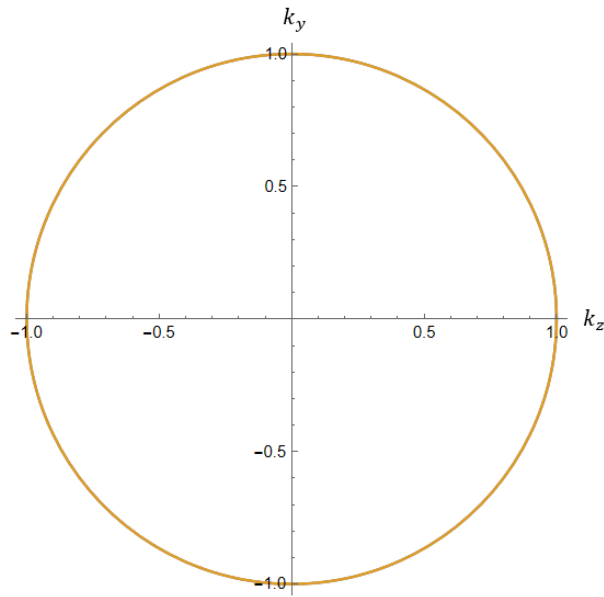
ter-se-ia uma superfície de iso-frequência resultante como a que está na figura 2.7. Esta teria os cortes nos respetivos planos  $xoy$ ,  $yozy$  e  $xozy$  como os que estão nas figuras 2.8, 2.9 e 2.10.



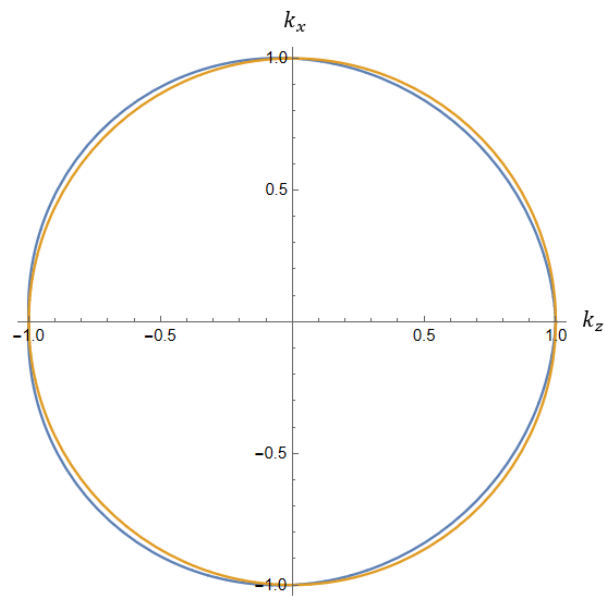
**Figura 2.7:** Representação da superfície de iso-frequência do meio, com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .



**Figura 2.8:** Representação do corte da superfície de iso-frequência no plano  $xoy$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .



**Figura 2.9:** Representação do corte da superfície de iso-freqüência no plano  $yoz$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .



**Figura 2.10:** Representação do corte da superfície de iso-freqüência no plano  $xoz$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0.1$ .

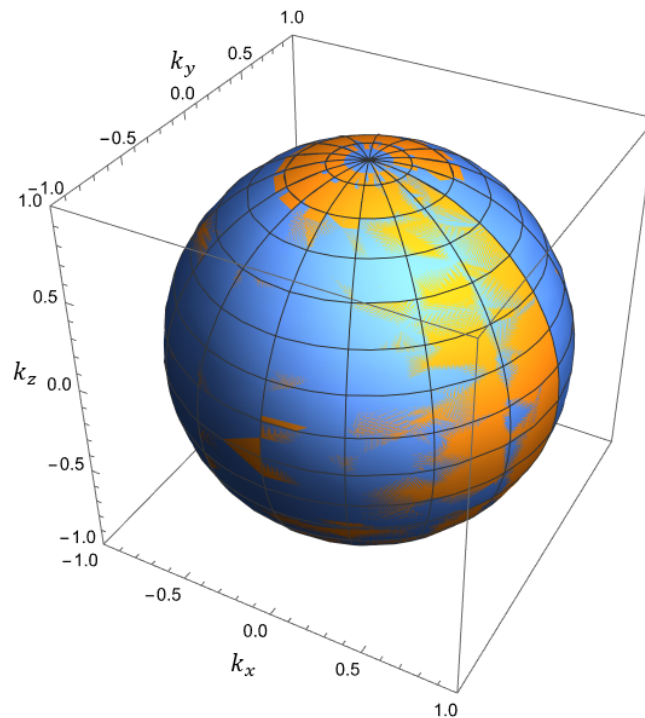
Como seria expectável, os dois modos são coincidentes nos planos  $xoy$  e  $yoz$ , mas apenas se cruzam na interceção com os eixos, no plano  $xoz$ , visto que se tem de igual forma a assimetria marcada pelo parâmetro  $\varepsilon_{xz}$ . Isto porque, neste caso, a amplitude dos vetores de onda  $k$  seriam iguais, tendo em conta as expressões dos mesmos discutidas anteriormente. De forma que as duas polarizações correspondentes são também exatamente iguais, colapsando e dando origem ao chamado "ponto ex-

cepcional”. E por isso é que, este caso em particular, é um caso singular, onde o espaço nulo da matriz  $M$  resultante não existe, precisamente por se tratar de uma matriz singular.

Por fim, pode ainda comparar-se o descrito até agora com o caso isotrópico, ou seja, quando

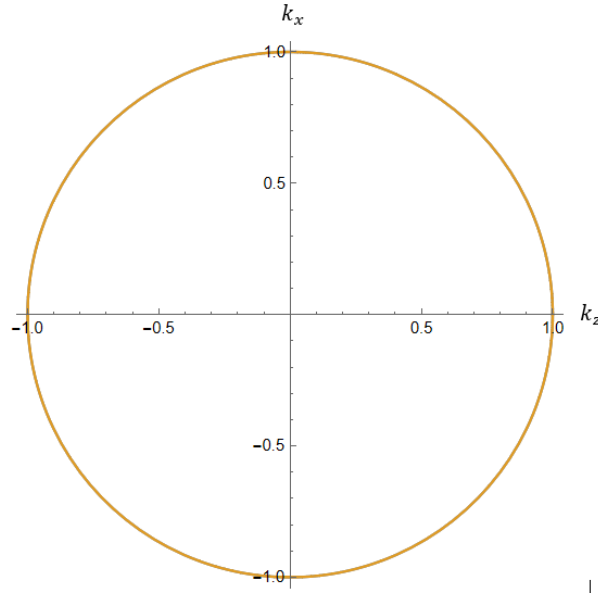
$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Neste caso, teríamos a superfície de iso-frequência da figura 2.11, que representa as duas superfícies completamente coincidentes.



**Figura 2.11:** Representação da superfície de iso-frequência do meio, com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0$ .

Tendo esta superfície, os cortes da mesma nos planos  $xoy$  e  $yoz$  serão exatamente os mesmos que nas figuras 2.8 e 2.9, respetivamente. Nas o corte no plano  $xoz$  também seria igual aos anteriores, pelo que seria o que está na figura 2.12.



**Figura 2.12:** Representação do corte da superfície de iso-freqüência no plano  $xoz$ , com  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1$ ,  $\varepsilon_{zz} = 1$ , e  $\varepsilon_{xz} = 0$ .

## 2.3 Caracterização do fluxo de energia

Considere-se agora, a fim de se explorar a interação das duas ondas e como esta poderá influenciar a resposta dos materiais analisados, a sobreposição das duas ondas [14], que gera, naturalmente, um campo elétrico da forma

$$\mathbf{E}_T = A_1 E_1 e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + A_2 E_2 e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.22)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são variáveis de ajuste de amplitude (que para já se podem considerar iguais a 1, por exemplo) e  $\mathbf{r}$  é o vetor posição ( $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ ).

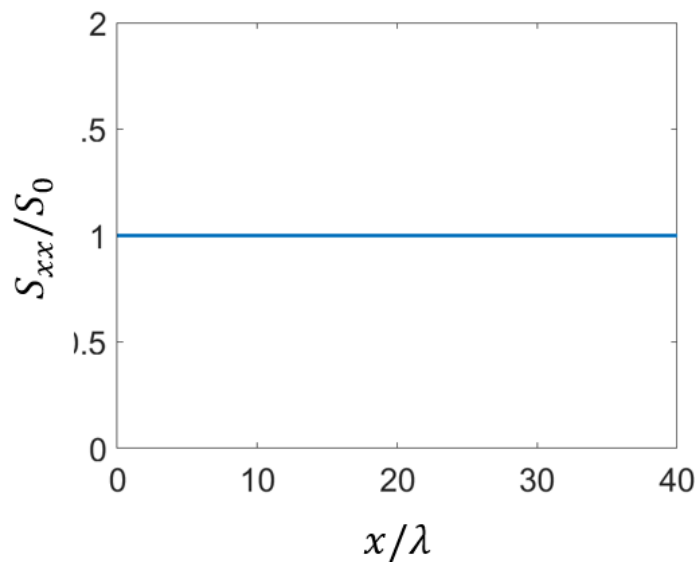
Para se estudar agora o fluxo de energia existente recorre-se ao vetor de Poynting. Assim, calcula-se o valor médio do mesmo [14], que é dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{Re}(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*), \quad (2.23)$$

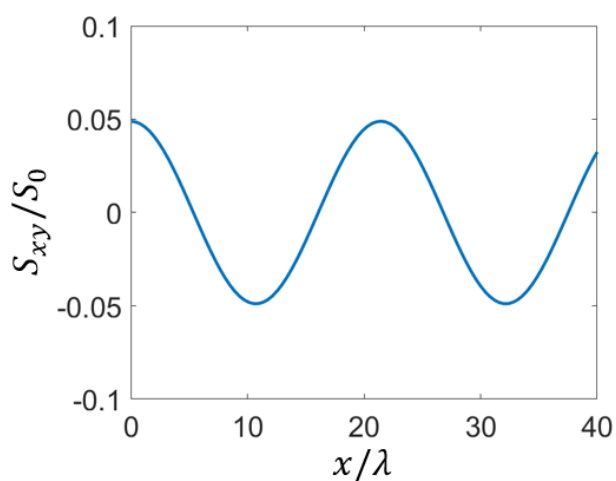
onde  $\mathbf{H}_T$  é o campo magnético gerado pela sobreposição das duas ondas, que por sua vez é dado pelas Equações de Maxwell em (2.9).

Depois de obtidos os campos magnéticos e valores médios do vetor de Poynting para as 3 direções de propagação analisadas, obtêm-se os gráficos com a representação do valor médio do vetor de Poynting, nomeadamente, das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  do mesmo na direção  $x$  e das componentes

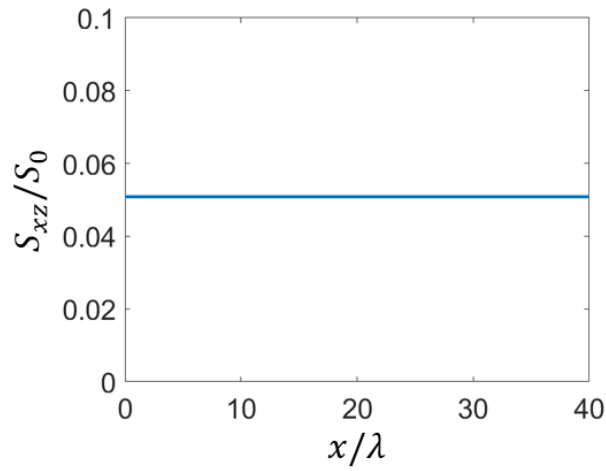
paralelas à direção de propagação nas direções  $y$  e  $z$ , em função da posição, presentes nas figuras 2.13, 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17 respectivamente.



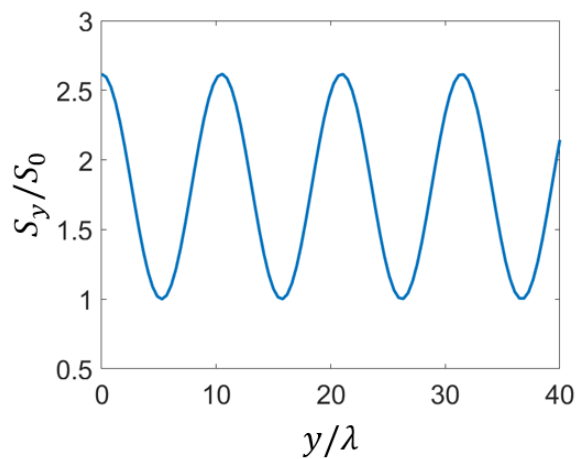
**Figura 2.13:** Representação da componente  $x$  do valor médio do vetor de Poynting  $S_x^x$  (normalizado em relação ao valor  $S_0$ , neste caso, o seu próprio valor) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $x$ .



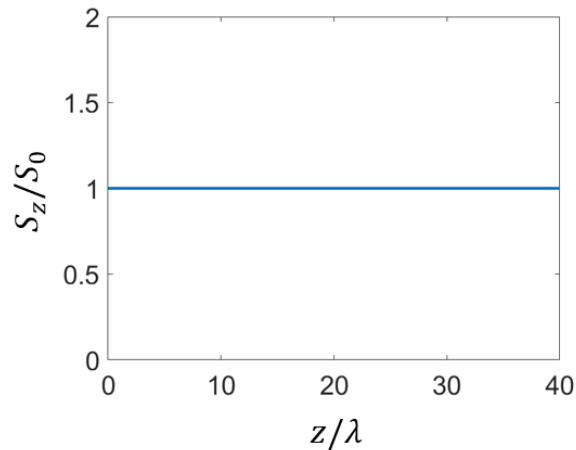
**Figura 2.14:** Representação da componente  $y$  do valor médio do vetor de Poynting  $S_x^y$  (normalizado em relação ao valor  $S_0$ , neste caso, o valor de  $S_x^x$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $x$ .



**Figura 2.15:** Representação da componente  $z$  do valor médio do vetor de Poynting  $S_x^z$  (normalizado em relação ao valor  $S_0$ , neste caso, o valor de  $S_x^x$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $x$ .

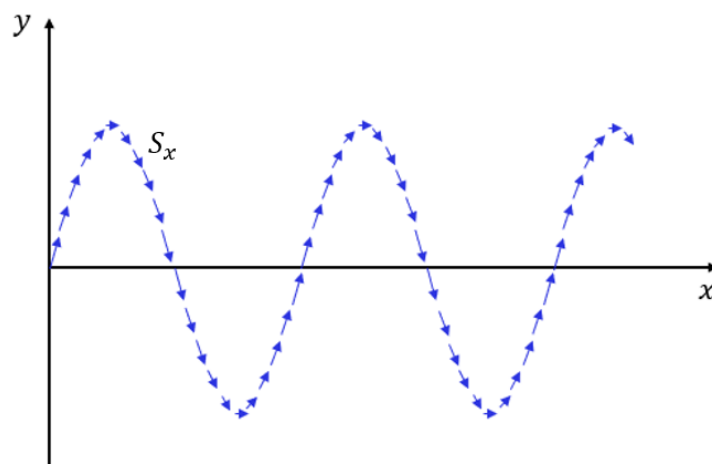


**Figura 2.16:** Representação do valor médio do vetor de Poynting  $S_y$  (normalizado em relação ao valor  $S_0$ , neste caso, ao seu valor mínimo) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $y$ .



**Figura 2.17:** Representação do valor médio do vetor de Poynting  $S_z$  (normalizado em relação ao valor  $S_0$ , neste caso, o seu próprio valor) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $z$ .

Nos casos da propagação em  $x$  e  $z$  observa-se que as componentes do vetor de Poynting paralelas à direção de propagação são constantes. Isto deve-se ao facto de os campos das 2 ondas estarem em quadratura. Note-se que, no caso do vetor de Poynting para a propagação segundo  $x$ , existem 3 componentes do espaço não nulas, o que implica que o vetor de Poynting não é paralelo à direção de propagação, caso que só se pode verificar em meios anisotrópicos. Neste caso, as componentes  $x$  e  $z$  são constantes, mas existe uma oscilação "sinusoidal" na componente  $y$ . Isto sugere que, para além de o vetor de Poynting não ser paralelo à direção de propagação, a sua direção ainda depende de  $x$ , não apresentando a mesma direção em todas as posições. Para melhor visualização do que acontece neste caso, encontra-se, na figura 2.18, o andamento do vetor de Poynting no plano  $xoy$ . Note-se que a figura não se encontra representada à escala.



**Figura 2.18:** Representação adimensional do andamento do vetor de Poynting para a propagação ao longo do eixo  $x$ ,  $S_x$  (ou mais concretamente, apenas de  $S_x^x$  e  $S_x^y$ ), ao longo do plano  $xoy$ , para a propagação ao longo do eixo  $x$ .



É de referir que, não obstante este andamento e a componente  $z$  constante, estas oscilações são relativamente pequenas (note-se a diferença de, sensivelmente, uma ordem de grandeza nas escalas das representações da componente  $x$  e das componentes  $y$  e  $z$ ), e portanto, ainda se pode aproximar a direção de propagação à direção do vetor de Poynting neste caso.

Já para o caso particular da propagação em  $y$ , observa-se uma situação interessante. O vetor de Poynting cresce e decresce periodicamente com um comportamento aproximadamente sinusoidal. Isto mostra que um material deste tipo pode gerar ou absorver energia em determinados segmentos. Nomeadamente, este absorve energia nos flancos descendentes, quando a derivada é negativa, e gera energia nos flancos crescentes, quando a derivada é positiva.

Pode-se então ver quais as polarizações que levam aos diferentes valores de ganho/perdas no meio considerado. Para isso, procede-se à análise da potência dissipada pelo material. De um modo mais geral, considere-se então um determinado volume  $V$  com energia  $\varepsilon_{EM}$  e superfície  $\Sigma$ .

Sabe-se que

$$\frac{\partial(\varepsilon_{EM})}{\partial t} = -P_{\Sigma} - P_{diss}, \quad (2.24)$$

e portanto,

$$\left\langle \frac{\partial(\varepsilon_{EM})}{\partial t} \right\rangle = -\langle P_{\Sigma} \rangle - \langle P_{diss} \rangle, \quad (2.25)$$

onde  $P_{\Sigma}$  é a potência que atravessa a superfície  $\Sigma$  (de dentro para fora do volume  $V$ ) e  $P_{diss}$  é a potência dissipada no volume  $V$ . Como  $\langle \frac{\partial(\varepsilon_{EM})}{\partial t} \rangle = 0$ , a relação entre as duas potências é dada por

$$\langle P_{\Sigma} \rangle = -\langle P_{diss} \rangle, \quad (2.26)$$

em que

$$\langle P_{\Sigma} \rangle = \int_{\Sigma} \langle S \rangle \cdot \hat{n} dS. \quad (2.27)$$

Considere-se agora  $u_{diss}$  a potência dissipada por unidade de volume, e portanto

$$P_{diss} = \int_V u_{diss} dV. \quad (2.28)$$

Relacionando-a com  $\langle S \rangle$ , utilizando 2.26 e 2.27, fica-se com

$$\nabla \cdot \langle S \rangle = -u_{diss}. \quad (2.29)$$

Aplicando esta relação ao caso do metamaterial até aqui analisado e em específico para a propagação

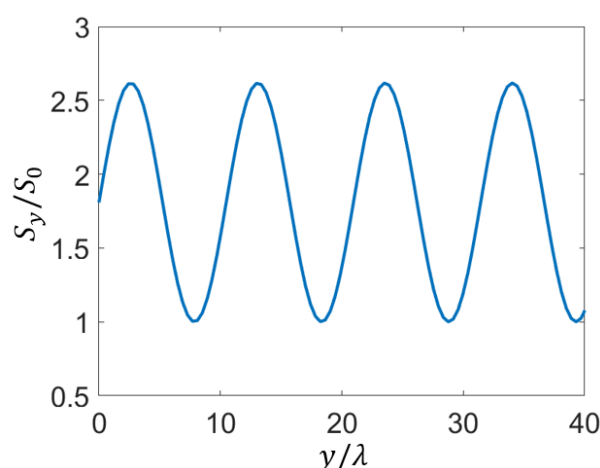
em  $y$ , conclui-se que  $u_{diss}$  é dada por

$$u_{diss} = -\mathbf{Re} \left( j \frac{\omega}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* \right) = -\mathbf{Re} \left( j \frac{\omega}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{xz} E_x E_z^* \right), \quad (2.30)$$

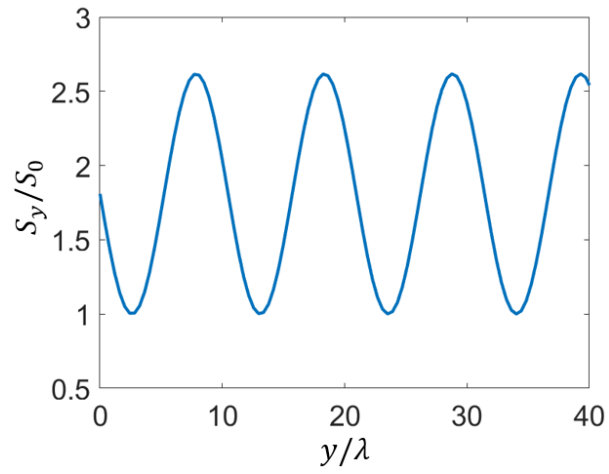
Note-se que  $u_{diss}$  corresponde ao simétrico da derivada do valor médio do vetor de Poynting obtido na figura 2.16. Agora querer-se-á analisar os extremos de  $u_{diss}$  (normalizada em relação ao quadrado da amplitude  $E_0 = \sqrt{|E_x|^2 + |E_z|^2}$ ). Presuma-se que  $E_x = E_0 \cos(\theta)$  e  $E_z = E_0 \sin(\theta) e^{j\varphi}$ . Então  $u_{diss}$  (normalizada em relação ao quadruplo de  $E_0^2$ , à frequência  $\omega$  e à constante  $\varepsilon_0$ ) toma a forma

$$\frac{u_{diss}}{4\omega\varepsilon_0 E_0^2} = -\mathbf{Re} \left( j \varepsilon_{xz} \cos\theta \sin\theta e^{-j\varphi} \right) = -\varepsilon_{xz} \sin(\varphi) \sin(2\theta). \quad (2.31)$$

Aqui já se torna claro que polarizações é que maximizam, minimizam e anulam o ganho do material, assumindo que  $\varepsilon_{xz}$  é positivo (como caso que se tem vindo a considerar). Quando a fase relativa ( $\varphi$ ) das componentes  $E_x$  e  $E_z$  é nula (querendo dizer que se trata de uma polarização linear),  $u_{diss}$  também o é. Quando  $\varphi = \pm 90^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$  (correspondente a uma polarização circular) é quando  $u_{diss}$  atinge os seus extremos. Nomeadamente, para uma polarização circular esquerda ( $\varphi = 90^\circ$ ) a potência dissipada é mínima, ou seja, o ganho é máximo, não havendo perdas. Para uma polarização circular direita, as perdas são máximas, não havendo ganho. Pode verificar-se esta análise regulando as amplitudes  $A_1$  e  $A_2$  em 2.22 e observando o declive do valor médio do vetor de Poynting para  $y = 0$ . Esta discussão pode ser confirmada pelas figuras 2.19 e 2.20 onde se mostra o comportamento do vetor de Poynting na direção de propagação  $y$ , tal como em 2.16, mas com as constantes  $A_1 = 1$  e  $A_2 = j$ , o que corresponde a uma polarização circular esquerda, na posição inicial do metamaterial, e  $A_1 = 1$  e  $A_2 = -j$ , o que corresponde a uma polarização circular direita, na posição inicial do metamaterial.



**Figura 2.19:** Representação do valor médio do vetor de Poynting  $S_y$  (normalizado em relação ao seu mínimo  $S_0$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $y$ , com  $A_1 = 1$  e  $A_2 = j$ .



**Figura 2.20:** Representação do valor médio do vetor de Poynting  $S_y$  (normalizado em relação ao seu mínimo  $S_0$ ) em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $y$ , com  $A_1 = 1$  e  $A_2 = -j$ .

# 3

## Analogia com teoria das linhas de transmissão

### Conteúdo

---

3.1	Definição das linhas de transmissão . . . . .	24
3.2	Concretização do modelo estudado . . . . .	28

---

### 3.1 Definição das linhas de transmissão

De modo a estudar-se então a analogia que se propõe fazer com o problema do MOSFET-metamaterial descrito no capítulo anterior, começar-se-á por manipular as equações de Maxwell, já apresentadas, para que se consiga estabelecer uma correspondência entre estas e as equações das linhas de transmissão.

Restringindo o problema à direção  $y$  e tendo em conta que a permitividade elétrica não é um escalar mas uma matriz, retira-se de (2.9) que

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z = -j\omega\mu H_x \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (-E_x) = -j\omega\mu H_z \quad (3.2)$$

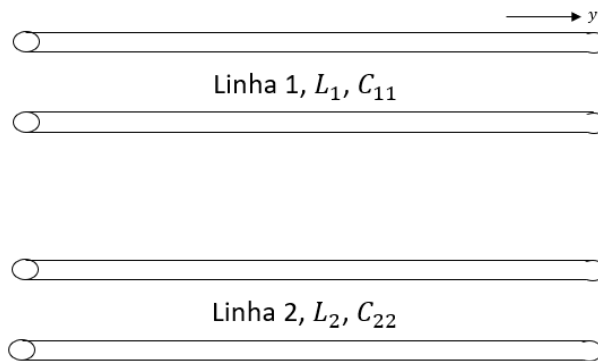
$$\frac{\partial}{\partial y} H_z = j\omega(\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xz}E_z) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (-H_x) = j\omega(\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zz}E_z). \quad (3.4)$$

Analisando as equações de uma linha de transmissão convencional sem perdas, a saber,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= -j\omega LI \\ \frac{\partial I}{\partial y} &= -j\omega CV, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que  $L$  e  $C$  são, respetivamente, os parâmetros distribuídos de indutância e capacidade a longo da linha e  $V$  e  $I$  são a tensão e a corrente num determinado ponto dessa linha [5], podem estabelecer-se duas linhas, por comparação das expressões indicadas, dispostas paralelamente da forma que se apresenta na figura 3.1.



**Figura 3.1:** Problema análogo ao do MOSFET-metamaterial: duas linhas de transmissão dispostas paralelamente, orientadas segundo  $y$ . Aqui,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_{11}$  e  $C_{22}$  são os parâmetros distribuídos de indutância para a linha 1 e 2, e de capacidade para a linha 1 e 2, respetivamente.

Agrupando (3.1) e (3.4), pode estabelecer-se a analogia

$$\begin{aligned}
 E_z &\longrightarrow V_1 \\
 H_x &\longrightarrow I_1 \\
 \mu &\longrightarrow L_1 \\
 \varepsilon_{zz} &\longrightarrow C_{11},
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

passando a ficar definida uma primeira linha, por exemplo, a linha 1, com tensão  $V_1$  e corrente  $I_1$ .

Agrupando (3.2) e (3.3), pode estabelecer-se a analogia

$$\begin{aligned}
 -E_x &\longrightarrow V_2 \\
 H_z &\longrightarrow I_2 \\
 \mu &\longrightarrow L_2 \\
 \varepsilon_{xx} &\longrightarrow C_{22},
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

passando a ficar definida a segunda linha, a linha 2, com tensão  $V_2$  e corrente  $I_2$ . Os termos que restam traduzem o acoplamento entre as linhas, podendo-se também fazer a analogia

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zx} &\longrightarrow -C_{12} \\
 \varepsilon_{xz} &\longrightarrow -C_{21}.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Substituindo então os parâmetros das expressões (3.1) a (3.4) pelos parâmetros análogos agora discutidos, conclui-se que a linha 1 é definida por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_1}{\partial y} &= -j\omega L_1 I_1 \\
 \frac{\partial I_1}{\partial y} &= -j\omega(C_{11}V_1 + C_{12}V_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

e a linha 2 é definida por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_2}{\partial y} &= -j\omega L_2 I_2 \\
 \frac{\partial I_2}{\partial y} &= -j\omega(C_{21}V_1 + C_{22}V_2).
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Resumidamente, na forma matricial, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = -j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \Psi = -j\omega \bar{\mathbf{M}}_{\text{teo}} \cdot \Psi.
 \tag{3.11}$$

Daqui afere-se que  $\Psi$ , que é função de  $y$  consoante o que se definiu anteriormente, é dado por

$$\Psi(\mathbf{0}) = e^{j\omega\bar{\mathbf{M}}_{\text{teo}}\cdot\mathbf{y}} \cdot \Psi(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{T}}_{\text{teo}} \cdot \Psi(\mathbf{y}), \quad (3.12)$$

onde  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{teo}}$  é a matriz de transmissão ("ABCD") do conjunto das duas linhas de transmissão análogo ao modelo teórico do MOSFET-metamaterial. É importante notar que a matriz  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{teo}}^{-1}$  está interligada com os modos descobertos no capítulo anterior sendo que os seus vetores próprios e valores são semelhantes, respetivamente, aos próprios campos e aos vetores de onda respetivos. Verifica-se, portanto, que

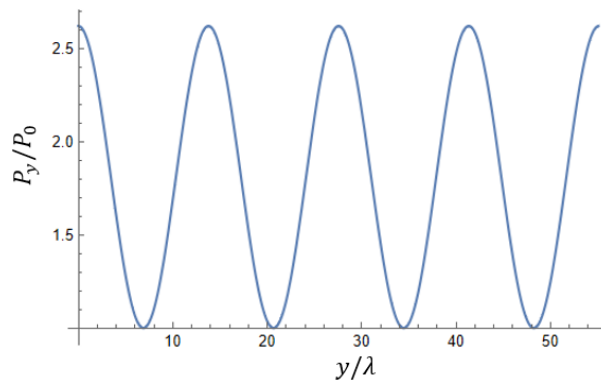
$$\bar{\mathbf{T}}_{\text{teo}}^{-1} \cdot \Psi(\mathbf{0}) = \Psi(\mathbf{y}) = A_1 \Psi_1 e^{-j k_1 \cdot \mathbf{y}} + A_2 \Psi_2 e^{-j k_2 \cdot \mathbf{y}}, \quad (3.13)$$

onde  $\Psi(\mathbf{y})$  é uma sobreposição arbitrária de dois vetores próprios da matriz  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{teo}}^{-1}$ ,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , ponderada pelas constantes arbitrárias  $A_1$  e  $A_2$  (que se assume serem 1) e onde  $e^{-j k_1 \cdot \mathbf{y}}$  e  $e^{-j k_2 \cdot \mathbf{y}}$  são os respetivos valores próprios. Note-se que esta expressão é, em todo, idêntica à expressão (2.22).

Para além disso, comparando a potência no sistema de linhas (ou o valor médio da mesmo), agora dado por

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{Re}(V_1 \times I_1^* + V_2 \times I_2^*), \quad (3.14)$$

onde os parâmetros  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  são funções de  $y$  e são dados por  $\Psi$  em (3.12), podem observar-se as claras semelhanças no comportamento verificado no capítulo anterior. Desta forma, a figura 3.2 mostra o comportamento do fluxo de energia na presente situação do sistema de linhas de transmissão considerado. Foram considerados parâmetros normalizados, a saber,  $L_1 = L_2 = L = 1$ ,  $C_{11} = 1.2$ ,  $C_{12} = 0$ ,  $C_{22} = 1$ ,  $C_{21} = 0.1$  e  $\omega = 1$ .

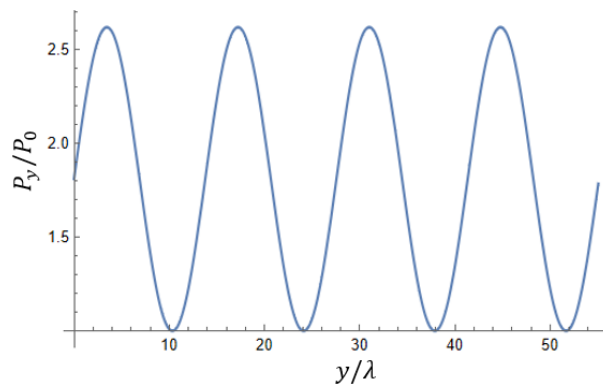


**Figura 3.2:** Representação do valor médio da potência no sistema idealizado de linhas de transmissão acopladas  $P_y$  (normalizado em relação ao seu mínimo  $P_0$ ), em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $y$ .

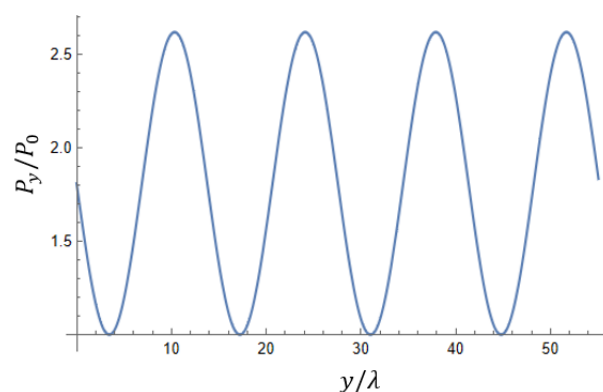
Tal como referido, é possível constatar que o comportamento oscilatório da potência é idêntico

ao encontrado na figura 2.16 para o vetor de Poynting no MOSFET-metamaterial, o que comprova a validade da analogia estudada nesta secção.

Também é útil confirmar a consistência da discussão que se teve na secção 2.3 sobre as diferentes polarizações afetarem o ganho do sistema. Para isso, altere-se as constantes  $A_1$  e  $A_2$  de modo a obter-se diferentes polarizações para a posição  $y = 0$  (tal como se fez anteriormente). Note-se que na figura 3.2 foi assumida uma polarização linear na posição inicial do sistema ( $A_1 = A_2 = 1$ ) e, portanto, daí a curva ter dado início num dos extremos. As figuras 3.4 e 3.3 mostram o mesmo comportamento do fluxo de energia no sistema de linhas de transmissão, considerando os mesmos parâmetros, à exceção das constantes  $A_1$  e  $A_2$ , que são  $A_1 = 1$  e  $A_2 = j$  (o que corresponde a uma polarização circular esquerda, na posição inicial da linha), no caso da primeira, e  $A_1 = 1$  e  $A_2 = -j$  (o que corresponde a uma polarização circular direita, na posição inicial da linha), no caso da segunda.



**Figura 3.3:** Representação do valor médio da potência no sistema idealizado de linhas de transmissão acopladas  $P_y$  (normalizado em relação ao seu mínimo  $P_0$ ), em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $y$ , com  $A_1 = 1$  e  $A_2 = j$ .



**Figura 3.4:** Representação do valor médio do vetor de Poynting no sistema idealizado de linhas de transmissão acopladas  $S_y$  (normalizado em relação ao seu máximo  $S_0$ ), em função da posição (normalizada em relação ao comprimento de onda) para a propagação ao longo do eixo  $y$ , com  $A_1 = 1$  e  $A_2 = -j$ .

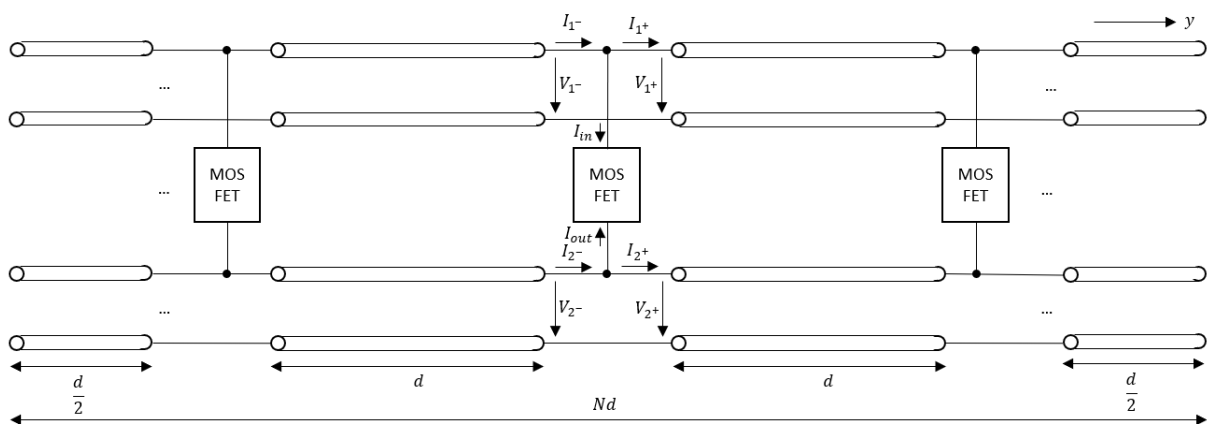
Note-se que a derivada da curva da potencia (ganho/perdas do sistema) na posição inicial é máxima



na polarização circular esquerda e mínima na polarização circular direita, o que corrobora o discutido anteriormente.

## 3.2 Concretização do modelo estudado

De forma a concretizar-se o conceito teórico do conjunto de linhas de transmissão acopladas unilateralmente apresentado na secção anterior, recorre-se a um conjunto de linhas convencionais (desacopladas) com comprimento  $d$  e carregadas periodicamente por MOSFET's, numa estrutura de  $N$  blocos, da forma que se encontra indicada na figura 3.5, como solução do problema exato (que mais à frente há de ser comparada com a solução do problema efetivo). Aqui, os transístores terão de estar ligados à linha 1 (a de cima) através do terminal *drain* e à linha 2 (a de baixo) através do terminal *gate*, para além de estarem ligados à terra através do terminal *source*.



**Figura 3.5:** Sistema de linhas de transmissão carregado periodicamente por transístores. O sistema é composto por transístores alternados por blocos de linha com comprimento  $d$ , sendo essa alternância repetida  $N$  vezes. A direção considerada é a direção  $y$ .

Para isso, procede-se agora ao estudo das matrizes de transmissão dos vários blocos constituintes da estrutura apresentada.

### 3.2.1 Bloco-linha

Tomando por base a estrutura da figura 3.5 e recordando o raciocínio da secção anterior (relativo às linhas acopladas unidirecionalmente), é fácil notar que bloco-linha é definido pela expressão (3.12), mas agora com  $C_{12} = C_{21} = 0$  (e  $y$  igual ao comprimento  $d$  da linha do bloco). Pelo que a matriz de

transmissão deste bloco,  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{linha,d}}$ , é

$$\bar{\mathbf{T}}_{\text{linha,d}} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 & T_{24} \\ T_{31} & 0 & T_{33} & 0 \\ 0 & T_{42} & 0 & T_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde

$$T_{11} = T_{33} = \cos(\beta_1 d), \quad (3.16)$$

$$T_{13} = j Z_{01} \text{sen}(\beta_1 d), \quad (3.17)$$

$$T_{22} = T_{44} = \cos(\beta_2 d), \quad (3.18)$$

$$T_{24} = j Z_{02} \text{sen}(\beta_2 d), \quad (3.19)$$

$$T_{31} = \frac{j \text{sen}(\beta_1 d)}{Z_{01}} \quad (3.20)$$

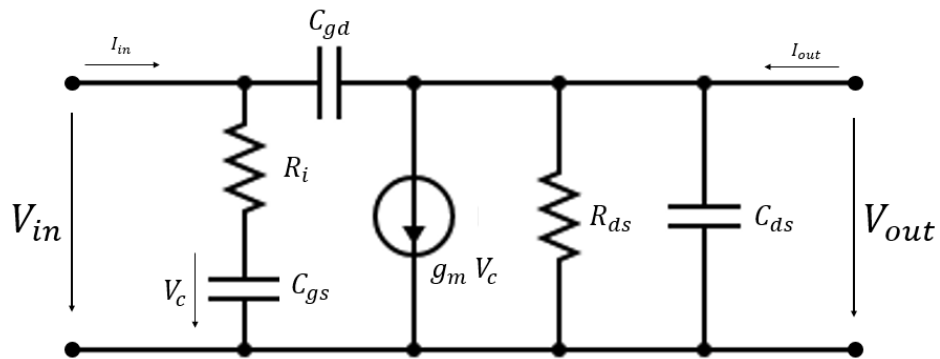
e

$$T_{42} = \frac{j \text{sen}(\beta_2 d)}{Z_{02}} \quad (3.21)$$

(onde  $\beta_1 = \omega\sqrt{L_1 C_{11}}$ ,  $\beta_2 = \omega\sqrt{L_2 C_{22}}$ ,  $Z_{01} = \sqrt{\frac{L_1}{C_{11}}}$  e  $Z_{02} = \sqrt{\frac{L_2}{C_{22}}}$ ), parâmetros estes se são apenas uma variação dos parâmetros ABCD que se encontram em [5] para uma linha de transmissão convencional.

### 3.2.2 Bloco-MOSFET

Para além disso, há que saber a matriz de transmissão de um bloco com transístor. É então útil olhar para o esquema elétrico equivalente do dispositivo em causa, presente na figura 3.6 [5].



**Figura 3.6:** Circuito equivalente de um transístor MOS.  $V_{in}$ ,  $I_{in}$ ,  $V_{out}$ ,  $I_{out}$  e  $V_C$  são a tensão e corrente de entrada, tensão e corrente de saída do circuito e tensão no condensador  $C_{gs}$  respetivamente. Os parâmetros  $C_{gd}$ ,  $C_{gs}$ ,  $C_{ds}$ ,  $R_i$ ,  $R_{ds}$  e  $g_m$  são, respetivamente, as capacidades entre a porta e o dreno, entre a porta e a fonte, entre o dreno e a fonte, a resistência entre a porta e a fonte, entre o dreno e a fonte, e a transcondutância do transístor.

Através da análise do circuito, consegue-se aferir que o componente, que pode ser visto aqui como um diporto, apresenta uma matriz de admitâncias  $\bar{\mathbf{Y}}_{\text{mosfet}}$ , que relaciona as correntes  $I_{in}$  e  $I_{out}$  com as tensões  $V_{in}$  e  $V_{out}$ , do tipo

$$\begin{bmatrix} I_{in} \\ I_{out} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Y}}_{\text{mosfet}} \begin{bmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde, neste caso,

$$Y_{11} = \frac{j\omega(C_{gd} + C_{gs} + j\omega C_{gd}C_{gs}R_i)}{1 + j\omega C_{gs}R_i}, \quad (3.23)$$

$$Y_{12} = -j\omega C_{gd}, \quad (3.24)$$

$$Y_{21} = \frac{g_m}{1 + j\omega C_{gs}R_i} - j\omega C_{gd} \quad (3.25)$$

e

$$Y_{22} = \frac{1}{R_{ds}} + j\omega(C_{ds} + C_{gd}). \quad (3.26)$$

Posto isto, e sabendo, através da figura 3.5, que

$$I_{1-} = I_{in} + I_{1+} \quad (3.27)$$

$$I_{2-} = I_{out} + I_{2+}$$

e que a tensão nas linhas é contínua, e portanto

$$V_{1-} = V_{1+} \quad (3.28)$$

$$V_{2-} = V_{2+},$$

é fácil notar que

$$\begin{bmatrix} V_{1-} \\ V_{2-} \\ I_{1-} \\ I_{2-} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}_{\text{mosfet}} \begin{bmatrix} V_{1+} \\ V_{2+} \\ I_{1+} \\ I_{2+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & 1 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1+} \\ V_{2+} \\ I_{1+} \\ I_{2+} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{mosfet}}$  é a matriz de transmissão do bloco-MOSFET. Os valores para os parâmetros do transistor foram retirados de [5] e encontram-se abaixo.

$$R_i = 7 \Omega$$

$$R_{ds} = 400 \Omega$$

$$C_{gs} = 0.3 \text{ pF}$$

$$C_{ds} = 0.12 \text{ pF}$$

$$C_{gd} = 0.01 \text{ pF}$$

$$g_m = 40 \text{ mS}$$

### 3.2.3 Bloco-MOSFET simplificado

Aqui é ainda útil considerar uma simplificação do bloco-MOSFET apresentado na subsecção 3.2.2, não só porque torna a matriz de admitâncias considerada mais simples de escrever e de ler, mas também porque torna bastante mais óbvio o comportamento não-recíproco do transistor e como este há de afetar o comportamento geral do sistema global. Esta simplificação (que é bastante válida, uma vez que a capacidade deste condensador é mais do que uma ordem de grandeza inferior às outras duas capacidades dos outros dois condensadores, entre os terminais porta e fonte e entre dreno e fonte) consiste em desprezar o acoplamento existente entre a porta e o dreno do MOSFET, posto em prática pelo condensador  $C_{gd}$ , retirando-o. Com  $C_{gd} = 0$  pF, os parâmetros da matriz  $\bar{Y}_{\text{mosfet}}$  ficam agora

$$Y_{11} = \frac{j\omega C_{gs}}{1 + j\omega C_{gs} R_i}, \quad (3.30)$$

$$Y_{12} = 0, \quad (3.31)$$

$$Y_{21} = \frac{g_m}{1 + j\omega C_{gs} R_i} \quad (3.32)$$

e

$$Y_{22} = \frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds}. \quad (3.33)$$

Assim, é relativamente fácil aferir a partir daqui que o acoplamento da linha 2 para a linha 1 é inexistente, só havendo acoplamento da linha 1 para a linha 2, daí a não-reciprocidade que, novamente, aqui é colocada como óbvia mas que também pode ser verificada com o modelo completo do transistor, como se poderá observar a seguir.

### 3.2.4 Matriz de transmissão global

Pretende-se agora saber qual é a matriz "ABCD" do conjunto inteiro de blocos (com comprimento  $Nd$ ) que definem esta implementação do problema.

Note-se um bloco central formado pelo par bloco-MOSFET e bloco-linha (que tem uma matriz de transmissão  $\bar{T}_{\text{central}} = \bar{T}_{\text{mosfet}} \cdot \bar{T}_{\text{linha,d}}$ ), e que estes estão repetidos de  $N - 1$  vezes. De seguida existe outro bloco-MOSFET e a delimitar o conjunto dois blocos-linha com metade do comprimento. Nomeadamente tem-se

$$\bar{T}_{\text{exato}} = \bar{T}_{\text{linha,d}/2} \cdot \bar{T}_{\text{central}}^{N-1} \cdot \bar{T}_{\text{mosfet}} \cdot \bar{T}_{\text{linha,d}/2}, \quad (3.34)$$

de tal forma que

$$\Psi(0) = \bar{T}_{\text{exato}} \cdot \Psi(Nd). \quad (3.35)$$

Este último resultado deve ser concordante com o resultado obtido na solução do problema efetivo, que se discute a seguir.

# 4

## Validação do modelo estudado

### Conteúdo

---

4.1 Solução do problema efetivo . . . . .	34
4.2 Comparação dos problemas e resposta em frequência . . . . .	34

---

## 4.1 Solução do problema efetivo

Aqui analisar-se-á o mesmo problema de uma forma mais prática e intuitiva, generalizando o conceito por detrás do sistema de linhas de transmissão estudado anteriormente.

Para isso, há que distribuir o efeito dos transístores pelas duas linhas afim de se poder descartar a estrutura periódica carregada pelos mesmos e, em vez dela, obter-se um sistema homogéneo, mais simples, voltando à estrutura representada na figura 3.1.

No entanto, a matriz  $\bar{\mathbf{M}}_{\text{teo}}$ , embora ainda que tenha de ter em conta as as capacidades distribuídas de cada linha  $C_{11}$  e  $C_{22}$ , deverá ser agora baseada no efeito concreto que o MOSFET exerce sobre a linha e não na capacidade de acoplamento  $C_{21}$  que partiu da analogia com o problema do MOSFET-metamaterial. Assim, esta matriz  $\bar{\mathbf{M}}_{\text{teo}}$ , que por conveniência se poderá chamar-se agora  $\bar{\mathbf{M}}_{\text{ef}}$  passa a ser dada por

$$\bar{\mathbf{M}}_{\text{ef}} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \bar{\mathbf{L}}_{\text{ef}} \\ \cdots & & \cdots \\ \bar{\mathbf{C}}_{\text{ef}} & \vdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde

$$\bar{\mathbf{L}}_{\text{ef}} = \bar{\mathbf{L}}_0 = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

é, em todo, idêntica à situação anterior, mas

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{ef}} = \bar{\mathbf{C}}_0 + \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{\text{mosfet}}}{j\omega d}, \quad (4.3)$$

onde por sua vez

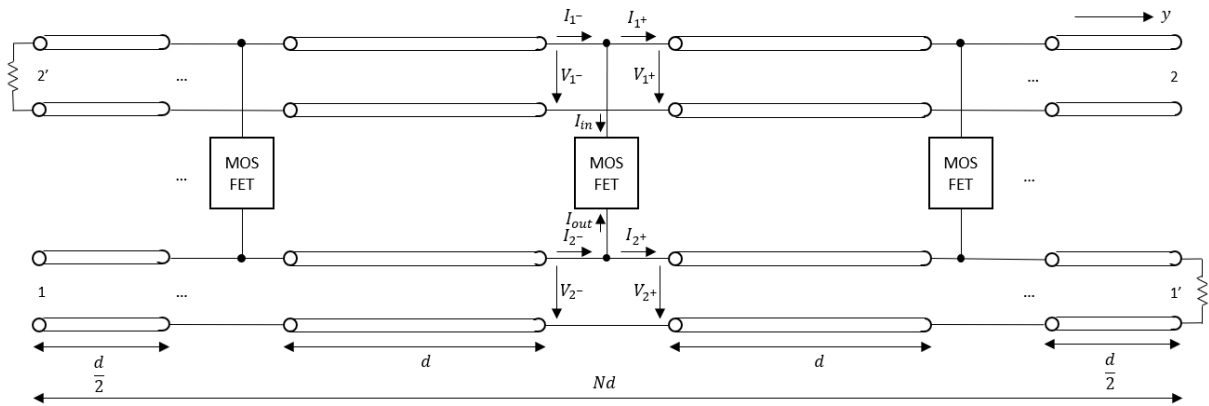
$$\bar{\mathbf{C}}_0 = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

representa as capacidades distribuídas das linhas desacopladas.

Tal como anteriormente, calcula-se agora a matriz de transferência do sistema tal como em (3.12) mas com a nova matriz  $\bar{\mathbf{M}}_{\text{ef}}$  e  $y = Nd$ . Esta nova matriz,  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{ef}}$ , deverá ser idêntica a  $\bar{\mathbf{T}}_{\text{exato}}$ .

## 4.2 Comparação dos problemas e resposta em frequência

De modo a comparar-se os dois problemas referidos pretende-se observar as respostas em frequência de cada um dos parâmetros de *scattering* (matriz  $\mathbf{S}$ ) obtidas para cada caso. Para o efeito, considere-se os dois sistemas com as linhas terminadas com cargas adaptadas num dos portos (sendo esses portos de lados opostos entre as duas linhas), da maneira que se encontra representada na figura 4.1, no caso, para o problema exato. Desta maneira, passe-se a interpretar o sistema como um diporto, com portos 1 e 2 também indicados na figura.



**Figura 4.1:** Sistema considerado no problema exato, com um porto de cada linha de transmissão terminado com cargas adaptadas (às respetivas linhas), de modo a que o sistema fique disposto como um diporto (com o porto 1 de entrada, em baixo à esquerda, e o porto 2 de saída, em cima e à direita).

Há que definir os parâmetros das linhas de transmissão dos sistemas a comparar. Utilizam-se para isso as expressões da velocidade de propagação e da impedância característica da linha [5], respetivamente,

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (4.5)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Admitindo que estes casos se referem a implementações em tecnologia de *microstrip*, a velocidade de propagação é dada por

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_e}}, \quad (4.6)$$

onde  $\varepsilon_e$  é a constante dielétrica efetiva da micro-tira, e por sua vez, é escrita da forma

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{d}{W}}}, \quad (4.7)$$

onde  $\frac{W}{d}$  é o quociente entre a largura do condutor da micro-tira e a espessura do substrato da mesma [5]. Este é dado por

$$\frac{W}{d} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A}-2} & \text{se } \frac{W}{d} < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left( B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r} \left( \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\varepsilon_r} \right) \right) & \text{se } \frac{W}{d} > 2, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left( 0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r} \right)}, \quad (4.9)$$

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Sabe-se que a constante dielétrica relativa  $\varepsilon_r$  toma, tipicamente, valores entre 2 e 4. Assim, considera-



se  $\varepsilon_r = 2$  e  $Z_0 = 50 \Omega$  para a linha de transmissão de entrada do diporto (linha debaixo, segundo o esquema da figura 4.1) e portanto, através das expressões presentes em (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9), conclui-se que os parâmetros  $L$  e  $C$  dessa mesma linha são

$$L_1 = 219.31 \text{ nH},$$

$$C_{11} = 87.72 \text{ pF}.$$

Relativamente à segunda linha, pode considerar-se uma indutância e uma capacidade distribuídas igual e 1.1 vezes superior à indutância e capacidade distribuídas da primeira linha, respetivamente, visto já se ter considerado de tal modo anteriormente, com parâmetros normalizados. Então, para a segunda linha tem-se

$$L_2 = L_1 = 219.31 \text{ nH},$$

$$C_{22} = 1.1 C_{11} = 96.49 \text{ pF}.$$

Note-se que, ao considerar-se estes valores para os parâmetros distribuídos das duas linhas têm-se impedâncias características também diferentes, a saber, pela expressão respetiva em (4.5),

$$Z_{01} = 50 \Omega,$$

$$Z_{02} = 47.67 \Omega,$$

(sendo que a primeira foi assumida por hipótese), para a primeira e segunda linhas de transmissão.

Resta apenas definir o comprimento dos sistemas a usar, que deve ser fixo. Sabe-se que, para o modelo efetivo ser válido, há que cumprir a condição  $d \ll \frac{c}{\omega}$  [5], o que quer dizer, sem perda de substancial validade, que

$$d < 0.1 \frac{c}{\omega}. \quad (4.10)$$

Garantindo tal restrição para um máximo de  $f = 5 \text{ GHz}$ , ou seja,  $\omega = \pi \times 10^{10} \text{ rad s}^{-1}$ , tem-se  $d = 0.955 \text{ mm}$ . Escolhe-se  $N = 19$ , o que significa que os sistemas medem  $N d = 1.814 \text{ cm}$ .

Calculando agora as matrizes de transmissão referentes aos dois problemas, escolhendo para isso, a título de exemplo, o caso  $\omega = 3 \times 10^8 \text{ rad s}^{-1}$ , obtêm-se (depois de arredondadas à terceira casa decimal)

$$\bar{\mathbf{T}}_{\text{exato}} = \begin{bmatrix} 0.999 & 0 & j1.193 & 0 \\ -0.002 + j0.453 & 0.999 + j0.028 & -0.181 & -0.011 + j1.193 \\ j0.002 & 0 & 0.999 & 0 \\ 0.759 + j0.007 & 0.047 + j0.002 & -0.002 + 0.453 & 0.999 + j0.028 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\text{ef}} = \begin{bmatrix} 0.999 & 0 & j1.193 & 0 \\ -0.002 + j0.453 & 0.999 + j0.028 & -0.18 & -0.011 + j1.193 \\ j0.002 & 0 & 0.999 & 0 \\ 0.759 + j0.007 & 0.047 + j0.002 & -0.002 + 0.453 & 0.999 + j0.028 \end{bmatrix},$$

cuja semelhança, tal como se pode observar, comprova a validade do modelo efetivo.

De modo a analisar agora a resposta em frequência da estrutura construída (para cada caso), procede-se ao cálculo da matriz de *scattering* da mesma. Encontre-se primeiro a matriz de transmissão do sistema reduzido (diporto). Sabe-se que

$$\begin{bmatrix} V_{2'} \\ V_1 \\ I_{2'} \\ I_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_{1'} \\ I_2 \\ I_{1'} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

sendo  $\overline{\mathbf{T}}_{4 \times 4}$  é a matriz de transmissão do sistema (quer do problema exato ou do efetivo), e que

$$V_{1'} = Z_{01} I_{1'}, \quad (4.12)$$

$$V_{2'} = -Z_{02} I_{2'}. \quad (4.13)$$

Daqui constrói-se a relação

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_{2 \times 2} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde  $\overline{\mathbf{T}}_{2 \times 2}$  é dada genericamente por

$$[\mathbf{T}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Com a nova matriz de transmissão e sabendo que

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^+ + V_1^-, \\ V_2 &= V_2^+ + V_2^-, \\ I_1 &= \frac{V_1^+}{Z_{01}} - \frac{V_1^-}{Z_{01}}, \\ I_2 &= \frac{V_2^-}{Z_{02}} - \frac{V_2^+}{Z_{02}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo que as últimas definições estão de acordo com a convenção representada na figura 4.2, pode calcular-se diretamente a matriz S do mesmo sistema reduzido, presente na relação

$$\begin{bmatrix} \frac{V_1^-}{Z_{01}} \\ \frac{V_2^-}{Z_{02}} \end{bmatrix} = [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} \frac{V_1^+}{Z_{01}} \\ \frac{V_2^+}{Z_{02}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{V_1^-}{Z_{01}} \\ \frac{V_2^-}{Z_{02}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{V_1^+}{Z_{01}} \\ \frac{V_2^+}{Z_{02}} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

concluindo-se que

$$s_{11} = \frac{B - D Z_{01} + (A - C Z_{01}) Z_{02}}{B + D Z_{01} + (A + C Z_{01}) Z_{02}}, \quad (4.18)$$

$$s_{12} = \frac{2(AD - BC)\sqrt{Z_{01}}\sqrt{Z_{02}}}{B + D Z_{01} + (A + C Z_{01}) Z_{02}}, \quad (4.19)$$

$$s_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}}\sqrt{Z_{02}}}{B + D Z_{01} + (A + C Z_{01}) Z_{02}}, \quad (4.20)$$

$$s_{22} = \frac{B + D Z_{01} - (A + C Z_{01}) Z_{02}}{B + D Z_{01} + (A + C Z_{01}) Z_{02}}. \quad (4.21)$$



**Figura 4.2:** Convenção assumida de direção das ondas de *scattering* de um diporto, como o considerado nesta secção.

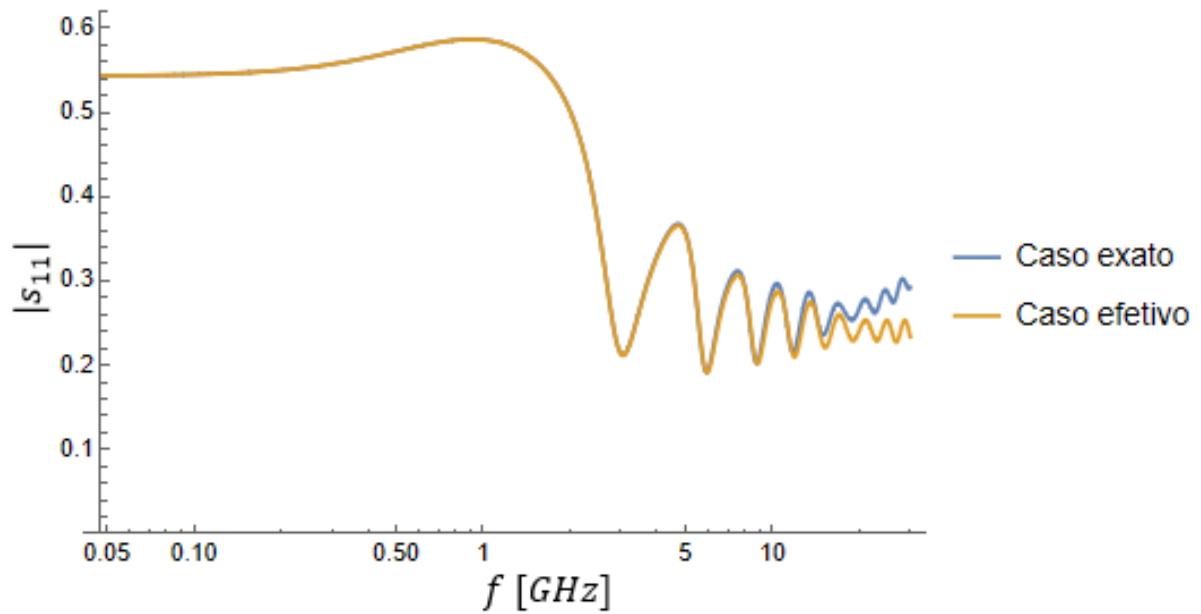
Calculando agora as matrizes de *scattering* referentes aos dois problemas, escolhendo para isso, a título de exemplo, o caso  $\omega = 3 \times 10^8 \text{ rad s}^{-1}$ , obtêm-se (depois de arredondadas à terceira casa decimal)

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{exato}} = \begin{bmatrix} -0.543 + j0.007 & -8.453 + j0.583 \\ 0 & -0.003 - j0.039 \end{bmatrix},$$

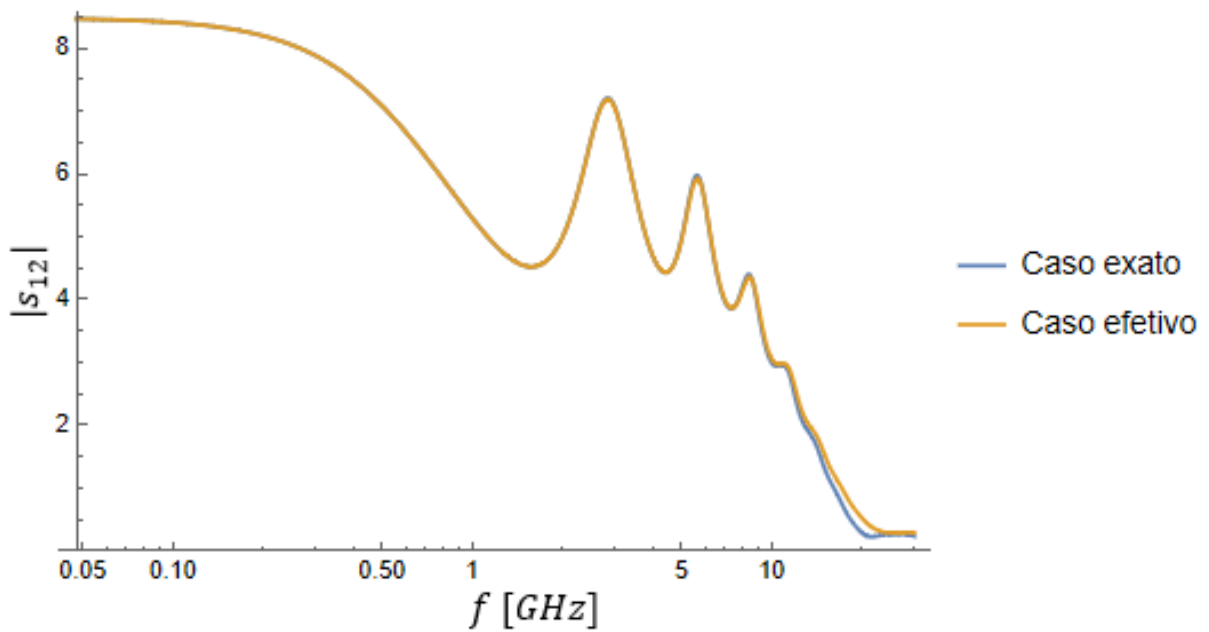
$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{ef}} = \begin{bmatrix} -0.543 + j0.007 & -8.452 + j0.587 \\ 0 & -0.003 - j0.039 \end{bmatrix},$$

cuja semelhança, tal como se pode observar, comprova a validade do modelo efetivo.

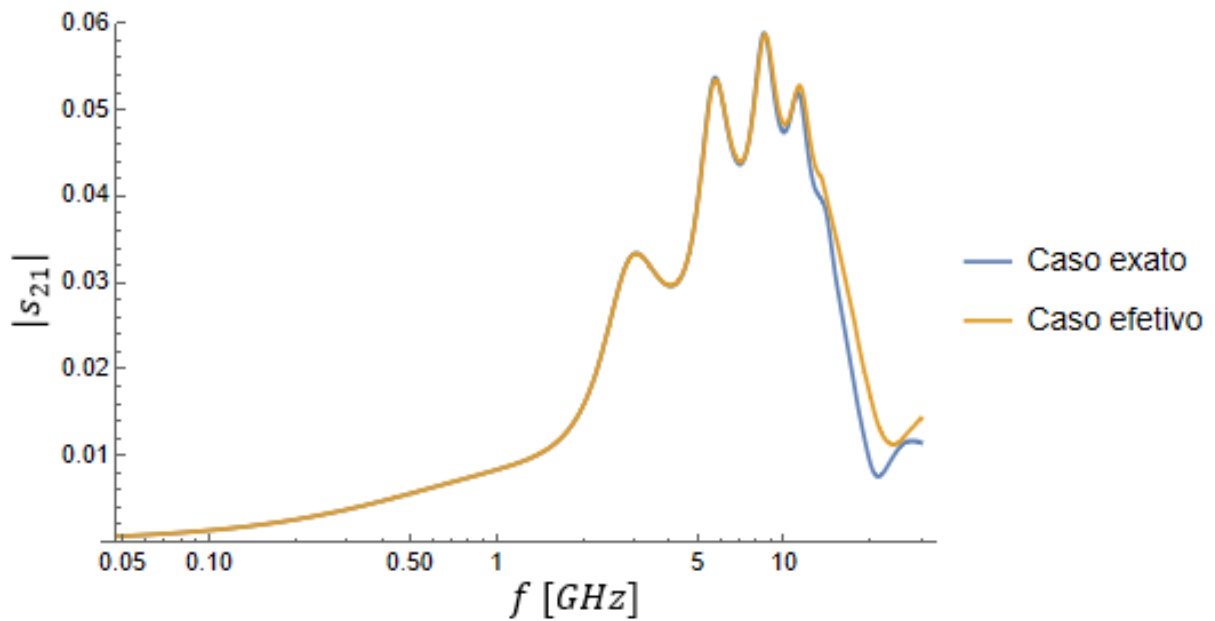
Finalmente, tendo cada um dos parâmetros da matriz de *scattering*, pode representar-se o comportamento dos mesmos consoante a frequência e consoante se trate do problema exato ou do problema efetivo (colocando as matrizes de transmissão respetivas em (4.11)), tal como se encontra nas figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6.



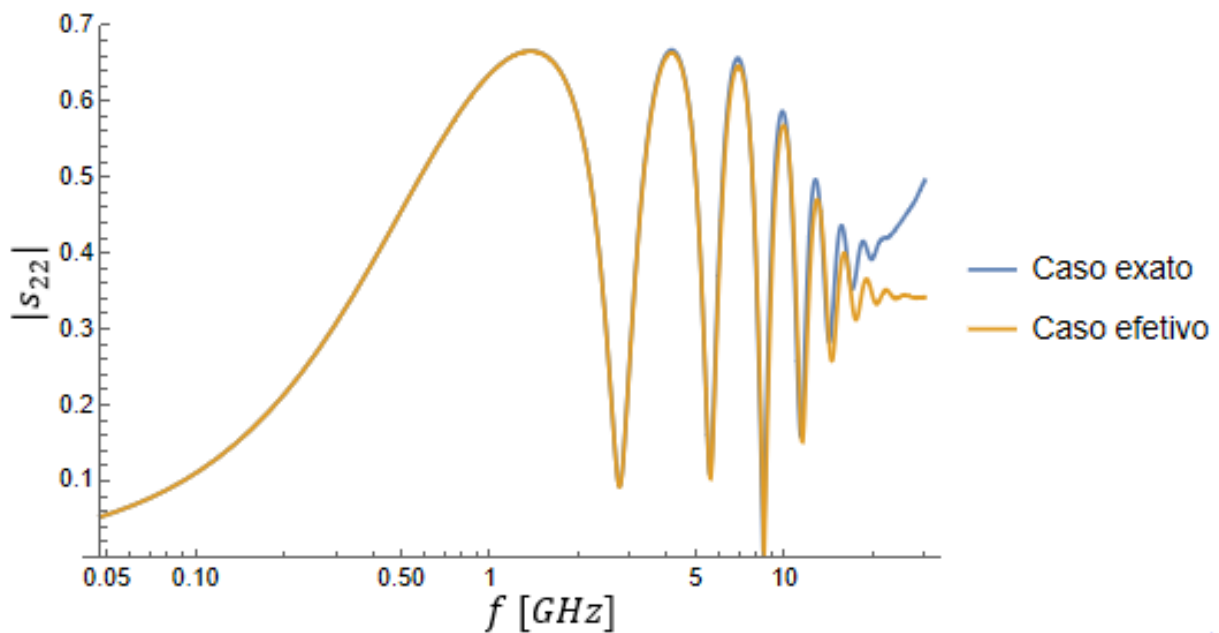
**Figura 4.3:** Módulo do parâmetro  $s_{11}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência.



**Figura 4.4:** Módulo do parâmetro  $s_{12}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência.



**Figura 4.5:** Módulo do parâmetro  $s_{21}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência.



**Figura 4.6:** Módulo do parâmetro  $s_{22}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência.

Tal como se pode observar, os gráficos referentes ao problema exato e ao problema efetivo são semelhantes com apenas ligeiras diferenças, demonstrando, portanto, mais uma vez, a validade do modelo efetivo utilizado.

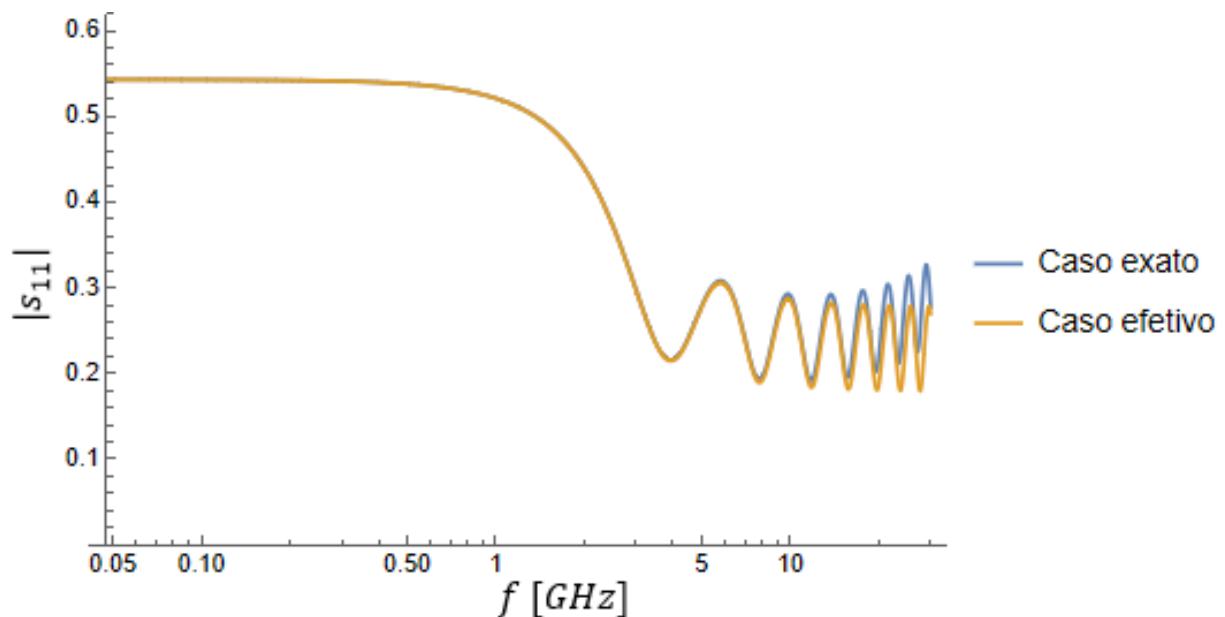
Relativamente aos gráficos em si, pode dizer-se que se observa um comportamento destoante a par-

tir de uma certa (alta) frequência, o que poderá ser explicado pelo efeito provocado pelos condensadores dos MOSFET. Nomeadamente, a diminuição das suas impedâncias, que faz com que a propagação já não se dê apenas num sentido dentro dos próprios transístores, faz com que a propagação já não se dê apenas num sentido na estrutura toda.

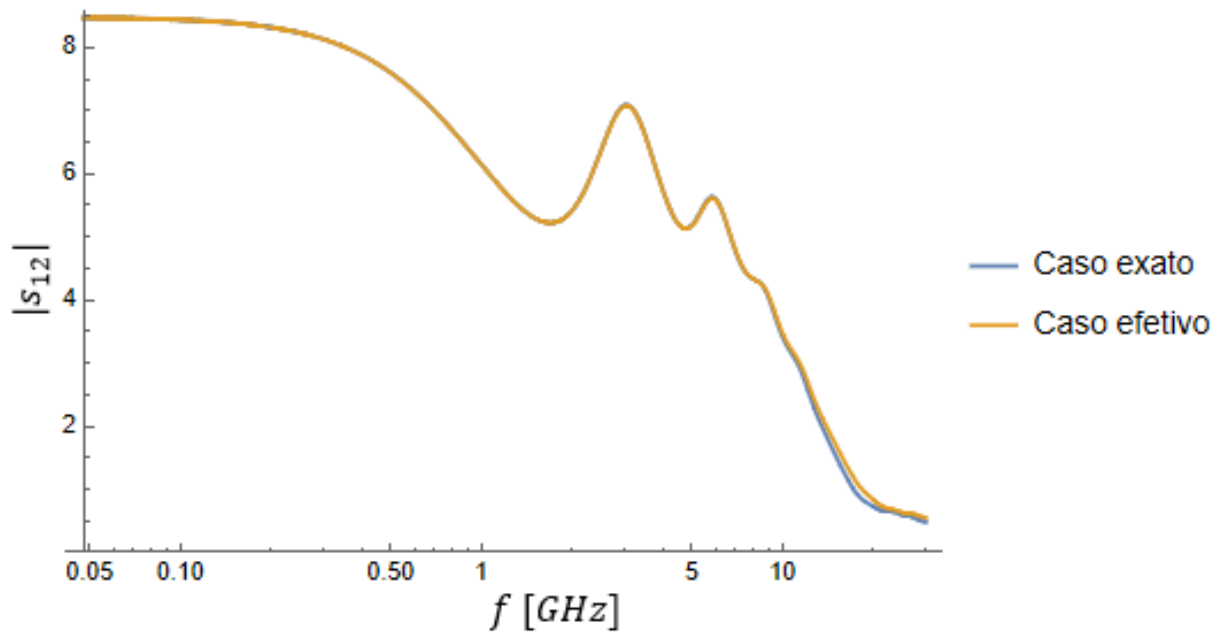
Isto aliado ao facto do comprimento dos sistemas (em particular, das linhas) ter sido dimensionado com base no cumprimento da condição (4.10) para um máximo de 5 GHz e portanto, estando comprometida a validade dos modelos a partir de aí (e cada vez mais, à medida que se aumenta a frequência), escolheu-se não representar os parâmetros de *scattering* para além dos 30 GHz.

Note-se também que, como esperado, o módulo do parâmetro  $s_{21}$  é aproximadamente nulo (da ordem de grandeza -2), apresentando apenas alguns picos em torno de 10 GHz, devendo-se tal comportamento à resposta não-recíproca de ambos os sistemas, e que o módulo do parâmetro  $s_{12}$ , para baixas frequências (mais concretamente, para frequências mais baixas do que 20 GHz, praticamente) é maior que 1, o que comprova que ambos os modelos se tratam de amplificadores. Em contrapartida, os parâmetros  $s_{11}$  e  $s_{22}$  não podem ser (e não são) maiores que 1, visto que o sinal que é observado nessas medidas não passa pelos elementos responsáveis pela amplificação (os transístores). Mais concretamente, devido ao comportamento não recíproco, se o sinal passar pelos transístores, não retorna ao porto de origem, se não passar pelos transístores, não é amplificado.

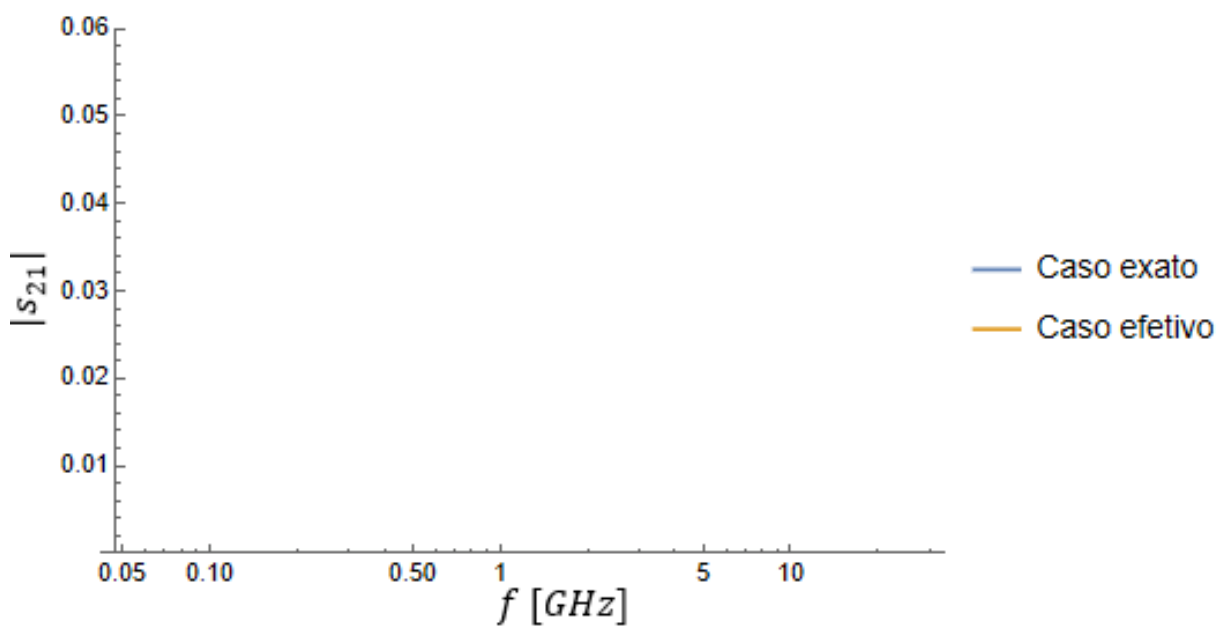
Pode também calcular-se os parâmetros de *scattering* para os dois casos mas com o modelo do MOSFET simplificado discutido na secção 3.2.3, onde se coloca a capacidade  $C_{gd} = 0$  pF. Com efeito, obtêm-se as figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10.



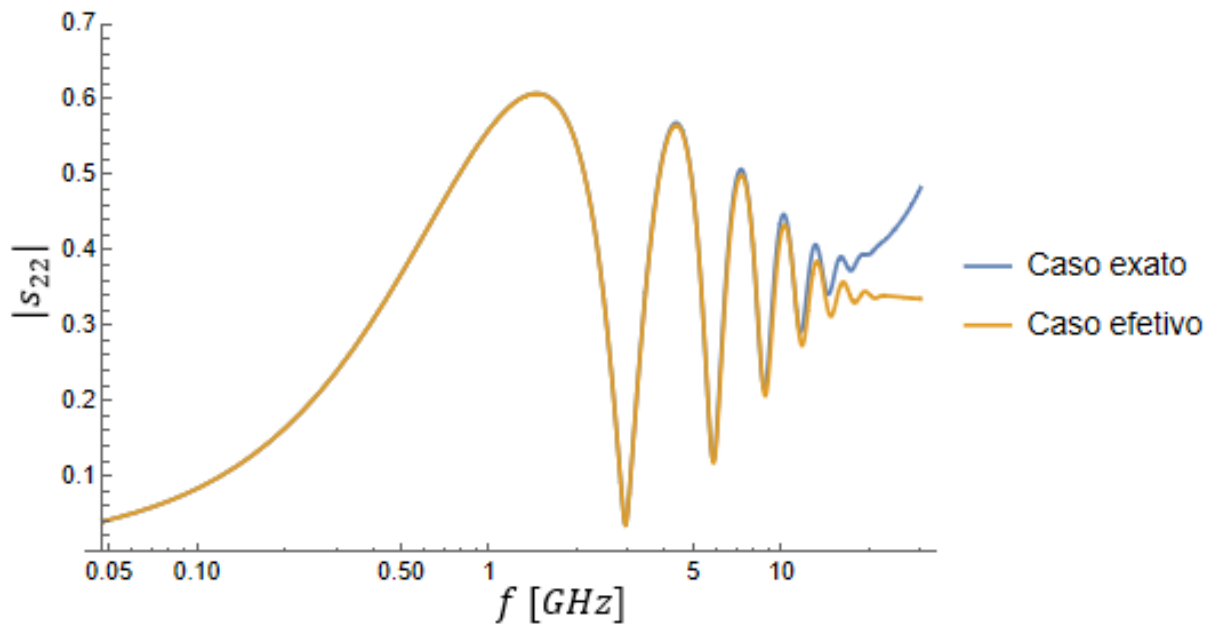
**Figura 4.7:** Módulo do parâmetro  $s_{11}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET.



**Figura 4.8:** Módulo do parâmetro  $s_{12}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET.



**Figura 4.9:** Módulo do parâmetro  $s_{21}$  da matriz de *scattering* (referente ao prolema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET.



**Figura 4.10:** Módulo do parâmetro  $s_{22}$  da matriz de *scattering* (referente ao problema exato, a azul, e ao problema efetivo, a laranja) em função da frequência, com o modelo simplificado do MOSFET.

Pelos gráficos obtidos, pode observar-se que os parâmetros do modelo exato e efetivo mantêm-se bastante semelhantes e não sofrem grande alteração mesmo em relação ao seu comportamento anterior, à exceção do parâmetro  $s_{21}$ , que fica a 0, o que significa que os sistemas ficam idealmente não-recíprocos.



# 5

## Conclusão

### Conteúdo

---

5.1 Conclusões do trabalho . . . . .	45
5.2 Trabalho futuro . . . . .	46
5.3 Métodos utilizados . . . . .	46

---

## 5.1 Conclusões do trabalho

Em suma, materiais não-hermitianos são meios que têm a peculiaridade de apresentar uma matriz de permissividade elétrica (no caso particular deste trabalho) não-hermitiana, e por isso, podem gerar ou absorver energia das ondas que por eles se propagam. Existem também os materiais não-recíprocos, que garantem uma propagação diferenciada, consoante o sentido numa determinada direção e tal como os não-hermitianos, podem ser implementados utilizando meta-materiais, abrindo espaço para a exploração de soluções mais exóticas. O estudo e desenvolvimento destes materiais pode vir a beneficiar muito áreas como a ótica, a computação, a transmissão de informação e aplicações militares e nas telecomunicações. Neste trabalho, parte-se de um modelo teórico de um metamaterial, baseado no funcionamento de um transistor e afere-se as suas propriedades óticas, nomeadamente a sua não-hermiticidade e por outro lado a sua não-reciprocidade e anisotropia.

Nomeadamente, partindo do princípio-base de um MOSFET, define-se a matriz de permissividade elétrica e seguidamente as constantes de onda dos modos de propagação suportados em cada direção de propagação. Daqui, também se consegue retirar os campos elétricos dos próprios modos e, a partir de uma sobreposição destes, para cada uma das direções, obtém-se o valor médio do vetor de Poynting em função da posição. Aqui conclui-se que, na direção  $y$ , o vetor de Poynting tanto cresce quanto decresce, de forma aproximadamente sinusoidal, e como tal, a energia das ondas que passam pelo metamaterial tanto é amplificada como absorvida, respetivamente, confirmando a não-hermiticidade deste. Também se observa que, para a direção  $x$ , o vetor de Poynting não é paralelo à direção de propagação, tendo componentes nas três direções do espaço, sendo que, em particular na direção  $y$ , se observa o mesmo comportamento variável (mas com uma magnitude de ordem mais baixa) que se observa para o vetor de Poynting no caso da direção de propagação segundo  $y$ . Conclui-se ainda, utilizando o princípio da conservação de energia de um determinado sistema, que, dependendo da polarização da onda que atravessa o metamaterial (que é variável através das variáveis de ponderação introduzidas aquando da anterior sobreposição de modos), a derivada da curva do vetor de Poynting varia para uma mesma posição, o que implica que o nível de absorção/amplificação de energia (perdas/ganho) do meio para essa mesma posição, também varia. Nomeadamente, para uma polarização linear, circular esquerda e circular direita o ganho observado é nulo, máximo e mínimo, respetivamente (na posição  $y = 0$ ).

De seguida, e admitindo a direção de propagação segundo  $y$ , utiliza-se as equações de Maxwell e as "equações do telégrafo" para se encontrar uma analogia entre os campos elétrico e magnético do modelo até então estudado e as tensões e correntes de um conjunto de duas linhas de transmissão acopladas (por hipótese) dispostas paralelamente. Com esta analogia, obtém-se uma matriz de transmissão deste sistema e estabelecendo-se uma comparação entre os dois modelos. Depois de obtido o vetor de Poynting verifica-se que este apresenta o mesmo comportamento em função da posição (agora

na linha de transmissão) que apresenta para o metamaterial, concluindo-se então sobre a validade da analogia entre os dois modelos.

Depois, pressupõe-se um sistema físico baseado nas mesmas duas linhas de transmissão dispostas paralelamente, mas agora acopladas periodicamente por transístores. Definindo-se a matriz de transmissão de cada bloco do sistema, consegue-se definir também a matriz global do sistema. Seguidamente, define-se o problema efetivo equivalente, que consiste num sistema homogéneo de duas linhas de transmissão acopladas pelo efeito distribuído de um MOSFET. Estabelece-se a matriz de transmissão do novo sistema e estabelece-se a comparação desta com a do sistema exato, concluindo-se no fim que são semelhantes e então é válido o modelo efetivo.

A seguir, calcula-se a matriz  $S$  dos dois sistemas e comparam-se os comportamentos dos parâmetros de *scattering*, confirmando-se finalmente, pela proximidade dos comportamentos, a validade do modelo efetivo.

## 5.2 Trabalho futuro

Felizmente, o objetivo deste trabalho foi concluído. No entanto, poder-se-ia e seria interessante completá-lo com o estudo adicional de outras direções do espaço, nomeadamente o estudo de um sistema construído segundo a direção  $x$ , e mais do que observar o comportamento dos parâmetros de *scattering* do mesmo, agora nesta fase final do trabalho, explorar todas as implicações que o facto do vetor de Poynting não ser paralelo à direção de propagação tem.

Também seria interessante completar este trabalho construindo, de facto, no laboratório, o sistema de linhas de transmissão carregado por transístores utilizado para o problema exato. Estudar diferentes dimensionamentos (em detrimento deste trabalho, em que se estudou apenas um) e concluir sobre a relevância relativa que as conclusões anteriores. Nomeadamente, perceber até que ponto é que os parâmetros de *scattering* foram mais afetados pela validade do dimensionamento do sistema do que pelos condensadores curto-circuitados dentro dos transístores, devido ao aumento da frequência.

## 5.3 Métodos utilizados

Os gráficos e expressões obtidos e apresentados aqui foram efetuados com as ferramentas de cálculo numérico MatLab e Mathematica. Nomeadamente, declarou-se, numa primeira fase, ainda com MatLab, de modo a obter-se as superfícies de iso-frequência, que a solução da equação (2.12) seria uma função das 3 componentes de um vetor de variáveis  $k$ . Para isso, recorreu-se à função *simplify*, antes de se representar a função com as funções *fimplicit3* e *fimplicit*. De seguida, para calcular as polarizações associadas a cada modo de cada direção de propagação, utilizou-se a função *eig* de forma a retirar

os valores e vetores próprios das matrizes  $\overline{\mathbf{M}}$  (em (2.12)) e retiraram-se os vetores próprios que tinham associados os valores próprios nulos. Recorreu-se à função *subspace* de forma a calcular o ângulo entre as duas polarizações associadas a cada direção. Posteriormente, a fim de se calcular o campo magnético para o cálculo do vetor de Poynting utilizou-se a definição de rotacional para definir uma função à base de derivadas, em que cada uma destas foi realizada com a função *diff*. Por fim, para o restante dos gráficos fez-se uso da função *plot* e utilizou-se as funções *dot*, *cross* e *kron* para representar o produto interno, o produto externo e o produto tensorial, respetivamente, em cálculos intermédios.

Depois, devido a problemas encontrados na representação da superfície de iso-frequência e dos seus cortes, recorreu-se ao Mathematica de modo a refazê-las e assim, utilizando a função *Solve* para resolver a equação (2.12), utilizando de seguida as funções *SphericalPlot3D* e *PolarPlot*, obtiveram-se a superfície de iso-frequência e os cortes segundo os três planos do espaço constantes neste trabalho. De seguida, de modo a calcular-se as matrizes de transmissão, utilizaram-se as funções *MatrixExp* e *MatrixPower*. Finalmente, para representar os comportamentos dos parâmetros de *scattering*, utilizou-se a função *LogLinearPlot*.

O código utilizado encontra-se na íntegra no anexo A.

# Bibliografia

- [1] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ," *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, p. 509–514, 1968.
- [2] "Zhang, X. and Liu, . Yongmin. metamaterial. *Encyclopedia Britannica*, May 2016. <https://www.britannica.com/topic/metamaterial>." [Online]. Available: <https://www.britannica.com/topic/metamaterial>.
- [3] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, "Experimental verification of a negative index of refraction," *Science*, vol. 292, no. 5514, p. 77–79, 2001.
- [4] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, "Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies," *Science*, vol. 314, no. 5801, p. 977–980, 2006.
- [5] D. M. Pozar, *Microwave engineering*. John wiley & sons, 2011.
- [6] S. A. Gangaraj and G. W. Hanson, "Topologically protected unidirectional surface states in biased ferrites: Duality and application to directional couplers," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 16, p. 449–452, 2017.
- [7] J. Adam, L. Davis, G. Dionne, E. Schloemann, and S. Stitzer, "Ferrite devices and materials," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 3, p. 721–737, 2002.
- [8] F. R. Prudêncio and M. G. Silveirinha, "Optical isolation of circularly polarized light with a spontaneous magnetoelectric effect," *Physical Review A*, vol. 93, no. 4, 2016.
- [9] T. Kodera, D. L. Sounas, and C. Caloz, "Magnetless nonreciprocal metamaterial (mnm) technology: Application to microwave components," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 61, no. 3, p. 1030–1042, 2013.
- [10] A. Mock, D. Sounas, and A. Alù, "Magnet-free circulator based on spatiotemporal modulation of photonic crystal defect cavities," *ACS Photonics*, vol. 6, no. 8, p. 2056–2066, 2019.

- [11] F. R. Prudêncio, S. A. Matos, and C. R. Paiva, "Asymmetric band diagrams in photonic crystals with a spontaneous nonreciprocal response," *Physical Review A*, vol. 91, no. 6, 2015.
- [12] A. R. Davoyan and N. Engheta, "Theory of wave propagation in magnetized near-zero-epsilon metamaterials: Evidence for one-way photonic states and magnetically switched transparency and opacity," *Physical Review Letters*, vol. 111, no. 25, p. 257401, December 2013. [Online]. Available: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.111.257401>
- [13] Z. Yu, G. Veronis, Z. Wang, and S. Fan, "One-way electromagnetic waveguide formed at the interface between a plasmonic metal under a static magnetic field and a photonic crystal," *Physical Review Letters*, vol. 100, no. 2, p. 023902, January 2008. [Online]. Available: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.100.023902>
- [14] S. Lannebère, D. E. Fernandes, T. A. Morgado, and M. G. Silveirinha, "Nonreciprocal and Non-Hermitian Material Response Inspired by Semiconductor Transistors," *Physical Review Letters*, vol. 128, no. 1, p. 013902, January 2022. [Online]. Available: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.128.013902>
- [15] M. Coppolaro, M. Moccia, V. Caligiuri, G. Castaldi, N. Engheta, and V. Galdi, "Extreme-Parameter Non-Hermitian Dielectric Metamaterials," *ACS Photonics*, vol. 7, no. 9, pp. 2578–2588, September 2020. [Online]. Available: <https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/acsp Photonics.0c00924>
- [16] V. Achilleos, G. Theocharis, O. Richoux, and V. Pagneux, "Non-Hermitian acoustic metamaterials: Role of exceptional points in sound absorption," *Physical Review B*, vol. 95, no. 14, p. 144303, April 2017. [Online]. Available: <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.95.144303>
- [17] A. Ghatak, M. Brandenbourger, J. van Wezel, and C. Coulais, "Observation of non-hermitian topology and its bulk–edge correspondence in an active mechanical metamaterial," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 117, no. 47, p. 29561–29568, 2020.
- [18] X. Zhou, Y. Wang, D. Leykam, and Y. Chong, "Optical isolation with nonlinear topological photonics," *Frontiers in Optics 2017*, 2017.
- [19] S. V. Zhukovsky and A. G. Smirnov, "All-optical diode action in asymmetric nonlinear photonic multilayers with perfect transmission resonances," *Physical Review A*, vol. 83, no. 2, 2011.
- [20] H. Ramezani, T. Kottos, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, "Unidirectional nonlinear pt-symmetric optical structures," *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 043803, Oct 2010. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.043803>
- [21] D. R. Barton, H. Alaeian, M. Lawrence, and J. Dionne, "Broadband and wide-angle nonreciprocity with a non-hermitian metamaterial," *Physical Review B*, vol. 97, no. 4, 2018.

- [22] C. Caloz, A. Alù, S. Tretyakov, D. Sounas, K. Achouri, and Z.-L. Deck-Léger, “Electromagnetic nonreciprocity,” *Physical Review Applied*, vol. 10, no. 4, 2018.



## Código Utilizado

**Listagem A.1:** Código MatLab utilizado na maioria do capítulo 2

```
1 I = eye(3);
2 miu_0 = 4*pi*10^(-7);
3 per = zeros(3,3);
4 per(1,1) = 1;
5 per(1,3) = 0.1;
6 per(3,1) = 0;
7 per(2,2) = 1.1;
8 per(3,3) = 1.2;
9 c = 3*10^8;
10 w = 1*c;
11 f = w/(2*pi);
12 lambda_0 = c/f;
13
```



```

14 syms k_x k_y k_z
15 S = simplify(expand(det(dot([k_x k_y k_z],[k_x k_y k_z])*I - kron([k_x k_y k_z],
      transpose([k_x k_y k_z]))) - (w/c)^2*per)), 'IgnoreAnalyticConstraints', true);
16 f = @(k_x,k_y,k_z) eval(S);
17
18
19 figure
20 fimplicit3(f);
21 set(gca, 'FontSize', 18);
22 xlabel('k_x');
23 ylabel('k_y');
24 zlabel('k_z');
25
26 f_k_x_k_y = @(k_x,k_y) f(k_x,k_y,0);
27 f_k_y_k_z = @(k_y,k_z) f(0,k_y,k_z);
28 f_k_x_k_z = @(k_x,k_z) f(k_x,0,k_z);
29
30
31 figure
32 fimplicit(f_k_x_k_y, [-1.5 1.5 -1.5 1.5], 'linewidth', 2);
33 set(gca, 'FontSize', 18);
34 xlabel('k_x');
35 ylabel('k_y');
36
37 figure
38 fimplicit(f_k_y_k_z, [-1.5 1.5 -1.5 1.5], 'linewidth', 2);
39 set(gca, 'FontSize', 18);
40 xlabel('k_y');
41 ylabel('k_z');
42
43 figure
44 fimplicit(f_k_x_k_z, [-1.5 1.5 -1.5 1.5], 'linewidth', 2);
45 set(gca, 'FontSize', 18);
46 xlabel('k_x');
47 ylabel('k_z');
48
49 f_k_x = @(k_x) f(k_x,0,0);
50 f_k_y = @(k_y) f(0,k_y,0);

```

```

51 f_k_z = @(k_z) f(0,0,k_z);
52
53 kxx_1 = fzero(f_k_x,1.05);
54 kxx_2 = fzero(f_k_x,1.09);
55 kyy_1 = fzero(f_k_y,1);
56 kyy_2 = fzero(f_k_y,1.09);
57 kzz_1 = fzero(f_k_z,1);
58 kzz_2 = fzero(f_k_z,1.05);
59
60 M = @(k_x,k_y,k_z) dot([k_x k_y k_z],[k_x k_y k_z])*I - kron([k_x k_y k_z],
    transpose([k_x k_y k_z])) - (w/c)^2*per;
61 M_x = @(k_x) M(k_x,0,0);
62 m1_x = round(M_x(kxx_1),2);
63 m2_x = round(M_x(kxx_2),2);
64
65 M_y = @(k_y) M(0,k_y,0);
66 m1_y = round(M_y(kyy_1),4);
67 m2_y = round(M_y(kyy_2),4);
68
69 M_z = @(k_z) M(0,0,k_z);
70 m1_z = round(M_z(kzz_1),4);
71 m2_z = round(M_z(kzz_2),4);
72
73
74 [V_x_1,D_x_1] = eig(m1_x);
75 [V_x_2,D_x_2] = eig(m2_x);
76 [V_y_1,D_y_1] = eig(m1_y);
77 [V_y_2,D_y_2] = eig(m2_y);
78 [V_z_1,D_z_1] = eig(m1_z);
79 [V_z_2,D_z_2] = eig(m2_z);
80
81 lambda_nulo = zeros(1,6);
82 for j = 1:3
83     if D_x_1(j,j) == 0
84         lambda_nulo(1) = j;
85     end
86     if D_x_2(j,j) == 0
87         lambda_nulo(2) = j;

```

```

88     end
89     if D_y_1(j,j) == 0
90         lambda_nulo(3) = j;
91     end
92     if D_y_2(j,j) == 0
93         lambda_nulo(4) = j;
94     end
95     if D_z_1(j,j) == 0
96         lambda_nulo(5) = j;
97     end
98     if D_z_2(j,j) == 0
99         lambda_nulo(6) = j;
100    end
101 end
102
103 syms x y z
104
105 E10_x = V_x_1(:,lambda_nulo(1));
106 E1_x = E10_x*exp(-1i*kxx_1*x);
107 E20_x = V_x_2(:,lambda_nulo(2));
108 E2_x = E20_x*exp(-1i*kxx_2*x);
109 angle_x = 180/pi*subspace(E10_x,E20_x);
110
111 A2_x = 1;
112 A1_x = 1;
113 E_x = A1_x*E1_x + A2_x*E2_x;
114
115 E10_y = V_y_1(:,lambda_nulo(3));
116 E1_y = E10_y*exp(-1i*kyy_1*y);
117 E20_y = V_y_2(:,lambda_nulo(4));
118 E2_y = E20_y*exp(-1i*kyy_2*y);
119 angle_y = 180/pi*subspace(E10_y,E20_y);
120
121 A2_y = 1;
122 A1_y = 1;
123 E_y = A1_y*E1_y + A2_y*E2_y;
124
125 E10_z = V_z_1(:,lambda_nulo(5));

```

```

126 E1_z = E10_z*exp(-1i*kzz.1*z);
127 E20_z = V_z.1(:, lambda_nulo(6));
128 E2_z = E20_z*exp(-1i*kzz.2*z);
129 angle_z = 180/pi*subspace(E10_z, E20_z);
130
131 A2_z = 1;
132 A1_z = 1;
133 E_z = A1_z*E1_z + A2_z*E2_z;
134
135 rot_E_x = transpose([diff(E_x(3), y)-diff(E_x(2), z) diff(E_x(1), z)-diff(E_x(3), x)
diff(E_x(2), x)-diff(E_x(1), y)]);
136 rot_E_y = transpose([diff(E_y(3), y)-diff(E_y(2), z) diff(E_y(1), z)-diff(E_y(3), x)
diff(E_y(2), x)-diff(E_y(1), y)]);
137 rot_E_z = transpose([diff(E_z(3), y)-diff(E_z(2), z) diff(E_z(1), z)-diff(E_z(3), x)
diff(E_z(2), x)-diff(E_z(1), y)]);
138
139 H_x = rot_E_x/(-1i*w*miu_0);
140 H_y = rot_E_y/(-1i*w*miu_0);
141 H_z = rot_E_z/(-1i*w*miu_0);
142
143 S_x = 0.5*real(cross(E_x, conj(H_x)));
144 S_y = 0.5*real(cross(E_y, conj(H_y)));
145 S_z = 0.5*real(cross(E_z, conj(H_z)));
146
147 x = linspace(0, 252);
148
149 figure
150 plot(x/lambda_0, eval(S_x(1))/min(eval(S_x(1))), 'linewidth', 2);
151 set(gca, 'FontSize', 18);
152 xlim([0 40]);
153 ylim([0 2]);
154 xlabel('x normalizado');
155 ylabel('S_x-x');
156
157 figure
158 plot(x/lambda_0, eval(S_x(2))/abs(min(eval(S_x(2)))), '--<', 'linewidth', 2);
159 set(gca, 'FontSize', 18);
160 xlim([0 40]);

```

```

161 ylim([-1.5 1.5]);
162 xlabel('x normalizado');
163 ylabel('S_x-y');
164
165 figure
166 plot(x/lambda_0,eval(S_x(3))/min(eval(S_x(3))),'linewidth',2);
167 set(gca,'FontSize',18);
168 xlim([0 40]);
169 ylim([0 2]);
170 xlabel('x normalizado');
171 ylabel('S_x-z');
172
173 y = linspace(0,252);
174 figure
175 plot(y/lambda_0,eval(S_y(2))/min(eval(S_y(2))),'linewidth',2);
176 set(gca,'FontSize',18);
177 xlim([0 40]);
178 ylim([0.5 3]);
179 xlabel('y normalizado');
180 ylabel('S_y normalizado');
181
182 z = linspace(0,252);
183 figure
184 plot(z/lambda_0,eval(S_z(3))/min(eval(S_z(3))),'linewidth',2);
185 set(gca,'FontSize',18);
186 xlim([0 40]);
187 ylim([0 2]);
188 xlabel('z normalizado');
189 ylabel('S_z normalizado');

```

**Listagem A.2:** Código Mathematica para as superfícies de isofrequência do capítulo 2

```

1
2 x1 = r*Sin[theta]*Cos[phi]
3 y1 = r*Sin[theta]*Sin[phi]
4 z1 = r*Cos[theta]
5
6 sol = Solve[

```

```

7   Det[{x1, y1, z1} . {x1 , y1 , z1}*{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0,
8     1}} - TensorProduct[{x1, y1 , z1},
9     Transpose[{x1, y1, z1}]] - {{1, 0, 0.1}, {0, 1.1, 0}, {0, 0,
10    1.2}}] == 0, r]
11
12 SphericalPlot3D[{r2, r1}, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {x, y, z}]
13
14 theta = Pi/2
15
16 PolarPlot[{r1, r2}, {phi, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {x, y}]
17
18 phi = Pi/2
19
20 p1 = PolarPlot[{r1, r2}, {theta, 0, Pi}, AxesLabel -> {z, y}]
21
22 phi = 3 Pi/2
23
24 p2 = PolarPlot[{-r1, -r2}, {theta, 0, Pi}, AxesLabel -> {z, y}]
25
26 Show[p1, p2]
27
28 phi = 0
29
30 p1 = PolarPlot[{r1, r2}, {theta, 0, Pi}, AxesLabel -> {z, x}]
31
32 phi = Pi
33
34 p2 = PolarPlot[{-r1, -r2}, {theta, 0, Pi}, AxesLabel -> {z, x}]
35
36 Show[p1, p2]

```

**Listagem A.3:** Código Mathematica principal utilizado no capítulo 3 e 4

```

1
2 cluz = 3*10^8
3 vp1 = cluz/n
4 vp2 = vp1/Sqrt[1.1]
5 n = 1.31583417

```

```

6 Z01 = 50
7 Solve[Z01 == Sqrt[Lt/Ct], Lt]
8 Lt = 2500 Ct
9 Solve[vp1 == (1/Sqrt[Lt*Ct]), Ct]
10 Ct = 8.7722278`*^-11
11 Lt
12 Z02 = Sqrt[Lt/(Ct*1.1)]
13 vnorm = vp1/(3*10^8)
14 beta1 = w/vp1
15 lambda1 = 2 Pi/beta1
16 beta2 = w/vp2
17 lambda2 = 2 Pi/beta2
18 lambdanorm = 2 Pi/(w/vnorm)
19
20 M = {{0, 0, L, 0}, {0, 0, 0, L}, {C11, C12, 0, 0}, {C21, C22, 0, 0}}
21 M // MatrixForm
22 C12 = 0
23 {vals, vecs} = Eigensystem[M]
24 T = Simplify[MatrixExp[-I*w*M*y]]
25
26 A1 = 1
27 A2 = 1
28 P = T . vecs[[1]]
29 P1 = T . vecs[[3]]
30 P2 = T . (A1*vecs[[1]] + A2*vecs[[3]])
31 Simplify[P/Exp[-I*w*vals[[1]]*y]]
32 Simplify[P1/Exp[-I*w*vals[[3]]*y]]
33 Simplify[P2/(A1*Exp[-I*w*vals[[1]]*y]*vecs[[1]] + A2*Exp[-I*w*vals[[3]]*y]*vecs[[3]])]
34
35 C11 = 1.2
36 C22 = 1
37 C12 = 0
38 C21 = 0.1
39 L = 1
40 w = 1
41 V1 = Simplify[P2[[1]]];
42 I1 = Simplify[P2[[3]]];
43 V2 = Simplify[P2[[2]]];

```

```

44 I2 = Simplify[P2[[4]]];
45 S = Re[0.5*(V1*Conjugate[I1] + V2*Conjugate[I2])];
46 Smax = NMaxValue[S, y]
47 Snorm = S/Smax
48 y = ynorm*lambdanorm
49 Plot[Snorm, {ynorm, 0, 263/lambdanorm}]
50
51 Clear[w]
52 Clear[y]
53
54 Tlinha = {{Cos[beta1*y], 0, I*Z01*Sin[beta1*y], 0}, {0, Cos[beta2*y], 0, I*Z02*Sin[beta2*y]},
55          {I*(1/Z01)*Sin[beta1*y], 0, Cos[beta1*y], 0}, {0, I*(1/Z02)*Sin[beta2*y], 0,
56          Cos[beta2*y]}}
57
58 d = 0.1*cluz/(2 Pi*5000000000)
59 y = d
60 Tlinhad = Tlinha
61 y = d/2
62 Tlinhad2 = Tlinha
63 Clear[y]
64
65 Cgs = 0.3*10^(-12)
66 Cgd = 0.01*10^(-12)
67 Cds = 0.12*10^(-12)
68 gm = 0.04
69 Ri = 7
70 Rds = 400
71 L = Lt
72 C11 = Ct
73 C22 = 1.1*Ct
74 N1 = 19
75
76 Y = {{(w (Cgd + Cgs + I Cgd Cgs Ri w))/(-I + Cgs Ri w) -I Cgd w}{-I (Cgd w + gm/(-I +
77          Cgs Ri w)) 1/Rds + I (Cds + Cgd) w}}
78
79 Tmosfet = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {Part[Y, 1, 1], Part[Y, 1, 2], 1, 0}, {Part[Y, 2, 1],
80          Part[Y, 2, 2], 0, 1}}
81

```



```

82 Tcentral = Simplify[Tmosfet . Tlinhad]
83
84 Tglobal = Tlinhad2 . MatrixPower[Tcentral, (N1 - 1)] . Tmosfet . Tlinhad2
85
86 C0 = {{C11, 0}, {0, C22}}
87 Cef = C0 + Y/(I*w*d)
88 Mef = {{0, 0, L, 0}, {0, 0, 0, L}, {Part[Cef, 1, 1], Part[Cef, 1, 2], 0, 0}, {Part[Cef, 2, 1],
89     Part[Cef, 2, 2], 0, 0}}
90
91 Tef = Simplify[MatrixExp[I*w*Mef*N1*d]]
92
93 aex = (Part[Tglobal, 1, 4] Part[Tglobal, 2, 1] + Part[Tglobal, 1, 2] Part[Tglobal, 2, 1] Z01
94     - Part[Tglobal, 1, 1] (Part[Tglobal, 2, 4] + Part[Tglobal, 2, 2] Z01) +
95     (-Part[Tglobal, 2, 4] Part[Tglobal, 3, 1] + Part[Tglobal, 2, 1] Part[Tglobal, 3, 4] -
96     Part[Tglobal, 2, 2] Part[Tglobal, 3, 1] Z01 + Part[Tglobal, 2, 1] Part[Tglobal, 3, 2]
97     Z01) Z02)/(Part[Tglobal, 1, 4] + Part[Tglobal, 1, 2] Z01 + (Part[Tglobal, 3, 4] +
98     Part[Tglobal, 3, 2] Z01) Z02)
99
100 bex = (Part[Tglobal, 1, 4] Part[Tglobal, 2, 3] + Part[Tglobal, 1, 2] Part[Tglobal, 2, 3] Z01
101     - Part[Tglobal, 1, 3] (Part[Tglobal, 2, 4] + Part[Tglobal, 2, 2] Z01) -
102     Part[Tglobal, 3, 3] Part[Tglobal, 2, 4] Z02 + Part[Tglobal, 2, 3] Part[Tglobal, 3, 4] Z02
103     + Part[Tglobal, 2, 3] Part[Tglobal, 3, 2] Z01 Z02 - Part[Tglobal, 2, 2]
104     Part[Tglobal, 3, 3] Z01 Z02)/(Part[Tglobal, 1, 4] + Part[Tglobal, 1, 2] Z01 +
105     (Part[Tglobal, 3, 4] + Part[Tglobal, 3, 2] Z01) Z02)
106
107 cex = (Part[Tglobal, 1, 4] Part[Tglobal, 4, 1] - Part[Tglobal, 1, 1] (Part[Tglobal, 4, 4] +
108     Part[Tglobal, 4, 2] Z01) + Part[Tglobal, 3, 2] Part[Tglobal, 4, 1] Z01 Z02 -
109     Part[Tglobal, 3, 1] (Part[Tglobal, 4, 4] + Part[Tglobal, 4, 2] Z01) Z02 +
110     Part[Tglobal, 4, 1] (Part[Tglobal, 1, 2] Z01 + Part[Tglobal, 3, 4] Z02))
111     /(Part[Tglobal, 1, 4] + Part[Tglobal, 1, 2] Z01 + (Part[Tglobal, 3, 4] +
112     Part[Tglobal, 3, 2] Z01) Z02)
113
114 def = (Part[Tef, 1, 4] Part[Tef, 4, 3] + Part[Tef, 1, 2] Part[Tef, 4, 3] Z01 -
115     Part[Tef, 1, 3] (Part[Tef, 4, 4] + Part[Tef, 4, 2] Z01) + Part[Tef, 4, 3]
116     (Part[Tef, 3, 4] + Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02 - Part[Tef, 3, 3] (Part[Tef, 4, 4]
117     + Part[Tef, 4, 2] Z01) Z02)/(Part[Tef, 1, 4] + Part[Tef, 1, 2] Z01 +
118     (Part[Tef, 3, 4] + Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02)
119

```

```

120 s1lex = (bex - dex Z01 + aex Z02 - cex Z01 Z02)/(bex + dex Z01 + aex Z02 + cex Z01 Z02)
121 s12ex = (2 (-bex cex + aex dex) Sqrt[Z01] Sqrt[Z02])/(bex + dex Z01 + (aex + cex Z01) Z02)
122 s2lex = (2 Sqrt[Z01] Sqrt[Z02])/(bex + dex Z01 + aex Z02 + cex Z01 Z02)
123 s22ex = (bex + dex Z01 - (aex + cex Z01) Z02)/(bex + dex Z01 + (aex + cex Z01) Z02)
124
125 w = 2 Pi*f*1*10^9
126 LogLinearPlot[Abs[s1lex], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 1}]
127 LogLinearPlot[Abs[s12ex], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 20}]
128 LogLinearPlot[Abs[s2lex], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 0.08}]
129 LogLinearPlot[Abs[s22ex], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 0.8}]
130
131 aef = (Part[Tef, 1, 4] Part[Tef, 2, 1] + Part[Tef, 1, 2] Part[Tef, 2, 1] Z01 - Part[Tef, 1, 1]
132 (Part[Tef, 2, 4] + Part[Tef, 2, 2] Z01) + (-Part[Tef, 2, 4] Part[Tef, 3, 1] +
133 Part[Tef, 2, 1] Part[Tef, 3, 4] - Part[Tef, 2, 2] Part[Tef, 3, 1] Z01 + Part[Tef, 2, 1]
134 Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02)/(Part[Tef, 1, 4] + Part[Tef, 1, 2] Z01 + (Part[Tef, 3, 4] +
135 Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02)
136
137 bef = (Part[Tef, 1, 4] Part[Tef, 2, 3] + Part[Tef, 1, 2] Part[Tef, 2, 3] Z01 - Part[Tef, 1, 3]
138 (Part[Tef, 2, 4] + Part[Tef, 2, 2] Z01) - Part[Tef, 3, 3] Part[Tef, 2, 4] Z02 +
139 Part[Tef, 2, 3] Part[Tef, 3, 4] Z02 + Part[Tef, 2, 3] Part[Tef, 3, 2] Z01 Z02 -
140 Part[Tef, 2, 2] Part[Tef, 3, 3] Z01 Z02)/(Part[Tef, 1, 4] + Part[Tef, 1, 2] Z01 +
141 (Part[Tef, 3, 4] + Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02)
142
143 cef = (Part[Tef, 1, 4] Part[Tef, 4, 1] - Part[Tef, 1, 1] (Part[Tef, 4, 4] + Part[Tef, 4, 2]
144 Z01) + Part[Tef, 3, 2] Part[Tef, 4, 1] Z01 Z02 - Part[Tef, 3, 1] (Part[Tef, 4, 4] +
145 Part[Tef, 4, 2] Z01) Z02 + Part[Tef, 4, 1] (Part[Tef, 1, 2] Z01 + Part[Tef, 3, 4]
146 Z02))/(Part[Tef, 1, 4] + Part[Tef, 1, 2] Z01 + (Part[Tef, 3, 4] + Part[Tef, 3, 2]
147 Z01) Z02)
148
149 def = (Part[Tef, 1, 4] Part[Tef, 4, 3] + Part[Tef, 1, 2] Part[Tef, 4, 3] Z01 -
150 Part[Tef, 1, 3] (Part[Tef, 4, 4] + Part[Tef, 4, 2] Z01) + Part[Tef, 4, 3]
151 (Part[Tef, 3, 4] + Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02 - Part[Tef, 3, 3] (Part[Tef, 4, 4] +
152 Part[Tef, 4, 2] Z01) Z02)/(Part[Tef, 1, 4] + Part[Tef, 1, 2] Z01 + (Part[Tef, 3, 4]
153 + Part[Tef, 3, 2] Z01) Z02)
154
155 s1lef = (bef - def Z01 + aef Z02 - cef Z01 Z02)/(bef + def Z01 + aef Z02 + cef Z01 Z02)
156
157 s12lef = (2 (-bef cef + aef def) Sqrt[Z01] Sqrt[Z02])/(bef + def Z01 + (aef + cef Z01) Z02)

```

```

158
159 s21ef = (2 Sqrt[Z01] Sqrt[Z02])/(bef + def Z01 + aef Z02 + cef Z01 Z02)
160
161 s22ef = (bef + def Z01 - (aef + cef Z01) Z02)/(bef + def Z01 + (aef + cef Z01) Z02)
162
163 LogLinearPlot[Abs[s11ef], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 1}]
164 LogLinearPlot[Abs[s12ef], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 20}]
165 LogLinearPlot[Abs[s21ef], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 0.08}]
166 LogLinearPlot[Arg[s21ef], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> Automatic]
167 LogLinearPlot[Abs[s22ef], {f, 0.3, 300}, PlotRange -> {0, 0.8}]

```

**Listagem A.4:** Código Mathematica utilizado para obter a matriz de admitâncias do MOSFET

```

1
2 Zcgd = 1/(I*w*Cgd)
3 Zcgs = 1/(I*w*Cgs)
4 Zc ds = 1/(I*w*Cds)
5 Zri = Ri
6 Zrds = Rds
7
8 Ycgd = 1/Zcgd
9 Ycgs = 1/Zcgs
10 Yc ds = 1/Zc ds
11 Yri = 1/Zri
12 Yrds = 1/Zrds
13
14 Z1 = Zcgs + Zri
15 Z2 = Zcgd
16 Y3 = Yrds + Yc ds
17 Y1 = 1/Z1
18 Y2 = 1/Z2
19 Z3 = 1/Y3
20
21 a = Zcgs/Z1
22 Z12 = 1/(Y1 + gm*a + (Z1 + Z2)/(Z1*Z3))
23 Z22 = 1/(1/(Z1 + Z2) + 1/Z3 + gm*a*Z1/(Z1 + Z2))
24 Z11 = (Z1 (Z2 + Z3))/(Z1 + Z2 + Z3 + a gm Z1 Z3)
25 Z21 = -((Z1 (-1 + a gm Z2) Z3)/(Z1 + Z2 + Z3 + a gm Z1 Z3))

```

```

26
27 Z = {{Z11, Z12}, {Z21, Z22}}
28
29 Y = FullSimplify[Inverse[Z]]

```

**Listagem A.5:** Código Mathematica utilizado para obter a matriz de scattering

```

1
2 I1linha = V1linha/Z01
3 I2linha = -V2linha/Z02
4
5 Solve[V2linha == T11*V2 + T12*V1linha + T13*I2 + T14*I1linha, V2linha]
6 Solve[V1 == T21*V2 + T22*V1linha + T23*I2 + T24*I1linha, V1]
7 Solve[I2linha == T31*V2 + T32*V1linha + T33*I2 + T34*I1linha, V2linha]
8 Solve[I1 == T41*V2 + T42*V1linha + T43*I2 + T44*I1linha, I1]
9
10 (*DESCOBRIR B e D*)
11 V2 = 0
12
13 Solve[(T14 V1linha + I2 T13 Z01 + T12 V1linha Z01 + T11 V2 Z01)/Z01 == -(1/Z01) (T34 V1linha
14     + I2 T33 Z01 + T32 V1linha Z01 + T31 V2 Z01) Z02, V1linha]
15
16 V1linha = -((Z01 (I2 T13 + I2 T33 Z02))/(T14 + T12 Z01 + T34 Z02 + T32 Z01 Z02))
17
18 Solve[V1 == T21*V2 + T22*V1linha + T23*I2 + T24*I1linha, V1]
19
20 V1 = (I2 T14 T23 - I2 T13 T24 - I2 T13 T22 Z01 + I2 T12 T23 Z01 - I2 T24 T33 Z02 + I2 T23
21     T34 Z02 + I2 T23 T32 Z01 Z02 - I2 T22 T33 Z01 Z02)/(T14 + T12 Z01 + T34 Z02 + T32 Z01 Z02)
22
23 b = FullSimplify[V1/I2]
24
25 Solve[I1 == T41*V2 + T42*V1linha + T43*I2 + T44*I1linha, I1]
26
27 I1 = (I2 T14 T43 - I2 T13 T44 - I2 T13 T42 Z01 + I2 T12 T43 Z01 + I2 T34 T43 Z02 - I2 T33
28     T44 Z02 - I2 T33 T42 Z01 Z02 + I2 T32 T43 Z01 Z02)/(T14 + T12 Z01 + T34 Z02 + T32 Z01 Z02)
29
30 d = FullSimplify[I1/I2]
31

```

```

32 Clear[All]
33
34 (*DESCOBRIR A e C*)
35 I2 = 0
36
37 Solve[(T14 V1linha + I2 T13 Z01 + T12 V1linha Z01 + T11 V2 Z01)/Z01 == -(1/Z01)(T34 V1linha
38     + I2 T33 Z01 + T32 V1linha Z01 + T31 V2 Z01) Z02, V1linha]
39
40 V1linha = -((Z01 (T11 V2 + T31 V2 Z02))/(T14 + T12 Z01 + T34 Z02 + T32 Z01 Z02))
41
42 Solve[V1 == T21*V2 + T22*V1linha + T23*I2 + T24*I1linha, V1]
43
44 V1 = (T14 T21 V2 - T11 T24 V2 + T12 T21 V2 Z01 - T11 T22 V2 Z01 - T24 T31 V2 Z02 + T21 T34
45     V2 Z02 - T22 T31 V2 Z01 Z02 + T21 T32 V2 Z01 Z02)/(T14 + T12 Z01 + T34 Z02 + T32 Z01 Z02)
46
47 a = FullSimplify[V1/V2]
48
49 Solve[I1 == T41*V2 + T42*V1linha + T43*I2 + T44*I1linha, I1]
50
51 I1 = (T14 T41 V2 - T11 T44 V2 + T12 T41 V2 Z01 - T11 T42 V2 Z01 + T34 T41 V2 Z02 - T31 T44
52     V2 Z02 + T32 T41 V2 Z01 Z02 - T31 T42 V2 Z01 Z02)/(T14 + T12 Z01 + T34 Z02 + T32 Z01 Z02)
53
54 c = FullSimplify[I1/V2]
55
56 Sqrt[Z01]*(v1mais + v1menos) == Sqrt[Z02]*a*(v2mais + v2menos) - 1/Sqrt[Z02]*b*
57     (v2mais - v2menos)
58
59 Sqrt[Z01]*(v1mais - v1menos) == Sqrt[Z02]*c*Z01*(v2mais + v2menos) - 1/Sqrt[Z02]*d*Z01*
60     (v2mais - v2menos)
61
62 Solve[Sqrt[Z01]*(v1mais + v1menos) == Sqrt[Z02]*a*(v2mais + v2menos) - 1/Sqrt[Z02]*b*
63     (v2mais - v2menos)
64     &&
65     Sqrt[Z01]*(v1mais - v1menos) == Sqrt[Z02]*c*Z01*(v2mais + v2menos) - 1/Sqrt[Z02]*d*Z01*
66     (v2mais - v2menos), {v1menos, v2menos}]
67
68 Collect[-((-b v1mais + d v1mais Z01 + 2 b c v2mais Sqrt[Z01] Sqrt[Z02] - 2 a d
69     v2mais Sqrt[Z01] Sqrt[Z02] - a v1mais Z02 + c v1mais Z01 Z02)/(b + d Z01 + a Z02 +

```

```

70      c Z01 Z02)), {v1mais, v2mais}, Simplify]
71
72 Collect[-((-b v2mais - d v2mais Z01 - 2 v1mais Sqrt[Z01] Sqrt[Z02] + a v2mais Z02 +
73      c v2mais Z01 Z02)/(b + d Z01 + a Z02 + c Z01 Z02)), {v1mais, v2mais}, Simplify]
74
75 s11 = (b - d Z01 + a Z02 - c Z01 Z02)/(b + d Z01 + a Z02 + c Z01 Z02)
76
77 s12 = (2 (-b c + a d) Sqrt[Z01] Sqrt[Z02])/(b + d Z01 + (a + c Z01) Z02)
78
79 s21 = (2 Sqrt[Z01] Sqrt[Z02])/(b + d Z01 + a Z02 + c Z01 Z02)
80
81 s22 = (b + d Z01 - (a + c Z01) Z02)/(b + d Z01 + (a + c Z01) Z02)

```