



**TÉCNICO**  
LISBOA

## **Modelação e Análise de Cúpulas Geodésicas**

**Raquel Vestia Ribeiro**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Civil**

Orientador: Prof. Luís Manuel Coelho Guerreiro

**Júri**

Presidente: Prof.<sup>a</sup> Teresa Maria Bodas de Araújo Freitas

Orientador: Prof. Luís Manuel Coelho Guerreiro

Vogal: Prof. Luís Manuel Soares dos Santos Castro

**dezembro 2020**



Para aqueles que, incondicionalmente, sempre acreditaram em mim  
e no meu percurso de resiliência, dedicação e amor...



## **Agradecimentos**

Agradeço ao Professor Luís Guerreiro, primeiramente por ter aceitado esta dissertação e por, no decorrer destes meses, me ter orientado com dedicação e ter disponibilizado o seu tempo.

Agradeço às pessoas do Técnico que me marcaram e contribuíram para o meu desenvolvimento científico e pessoal.

Agradeço à minha "família" por me ter acompanhado neste árduo caminho que desejei traçar, mesmo em períodos que o questioneei.

Um especial agradecimento à minha mãe que, sem dúvida, foi e é um exemplo de resiliência. Agradeço-lhe por nunca ter desistido de mim e do meu percurso e por, sempre me ter dado o seu apoio incondicional.

Obrigada!



## **Declaração**

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.





## Resumo

A partir do conceito de *energetic-synergetic* de *Buckminster Fuller*, surgiu o interesse em estudar cúpulas geodésicas,  $V_n$ , que são definidas por redes geodésicas triangulares de barras e nós. A frequência,  $V_n$  corresponde ao número de divisões,  $n$ , do triângulo inicial.

Após a formulação das geometrias  $V_n$  ( $n=2,4,6,8$ ), recorrendo à programação em *Matlab*, são determinados dois casos de estudo: um em que as estruturas estão à superfície, sujeitas à ação do vento (caso de estudo 1), e outro em que as estruturas estão enterradas, sujeitas às pressões do solo (caso de estudo 2).

O Método dos Elementos Finitos (a partir dos programas *Sap2000* e *Inventor*) é o utilizado para a formulação e análise dos cenários, pois permite simular características mecânicas, comportamentos e geometrias complexas.

São realizados dimensionamentos dos elementos estruturais: faces, barras e nós, verificando os ELU e ELUt com a aplicação das normas dos respectivos Eurocódigos.

O aço, o bambu e a madeira são os materiais usados na construção dos modelos.

A conclusão geral nos dois casos de estudo é que o efeito da flexão é o mais condicionante para qualquer modelo face à tração / compressão, nos elementos de face e de barra.

Conclui-se que a madeira pode atuar como material estrutural desde que os esforços não sejam elevados e existam condições de meio. Caso contrário, o aço apresenta uma melhor aplicabilidade em cenários com elevados esforços atuantes.

Os nós estão apenas sujeitos ao esforço axial provenientes das barras, verificando-se nestes um bom comportamento do bambu.

**Palavras-chave:** Dimensionamento de estruturas, Cúpulas geodésicas, Domos geodésicos



## Abstract

The desire to study geodesic structures came from the energetic-synergetic concept, by Buckminster Fuller, defined by triangular geodesic grids of frames and joints. The frequency,  $V_n$ , corresponds to the number of divisions,  $n$ , made to the initial triangle.

Using Matlab software to design  $V_n$  ( $n=2,4,6,8$ ) geometries two different case studies were evaluated: one where the structures are at surface level exposed to wind (case study 1) and another where the structures are underground and subjected to the ground pressure above it (case study 2).

The Finite Element Method (from Sap2000 and Inventor) is the method used to design and perform the analysis of both case studies allowing to simulate mechanical characteristics, behaviours and complex geometries.

The structural elements are designed: shells, frames and joints, complying with ULS and SLS limit states according to the corresponding Eurocodes.

The materials used in the design of the models are steel, bamboo and wood.

The bottom line in both case studies is that all the models are more affected by the bending effect than by the tensile/compression forces, regarding the shell and frame elements.

It's possible to use wood as a structural material if the forces and the environmental conditions are within a reasonable level.

Otherwise, for other situations with a higher level of forces, steel remains a valid option, since it's a strong and resistant material.

The joints are subjected to axial forces due to the frames, where bamboo has proven to be a material with a proper behaviour to withstand those forces.

**Keywords:** Structural design, Geodesic Structures, Geodesic domes



# Conteúdo

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Enquadramento e motivação . . . . .  | 1         |
| 1.2      | Identificação dos objetivos . . . . .  | 2         |
| 1.3      | Estruturação . . . . .   | 2         |
| <b>2</b> | <b>Estado de Arte</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Cúpulas . . . . .  | 3         |
| 2.1.1    | Enquadramento histórico . . . . .  | 3         |
| 2.1.2    | Tipos de cúpulas . . . . .   | 7         |
| 2.2      | Cúpulas geodésicas . . . . .   | 11        |
| 2.2.1    | Enquadramento histórico . . . . .  | 11        |
| 2.2.2    | Natureza da geodésica . . . . .  | 12        |
| 2.2.3    | Forma e geometria . . . . .  | 12        |
| 2.2.4    | Conceito de frequência e definição dos elementos constituintes . . . . .         | 14        |
| 2.2.5    | Funcionamento estrutural . . . . .   | 16        |
| 2.2.6    | Definição de carregamentos aplicados . . . . .                                   | 16        |
| 2.2.7    | Vantagens e desvantagens . . . . .   | 19        |
| <b>3</b> | <b>Casos de Estudo</b>   | <b>21</b> |
| 3.1      | Conceção da geometria . . . . .  | 21        |
| 3.1.1    | Aplicação do algoritmo . . . . .   | 21        |
| 3.2      | Modelação numérica das cúpulas geodésicas . . . . .                              | 23        |
| 3.2.1    | Elementos finitos e secções transversais . . . . .                               | 23        |
| 3.2.2    | Definição das ações e combinações de ações . . . . .                             | 24        |
| 3.2.3    | Condições de fronteira . . . . .   | 30        |
| 3.3      | Análise numérica de cúpulas geodésicas à superfície - Caso de estudo 1 . . . . . | 30        |
| 3.3.1    | Faces ( <i>shell</i> ) . . . . .   | 30        |
| 3.3.2    | Dimensionamento da secção transversal - barra ( <i>frame</i> ) . . . . .         | 31        |
| 3.3.3    | Dimensionamento do elemento nó ( <i>joint</i> ) . . . . .                        | 37        |
| 3.4      | Análise numérica de cúpulas geodésicas enterradas - Caso de estudo 2 . . . . .   | 41        |
| 3.4.1    | Dimensionamento da secção transversal - face ( <i>shell</i> ) . . . . .          | 41        |

|          |   |             |
|----------|---|-------------|
| 3.4.2    | Dimensionamento da secção transversal - barra ( <i>frame</i> ) . . . . .                        | 47          |
| 3.5      | Considerações gerais . . . . .  | 55          |
| <b>4</b> | <b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>  | <b>57</b>   |
| 4.1      | Conclusões . . . . .  | 57          |
| 4.2      | Desenvolvimentos futuros . . . . .  | 60          |
|          | <b>Bibliografia</b>   | <b>61</b>   |
|          | <b>Webgrafia</b>  | <b>63</b>   |
| <b>A</b> | <b>Conceção da geometria - Matlab (Zechmann, E., 2008)</b>                                      | <b>A.65</b> |
| A.1      | Programa: <code>make_icosahedron</code> . . . . .   | A.65        |
| A.2      | Sub programa: <code>icosahedron_nodes</code> . . . . .  | A.68        |
| A.3      | Sub programa: <code>spherical_to_rectangular</code> de <code>icosahedron_nodes</code> . . . . . | A.69        |
| A.4      | Sub programa: <code>spherical_angle.ed</code> de <code>icosahedron_nodes</code> . . . . .       | A.70        |
| A.5      | Sub programa: <code>build_icososa</code> . . . . .  | A.71        |
| A.6      | Sub programa: <code>rotate_transform2</code> de <code>build_icososa</code> . . . . .            | A.74        |
| A.7      | Sub programa: <code>shift_theta</code> de <code>build_icososa</code> . . . . .                  | A.75        |
| A.8      | Sub programa: <code>splat</code> . . . . .  | A.76        |
| A.9      | Sub programa: <code>make_sphere</code> . . . . .  | A.77        |
| A.10     | <i>Outputs</i> - exemplo: modelo $V_4$ . . . . .  | A.80        |
| <b>B</b> | <b>Caso de estudo 1</b>   | <b>B.83</b> |
| B.1      | Dimensionamento do elemento barra . . . . .   | B.83        |
| B.1.1    | Modelo $V_4$ . . . . .  | B.83        |
| B.2      | Dimensionamento do elemento nó . . . . .  | B.84        |
| B.2.1    | Resultados - modelo V2 . . . . .  | B.84        |
| B.2.2    | Resultados - modelo V6 . . . . .  | B.84        |
| B.2.3    | Resultados - modelo V8 . . . . .  | B.85        |

# Lista de Tabelas

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1  | Valores de $f$ usado na definição dos modelos em <i>Matlab</i> . . . . .                | 22 |
| 3.2  | Contagem de elementos constituintes das cúpulas com frequência $V_n$ . . . . .          | 22 |
| 3.3  | Contagem de barras com diferente comprimento nas cúpulas com frequência $V_n$ . . . . . | 23 |
| 3.4  | Comprimento máximo das barras nos modelos $V_n$ . . . . .                               | 24 |
| 3.5  | Combinação de ações considerada nas modelações . . . . .                                | 24 |
| 3.6  | Coordenadas dos pontos A, B e C retiradas do EC1 . . . . .                              | 26 |
| 3.7  | $C_{pe,10}$ nas faixas $x_i$ . . . . .  | 27 |
| 3.8  | Valores de $C_{pe,10}$ por faixa . . . . .  | 28 |
| 3.9  | Áreas com compressão nos modelos $V_n$ . . . . .  | 29 |
| 3.10 | Parâmetros do solo . . . . .  | 29 |
| 3.11 | Valores característicos do <i>ecoPVC</i> . . . . .                                      | 30 |
| 3.12 | Valores característicos da madeira C24 . . . . .  | 31 |
| 3.13 | Características e valores para dimensionamento da madeira . . . . .                     | 31 |
| 3.14 | Valores de cálculo da madeira C24 . . . . .   | 32 |
| 3.15 | Valores de $t_2$ a partir da estabilidade nos modelos $V_n$ . . . . .                   | 33 |
| 3.16 | Parâmetros da secção transversal nos modelos $V_n$ à superfície . . . . .               | 34 |
| 3.17 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo $V_2$ . . . . .    | 35 |
| 3.18 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo $V_4$ . . . . .    | 36 |
| 3.19 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo $V_6$ . . . . .    | 36 |
| 3.20 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo $V_8$ . . . . .    | 37 |
| 3.21 | Valores característicos da bambu . . . . .  | 38 |
| 3.22 | Esforços máximos atuantes no nó . . . . .   | 38 |
| 3.23 | Resultados de análise para conectores com 4 furos - $V_4$ . . . . .                     | 39 |
| 3.24 | Resultados de análise para conectores com 5 furos - $V_4$ . . . . .                     | 39 |
| 3.25 | Resultados de análise para conectores com 6 furos - $V_4$ . . . . .                     | 40 |
| 3.26 | Características do parafuso: M12 Classe 4.6 . . . . .                                   | 40 |
| 3.27 | Áreas mínimas da secção da furação . . . . .  | 41 |
| 3.28 | Valores característicos do Aço S355 . . . . .   | 41 |
| 3.29 | Tensões associadas à face mais carregada em cada modelo $V_n$ . . . . .                 | 42 |
| 3.30 | Parâmetros geométricos considerados nos modelos $V_n$ . . . . .                         | 44 |

|      |  |      |
|------|--|------|
| 3.31 | Tensões na face $V_n$ . . . . .  | 44   |
| 3.32 | Parâmetros da secção transversal nos modelos $V_n$ enterrados . . . . .                                  | 44   |
| 3.33 | Deformação máxima (corte A-A') das <i>shells</i> nos modelos $V_n$ . . . . .                             | 45   |
| 3.34 | Deslocamentos em modelo de cálculo de face $V_n$ . . . . .   | 46   |
| 3.35 | Verificação de segurança ao EL Utilização nos modelos $V_n$ . . . . .                                    | 47   |
| 3.36 | Valores característicos do Aço S275 . . . . .  | 47   |
| 3.37 | Valores de $i$ a partir da estabilidade nos modelos $V_n$ . . . . .                                      | 49   |
| 3.38 | Parâmetros da secção transversal nos modelos $V_n$ enterrados . . . . .                                  | 49   |
| 3.39 | Definição da classe das secções transversais dos elementos <i>frames</i> para os modelos $V_n$ . . . . . | 50   |
| 3.40 | Parâmetros e valor de coeficiente de redução, $\chi$ . . . . .   | 52   |
| 3.41 | Definição dos esforços resistentes dos elementos <i>frames</i> para os modelos $V_n$ . . . . .           | 54   |
| 3.42 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último para o modelo $V_4$ . . . . .                           | 54   |
| 3.43 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último para o modelo $V_6$ . . . . .                           | 54   |
| 3.44 | Verificação de segurança ao Estado Limite Último para o modelo $V_8$ . . . . .                           | 54   |
| 3.45 | Dados dos elementos de barra para modelos $V_n$ à superfície . . . . .                                   | 56   |
|      |  |      |
| B.1  | Resultados de análise para conectores com 4 furos - $V_2$ . . . . .                                      | B.84 |
| B.2  | Resultados de análise para conectores com 5 furos - $V_2$ . . . . .                                      | B.84 |
| B.3  | Resultados de análise para conectores com 6 furos - $V_2$ . . . . .                                      | B.84 |
| B.4  | Resultados de análise para conectores com 4 furos - $V_6$ . . . . .                                      | B.84 |
| B.5  | Resultados de análise para conectores com 5 furos - $V_6$ . . . . .                                      | B.84 |
| B.6  | Resultados de análise para conectores com 6 furos - $V_6$ . . . . .                                      | B.84 |
| B.7  | Resultados de análise para conectores com 4 furos - $V_8$ . . . . .                                      | B.85 |
| B.8  | Resultados de análise para conectores com 5 furos - $V_8$ . . . . .                                      | B.85 |
| B.9  | Resultados de análise para conectores com 6 furos - $V_8$ . . . . .                                      | B.85 |



# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Tesouro de Atreu . . . . .  | 3  |
| 2.2  | Construções Primitivas - <i>wigwam</i> e <i>igloo</i> . . . . .   | 4  |
| 2.3  | Construções Primitivas - <i>yurt</i> . . . . .  | 4  |
| 2.4  | Panteão de Roma . . . . .   | 5  |
| 2.5  | Basílica de Santa Sofia, Constantinopla, Império Bizantino (atual Istambul) [W9] . . . . .                                      | 5  |
| 2.6  | Cúpula da Rocha, Cidade velha de Jerusalém, Jerusalém . . . . .   | 5  |
| 2.7  | <i>Taj Mahal</i> , Agra, Índia . . . . .  | 6  |
| 2.8  | Santa Maria del Fiori, Florença, Itália . . . . .   | 6  |
| 2.9  | Basílica de São Pedro, Vaticano . . . . .   | 6  |
| 2.10 | Diferentes tipos de cúpulas - Parte 1 . . . . .   | 8  |
| 2.11 | Diferentes tipos de cúpulas - Parte 2 . . . . .   | 9  |
| 2.12 | Diferentes tipos de cúpulas contemporâneas . . . . .  | 10 |
| 2.13 | Cúpulas geodésicas - Parte 1 . . . . .  | 11 |
| 2.14 | Cúpulas geodésicas - Parte 2 . . . . .  | 12 |
| 2.15 | Projeções ortogonais do icosaedro (Pinto, L. F. M., 2015) . . . . .   | 13 |
| 2.16 | Geração de geodésicas de diferentes frequências (Pinto, L. F. M., 2015) . . . . .   | 14 |
| 2.17 | Classes de poliedros [W24] . . . . .  | 14 |
| 2.18 | Tipo de subdivisão [W24] . . . . .  | 15 |
| 2.19 | Diferentes tipos de nós (exemplo em cúpula $V_4$ - classe I tipo 1) . . . . .   | 15 |
| 2.20 | Exemplo de cúpula de frequência de ordem ímpar [W24] . . . . .  | 16 |
| 2.21 | Valores recomendados dos coeficientes de pressão exterior $c_{pe,10}$ para cúpulas de base circular (CEN, 2010) . . . . .       | 17 |
| 2.22 | Tensões do solo em profundidade . . . . .   | 19 |
| 3.1  | Modelos gerados a partir da função <i>make_icosahedron</i> (Zechmann, E., 2008) em <i>Matlab</i> . . . . .                      | 22 |
| 3.2  | Modelos gerados a partir do programa <i>Sap2000</i> . . . . .   | 23 |
| 3.3  | Localização da Ericeira de acordo com o tipo de zona segundo o EC1 [W25] . . . . .  | 25 |
| 3.4  | Esquematização das retas de $C_{pe,10}$ em função da distância $x$ segundo o EC1 . . . . .                                      | 27 |
| 3.5  | Demonstração da localização dos coeficientes de pressões exteriores nas diferentes faixas, em planta, do modelo $V_4$ . . . . . | 28 |
| 3.6  | Esquematização gráfica da tabela de valores de $C_{pe,10}$ . . . . .  | 28 |

|      |   |      |
|------|---|------|
| 3.7  | Exemplo do modelo $V_4$ sob ação do solo (vista em alçado)  | 30   |
| 3.8  | Secção transversal de madeira C24 no programa <i>Sap2000</i>  | 31   |
| 3.9  | Elemento <i>frame</i> com secção transversal de madeira C24   | 32   |
| 3.10 | Tensões normais e elemento condicionante - modelo $V_2$   | 35   |
| 3.11 | Tensões normais e elemento condicionante - modelo $V_4$   | 35   |
| 3.12 | Tensões normais e elemento condicionante - modelo $V_6$   | 36   |
| 3.13 | Tensões normais e elemento condicionante - modelo $V_8$   | 36   |
| 3.14 | Modelo de elemento de bambu   | 38   |
| 3.15 | Análise de $\sigma_{VM}$ num conector $V_4$ com 6 furações para FS=2  | 39   |
| 3.16 | Análise de $FS$ num conector $V_4$ com 6 furações para FS=2   | 39   |
| 3.17 | Exemplo de gradil   | 42   |
| 3.18 | Geometria do elemento <i>shell</i> escolhida para os diferentes modelos $V_n$   | 42   |
| 3.19 | Elemento <i>shell</i> mais carregado  | 43   |
| 3.20 | Elemento <i>shell</i> em análise  | 45   |
| 3.21 | Deformações no alinhamento A-A' - modelo $V_4$  | 46   |
| 3.22 | Deformações no alinhamento A-A' - modelo $V_6$  | 46   |
| 3.23 | Deformações no alinhamento A-A' - modelo $V_8$  | 46   |
| 3.24 | Secção transversal de aço A275 no programa <i>Sap2000</i>   | 47   |
| 3.25 | Elemento <i>frame</i> com secção transversal 2  | 48   |
| 3.26 | Limites máximos das relações largura-espessura para a definição de classes para componentes comprimidos (retirado de (CEN, 1993)) | 50   |
| 3.27 | Curvas de dimensionamento em função da secção transversal (retirado de (CEN, 1993))   | 51   |
| 3.28 | Fatores de imperfeição para as curvas de dimensionamento (retirado de (CEN, 1993))  | 52   |
| 3.29 | Fatores de interação $k_{ij}$ para elementos não suscetíveis à deformação por torção (retirado de (CEN, 1993))                    | 53   |
| 3.30 | Coeficientes de momento uniforme equivalente, $C_m$ (retirado de (CEN, 1993))   | 53   |
| 3.31 | Peso dos elementos <i>frames</i> das cúpulas à superfície   | 56   |
| 3.32 | Peso dos elementos das cúpulas enterradas   | 56   |
| A.1  | Geração de coordenadas de pontos  | A.80 |
| A.2  | Geração de triangulação de Delaunay   | A.81 |
| B.1  | Tensões normais $\sigma_{11}$ no modelo $V_4$   | B.83 |
| B.2  | Tensões normais $\sigma_{22}$ no modelo $V_4$   | B.83 |

# Nomenclatura

|                   |   |
|-------------------|---|
| $\alpha$          | fator de imperfeição  |
| $\beta_c$         | fator associado às imperfeições                             |
| $\chi$            | coeficiente de redução                                      |
| $\chi_{LT}$       | coeficiente de redução para a torção lateral                |
| $\delta_{max}$    | deslocamento máximo admissível                              |
| $\gamma$          | peso volúmico   |
| $\gamma_G$        | coeficiente parcial de segurança de ação permanente         |
| $\gamma_M$        | coeficiente parcial para as propriedades dos materiais      |
| $\gamma_Q$        | coeficiente parcial de segurança de ação variável           |
| $\gamma_{sat}$    | peso específico saturado de solo                            |
| $\lambda_y$       | esbelteza correspondente à flexão segundo o eixo y          |
| $\lambda_z$       | esbelteza correspondente à flexão segundo o eixo z          |
| $\lambda_{rel,y}$ | esbelteza relativa correspondente à flexão segundo o eixo y |
| $\lambda_{rel,z}$ | esbelteza relativa correspondente à flexão segundo o eixo z |
| $\nu$             | coeficiente de Poisson                                      |
| $\bar{\lambda}$   | esbelteza normalizada                                       |
| $\phi$            | ângulo de atrito interno                                    |
| $\phi_{ext}$      | diâmetro externo  |
| $\phi_{int}$      | diâmetro interno  |
| $\rho$            | massa volúmica  |
| $\sigma'_v$       | tensão efetiva vertical do solo                             |
| $\sigma_{c,ed}$   | valor de cálculo atuante à compressão                       |

|                   |  |
|-------------------|--|
| $\sigma_h$        | tensão total horizontal do solo  |
| $\sigma_{m,y,ed}$ | valor de cálculo atuante à flexão na direção y   |
| $\sigma_{m,z,ed}$ | valor de cálculo atuante à flexão na direção z   |
| $\sigma_{t,ed}$   | valor de cálculo atuante à tração  |
| $\sigma_{vM}$     | tensão de comparação de <i>von Mises</i>   |
| $\sigma_v$        | tensão total vertical do solo  |
| $A$               | área   |
| $A_s$             |  |
| $A_{ref}$         | área de referência   |
| $b$               | espaçamento  |
| $c_d$             | coeficiente dinâmico   |
| $C_{my}; C_{mz}$  | coeficiente de momento uniforme equivalente  |
| $c_{pe,10}$       | coeficiente de pressão exterior para uma área de aplicação de carga de 10 m <sup>2</sup> |
| $c_{pe}$          | coeficiente de pressão exterior  |
| $c_s$             | coeficiente de dimensão  |
| $E$               | módulo de elasticidade   |
| $e$               | espessura  |
| $E_{0,05}$        | valor do percentil 5 do módulo de elasticidade   |
| $E_{mean}$        | valor médio de módulo de elasticidade  |
| $ELU$             | estado limite último   |
| $ELUt$            | estado limite de utilização  |
| $esp$             | espessura  |
| $f$               | valor da frequência do modelo geodésico  |
| $F_w$             | força total exercida pelo vento  |
| $f_y$             | tensão de cedência   |
| $f_{c,o,d}$       | valor de cálculo de resistência à compressão na direção do fio                           |
| $f_{c,o,k}$       | valor característico de resistência à compressão na direção do fio                       |
| $F_{fr}$          | força de atrito do vento   |

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $f_{m,d}$                     | valor de cálculo de resistência à flexão                              |
| $f_{m,k}$                     | valor característico de resistência à flexão                          |
| $f_{m,y,d}$                   | valor de cálculo de resistência à flexão na direção y                 |
| $f_{m,z,d}$                   | valor de cálculo de resistência à flexão na direção z                 |
| $f_{t,0,d}$                   | valor de cálculo de resistência à tração na direção do fio            |
| $f_{t,0,k}$                   | valor característico de resistência à tração na direção do fio        |
| $f_{t,k}$                     | valor característico de resistência à tração                          |
| $f_{ub}$                      |   |
| $F_{w,e}$                     | força exterior exercida pelo vento                                    |
| $F_{w,i}$                     | força interior exercida pelo vento                                    |
| $f_{y,k}$                     | valor característico de cedência                                      |
| $f_{yd}$                      | tensão de cedência de dimensionamento                                 |
| $h$                           | altura  |
| $I$                           | inércia   |
| $i$                           | raio de giração   |
| $k$                           | fator que relaciona as imperfeições e a esbelteza relativa na madeira |
| $k_2$                         |   |
| $k_c$                         | fator de correção para momento distribuído                            |
| $k_m$                         | fator de contabilização de redistribuição de esforços                 |
| $K_0$                         | coeficiente de impulso de repouso                                     |
| $k_{def}$                     | fator de deformação   |
| $k_{mod}$                     | fator de modificação  |
| $k_{yy};k_{yz};k_{zy};k_{zz}$ | fatores de interação  |
| $L_e$                         | comprimento de encurvadura  |
| $L_{max}$                     | comprimento máximo do elemento <i>frame</i>                           |
| $m$                           | relação de massas   |
| $M_{pl,rd}$                   | valor de cálculo do momento fletor plástico resistente                |
| $M_{pl,rd}$                   | valor de resistência de momento fletor plástico                       |

$M_{y,ed}; M_{2,ed}; M_2$  momento fletor atuante segundo a direção y  
 $M_{y,rd}$  valor de cálculo do momento fletor resistente segundo a direção y  
 $M_{y,Rk}$  valor característico de momento fletor segundo a direção y  
 $M_{z,ed}; M_{3,ed}; M_3$  momento fletor atuante segundo a direção z  
 $M_{z,rd}$  valor de cálculo do momento fletor resistente segundo a direção z  
 $M_{z,Rk}$  valor característico de momento fletor segundo a direção z  
 $N_{b,rd}$  valor de cálculo do esforço axial resistente de um elemento sujeito a encurvadura  
 $N_{cr}$  valor crítico do esforço axial associado ao modo de encurvadura elástico  
 $N_{ed}$  Esforço axial atuante  
 $N_{rd}$  valor de cálculo do esforço axial resistente  
 $N_{Rk}$  valor característico de esforço axial  
 $q_p$  valor característico da pressão dinâmica de pico  
 $r$  raio da superfície geodésica  
 $U_z$  deslocamento segundo z  
 $V$  Esforço transversal  
 $w_e$  pressão exterior exercida pelo vento  
 $W_{pl}$  módulo de flexão plástico da secção transversal  
 $z_e$  altura de referência para a pressão exterior exercida pelo vento  
 $z$  profundidade do solo a partir da referência

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento e motivação

No último século, as estruturas geodésicas têm vindo a ser opção para a construção. Estas estruturas com malhas articuladas têm a particularidade de conseguirem suprir eventuais problemas da construção tradicional para grandes vãos, a partir da distribuição homogénea de esforços no conjunto da estrutura.

*Buckminster Fuller* (1967) veio introduzir na construção, no final do século XX, a possibilidade de criar estruturas esféricas ou hemisféricas, tendo por base uma rede de triângulos com determinado detalhe, definida por elementos de barras e nós articulados. Para o detalhe da rede geodésica introduz-se uma nova definição ao conceito de frequência em engenharia. A frequência,  $V_n$ , denomina-se como característica das estruturas que determina a subdivisão,  $n$ , dos triângulos da rede geodésica.

Assim, surgiram as estruturas geodésicas que apresentam no seu conjunto, uma robustez e rigidez elevada que resulta da combinação dos seus elementos individuais.

Para perceber o funcionamento destas estruturas geodésicas e hemisféricas em diferentes casos de estudo é necessário dimensionar nas estruturas à superfície e enterradas, o efeito do vento e das pressões do solo, respetivamente.

Para estes casos de estudo são efetuadas comparações, em estruturas com igual área coberta, fazendo variar a frequência de  $V_2$  a  $V_8$  (apenas ordem par). Estes dimensionamentos são realizados para materiais como o aço, bambu e madeira, seguindo as normas dos Eurocódigos respetivos.

No caso do bambu, apenas, é utilizado o critério de rotura de *von Mises*.

A geometria dos modelos surge a partir da aplicação de um código *Matlab*.

O Método dos Elementos Finitos é utilizado para formular e analisar os modelos dos casos de estudo em programas de cálculo automático, *Sap2000* e *Inventor*, pois permitem simular as características mecânicas e geométricas complexas.

## 1.2 Identificação dos objetivos

Nesta dissertação pretende-se alcançar os seguintes objetivos:

- Compreender e identificar o efeito das pressões do vento nas estruturas geodésicas à superfície e o efeito das pressões do solo nas estruturas geodésicas enterradas;
- Dimensionar elementos de barra, em madeira, para estruturas à superfície;
- Estudar resistência do material bambu para conectores das estruturas geodésicas à superfície;
- Dimensionar elementos de face e de barra, em aço, para estruturas enterradas.

## 1.3 Estruturação

A dissertação é estruturada em quatro capítulos, com os respectivos conteúdos descritos sumariamente:

### **Capítulo segundo - Estado de Arte**

Este capítulo, subdivide-se em dois subcapítulos. No primeiro é identificada a origem da estrutura - cúpula e é feita uma breve descrição da evolução da mesma, no decorrer dos séculos, ao nível dos materiais e sua função. Dá-se primazia às cúpulas contemporâneas, que a partir do séc. XX e até hoje, contribuem para a evolução da Arquitetura e da Engenharia com a utilização de novos materiais e estruturas reticuladas.

No segundo subcapítulo, é apresentada uma revisão das cúpulas geodésicas que é específico da presente dissertação. Esta revisão pretende dar a conhecer o seu enquadramento histórico, a sua forma e geometria, o conceito de frequência, os seus elementos constituintes, carregamentos aplicados e, vantagens e desvantagens da sua aplicação.

### **Capítulo terceiro - Casos de estudo**

Neste capítulo é apresentada a conceção dos vários modelos estruturais de cúpulas geodésicas. Inicialmente a definição da geometria dos modelos, e posteriormente a sua materialização. Estes modelos são dimensionados de forma iterativa para diferentes combinações de ações e, para validação dos modelos são realizadas análises estáticas e verificação de segurança ao Estado Limite Último para os dois casos de estudo e, em particular para o caso de estudo, de cúpulas enterradas, ao Estado Limite Último de Utilização.

### **Capítulo quarto - Conclusões e Desenvolvimentos Futuros**

No último capítulo são resumidos os resultados obtidos, reforçando a importância do estudo de estruturas geodésicas nos diferentes âmbitos.



# Capítulo 2

## Estado de Arte

### 2.1 Cúpulas

Cúpula ou domo, provêm do latim *cupula* e *domus*, respetivamente, e dá significado a uma abóbada hemisférica gerada pela rotação de um arco, em torno de um eixo, que cobre uma superfície circular, quadrada, poligonal ou elíptica. Este elemento arquitetónico e estrutural, e com superfície circular, é objeto de análise no presente capítulo e seguintes.

#### 2.1.1 Enquadramento histórico

Não é possível datar com exatidão a primeira construção de um cúpula, no entanto é de conhecimento que os povos da pré-história habitavam em estruturas com essa forma - falsas cúpulas.

A falsa cúpula, ou falso arco, pode ser descrita como um sistema estrutural, constituído pela sobreposição de camadas de pedra, adobe, madeira ou, blocos de neve, as quais se projetam em direção ao centro, através da sobreposição de sucessivos anéis horizontais, ou em espiral (Oliveira, E. V., 1968); (Oliveira, E. V. et al., 1994); (Rovero, L. & Toniatti, U., 2014).

De acordo com Morales Gómez foi na Grécia, que surge a materialização da falsa cúpula no séc. XIV a.C., o Tesouro de Atreu também chamado de Tumba de Atreu, em Micenas, como se pode observar na Figura 2.1. Esta construção especificamente com 14,5 m de diâmetro foi construída em fiadas concêntricas com blocos de pedra que formam a abóbada até ao topo. Estas culturas creto-micénicas disseminaram as falsas cúpulas em pedra (Gómez, A. M. et al., 2014).

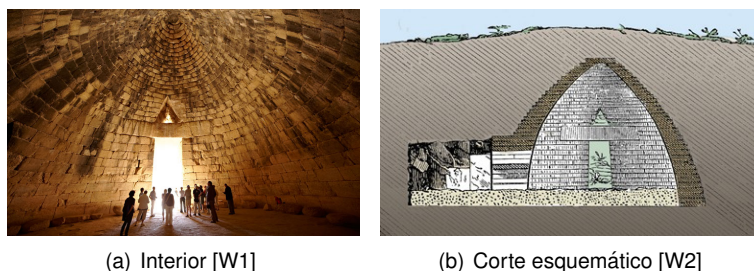


Figura 2.1: Tesouro de Atreu

Outras fontes apresentam que diferentes culturas, nomeadamente nômadas, com materiais locais independentemente da sua durabilidade, também fizeram emergir o conceito de falsa cúpula.

Uma *wigwam* é uma construção abobadada (Figura 2.2(a)) ou em forma de cone, semipermanente, que recorre a materiais como paus arqueados cobertos com solo ou peles, usada anteriormente por povos indígenas predominantemente na metade oriental da América do Norte antes da era da colonização. Atualmente, a *wigwam* é usada para culto ou cerimónias (The Canadian Encyclopedia, 2008).

Outro exemplo, é o *igloo* que apresenta a forma de cúpula e é construído com blocos de neve compactada pelos povos inuítes do Ártico para habitação, ver Figura 2.2(b). No entanto, com a introdução das casas modernas de estilo europeu, deixaram de ser uma opção de habitação. Na atualidade, o *igloo* é um marco cultural significativo das comunidades do Ártico. O *igloo* tem um valor prático para as pessoas que desempenham funções de caça e para as que necessitam de um abrigo de emergência. Porém, tem-se observado que as alterações climáticas têm contribuído negativamente para a permanência destas construções no Ártico (The Canadian Encyclopedia, 2006).

Também o povo seminómada Himba da Namíbia constrói *igloo's* em zonas áridas, Figura 2.2(c), com taipa e revestimento com uma argamassa de produtos animais, para habitação temporária em campos sazonais de gado ou como habitação permanente para os mais pobres.

O *yurt*, habitação dos povos nômadas de montagem rápida com uma cúpula feita de ripas de madeira (Figura 2.3(a)), é um exemplo de falsa cúpula na Ásia central.



(a) *Wigwam* [W3]



(b) *Igloo* na Antártida [W4]



(c) *Igloo* no deserto [W5]

Figura 2.2: Construções Primitivas - *wigwam* e *igloo*



(a) *Yurt* [W6]

Figura 2.3: Construções Primitivas - *yurt*

Ao longo do tempo a arquitetura grega definiu-se com estruturas arquivadas, pelo que se afastou do conceito de cúpula. Foram os romanos que recuperaram este conceito, ao desenvolver um monumento icónico, no séc. II d.C. mandado construir pelo Imperador Adriano, o Panteão de Roma (Figura 2.4), com uma cúpula de aproximadamente 43 m de diâmetro construída a partir de betão não reforçado.

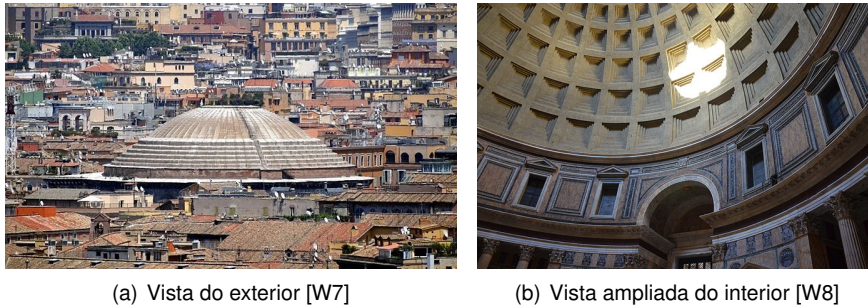


Figura 2.4: Panteão de Roma

No período bizantino, destaca-se a Basílica de Santa Sofia construída no séc. VI d.C. pelo Império Bizantino e que virá a tornar-se referência para outros edifícios religiosos. Esta basílica possui semi-domos que envolvem o domo principal, todos com o mesmo diâmetro e um total de 76.2 m, ver Figura (2.5).



Figura 2.5: Basílica de Santa Sofia, Constantinopla, Império Bizantino (atual Istambul) [W9]

No período muçulmano, final do séc. I d.C., surge o modelo da cúpula califal, na qual oito nervuras se cruzam para desenhar um polígono estrelado. O modelo califal pode ser observado na cúpula da Rocha, séc. VII (Figura 2.6) e, no Taj Mahal, séc. XVII (Figura 2.7).



Figura 2.6: Cúpula da Rocha, Cidade velha de Jerusalém, Jerusalém



(a) Vista do exterior [W12]

(b) Vista ampliada do interior [W13]

Figura 2.7: *Taj Mahal*, Agra, Índia

No período do Renascimento o uso do tambor, das linhas ascendentes das nervuras, da curvatura parabólica e do remate com lanternim, contribuem para a valorização da construção exterior das cúpulas.

Durante este período constrói-se a cúpula de Santa Maria del Fiore (Figura 2.8), uma das mais impressionantes e na qual Brunelleschi recuperou técnicas clássicas combinadas com soluções inovadoras (duplo pano da cúpula).

A cúpula de Brunelleschi foi ainda fonte de inspiração de Michelangelo, aquando da projeção da cúpula de São Pedro, no século XVI (Figura 2.9).



(a) Vista do exterior [W14]

(b) Vista ampliada do interior [W15]

Figura 2.8: Santa Maria del Fiori, Florença, Itália



(a) Vista do exterior [W16]

(b) Vista ampliada do interior [W17]

Figura 2.9: Basílica de São Pedro, Vaticano

Avançando cronologicamente para o séc. XX e atual séc. XXI, pode-se afirmar que as estruturas usadas por parte de povos nómadas e/ou indígenas desde a pré-história até hoje, são ainda opções de construção para estes povos.

Nos países desenvolvidos pode-se observar que existe uma construção inspirada no conceito destas estruturas que proporcionam o contacto próximo com a natureza, desenvolvendo um conceito ecológico e de sustentabilidade. Estas construções contrariam o recorrente uso atual de linhas e planos retos e materiais como o betão e aço na construção, que são empregues devido à modernização e evolução da tecnologia (Prenis, J. 1973).

## 2.1.2 Tipos de cúpulas

### Cúpulas entre a idade média e moderna

Na construção de cúpulas a partir do séc. X até ao séc. XVIII, foram sendo aprimoradas as técnicas geométricas até que, no final desse período, a partir do desenvolvimento na matemática e física conseguiram-se reformular as práticas construtivas tradicionais de arcos e abóbadas encontrando uma forma mais estável e com menor uso de materiais – curva catenária. Os elementos das cúpulas deixaram de ser tratados como um todo, passando a ser a composição de elementos menores.

De seguida, apresentam-se algumas definições e exemplos das cúpulas, que até aos dias de hoje são um marco visível na arquitetura.

- Cúpula avenerada

É uma forma arquitetónica com um perfil de uma concha, que pode ser hemisférica ou um quarto de esfera. Uma das conchas icónicas é a vieira que é usada na arte sacra. Em Espanha, a Mesquita de Córdoba (séc. X), Figura 2.10(a) e, o palácio episcopal de Tarazona em Zaragoza (séc. XVI), Figura 2.10(b), são exemplos deste tipo de cúpulas.

- Cúpula bulbosa

É uma forma semelhante à de um bolbo ou à de uma cebola. É característica da arquitetura russa, com variantes na arquitetura centro europeia. Um exemplo é a Catedral de Munique (Figura 2.10(c)) ou a Catedral da Anunciação no Kremlin (Figura 2.10(d)).

- Cúpula de arcos entrecruzados

É constituída por arcos cruzados ou nervos que não passam pelo centro. Este sistema é comum na arquitetura islâmica, visível na Mesquita de Córdoba (Figura 2.10(e)). Estas influências árabes transitaram para o período românico por influências árabes.

- Cúpula de moçárabes

Os moçárabes são trabalhos em favo de mel ou forma de estalactite, são desenhos ornamentais usados em certos tipos de arquitetura islâmica, ver Figura 2.11(a). Os moçárabes, em conjunto, são complexos prismas verticais que se assemelham a estalactites, normalmente são usados em frisos, janelas, arcos, colunas ou abóbadas.

- Cúpula agaloada

Tem a superfície dividida verticalmente por arcos ou costelas, que é visível por exemplo na Catedral de Sevilha (Figura 2.11(b)). Esta cúpula é geralmente decorada com mísulas côncavas ou segmentos que, quando unidos, originam arestas reentrantes que convergem no centro. A cúpula agaloada serve para cobrir os espaços poligonais.

- Cúpula ovalada

É uma cúpula particular do período Barroco que, devido à utilização de polígonos curvos, interrompe o modelo clássico baseado no círculo. A oval torna-se um dos elementos preferidos pela sua versatilidade, (ver Figura 2.11(c)) facilidade de construção e possibilidade de cobertura de espaços retangulares aos quais imprime o movimento próprio das estruturas curvas, tão apreciadas neste movimento.

- Cúpula sobre pendentes

É uma cúpula que se ergue sobre quatro triângulos esféricos ou pendentes, permitindo a transição da planta poligonal ou quadrada para a planta circular da cúpula, pode ser observada no Mercado da Seda, Valência, ver Figura 2.11(d).



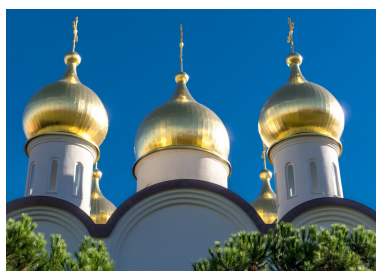
(a) Mesquita de Córdoba, Espanha



(b) Palácio de Tarazona, Espanha



(c) Catedral de Munique, Alemanha [W18]



(d) Catedral da Anunciação de Kremlin de Moscovo, Rússia [W18]



(e) Mesquita de Córdoba, Espanha

Figura 2.10: Diferentes tipos de cúpulas - Parte 1



(a) Palácio Generalife, Alhambra, Espanha



(b) Catedral de Sevilha, Espanha



(c) Catedral de Sevilha, Espanha



(d) Mercado da Seda, Valência, Espanha

Figura 2.11: Diferentes tipos de cúpulas - Parte 2

### Cúpulas da idade contemporânea

O aparecimento e difusão construtiva de novos materiais durante o século XX (aço e vidro) propiciou o aparecimento de cúpulas que, seguindo retículas determinadas, são realizadas exclusivamente com estes materiais, embora o aço, por vezes, possa ser substituído por outras ligas metálicas ou por madeira. A seguir apresentam-se as diferentes cúpulas reticuladas:

- Cúpula nervurada:

É uma estrutura formada por uma série de arcos de inércia elevada na direção meridional, que são ligados por anéis horizontais e paralelos. Esta cúpula pode ser reforçada por um anel de tração na sua base, podendo possuir uma abertura superior através de um anel de compressão (ver Figura 2.12(a)).

- Cúpula Schwedler:

Semelhante à cúpula nervurada, para além dos elementos existentes nesta, existe ainda um conjunto de elementos na diagonal, que servem de contraventamentos, que permitem formar triangulações e dar maior rigidez à estrutura (ver Figura 2.12(b)).

- Cúpula lamelar:

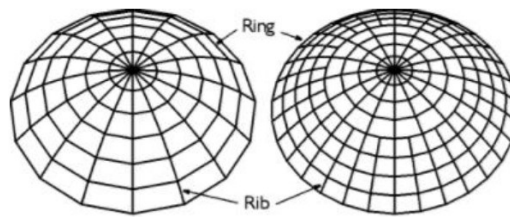
É uma estrutura formada por elementos - lamelas, que interligados compõem uma malha de losangos tridimensional. Também pode conter um ou mais anéis horizontais de forma a criar uma malha triangular. As lamelas tanto podem ser curvilíneas como paralelas (ver Figura 2.12(c)).

- Cúpula geodésica:

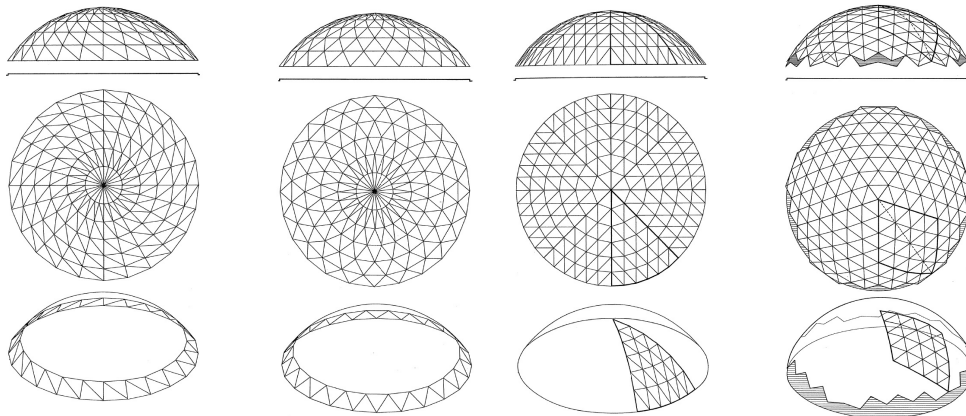
É uma estrutura composta por uma rede de triângulos (ver Figura 2.12(d)).

- Cúpula treliçada espacial:

É definida por uma sistema estrutural de elementos lineares (barras), usualmente de aço com perfil tubular, não complanares e, ligados uns aos outros através de nós (ver Figura 2.12(e)).



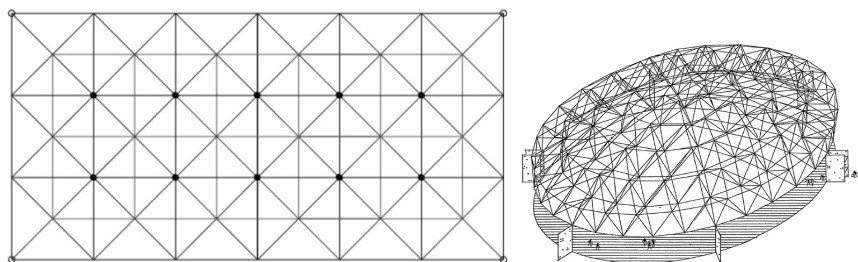
(a) Cúpula nervurada (Makowski, Z. S., 1984)



(b) Cúpula Schwebler (Engel, H., 2013)

(c) Cúpula lamelar (Engel, H., 2013)

(d) Cúpula geodésica (Engel, H., 2013)



(e) Cúpula treliçada espacial (Engel, H., 2013) (Sander, A. & Souza, C. D., 2006)

Figura 2.12: Diferentes tipos de cúpulas contemporâneas



## 2.2 Cúpulas geodésicas

Neste subcapítulo é realizada uma revisão das cúpulas geodésicas, nomeadamente no seu enquadramento histórico; características no âmbito geométrico, estrutural, funcional e estético; vantagens e desvantagens da sua aplicação e a definição dos carregamentos a considerar na estrutura.

### 2.2.1 Enquadramento histórico

Ao longo dos séculos nota-se um especial interesse em sistemas estruturais que tenham a capacidade de vencer grandes vãos, sem quaisquer interferência de apoios internos.

A primeira cúpula geodésica, foi desenhada e construída em 1923, por *Walter Bauersfeld* em Jena, Alemanha (ZENVISION GmbH).

Na década 50 foi graças a *Buckminster Fuller* (líder do design, da arquitetura e das comunidades alternativas) que as cúpulas geodésicas se tornaram mais frequentes.

De facto, *Buckminster Fuller* conseguiu o registo de uma patente, em 1951, para uma versão melhorada da forma das cúpulas geodésicas, que desde então, tem sido usada em estruturas como o Poliedro de Caracas (Caracas, Venezuela, 1974) (Figura 2.13(a)), Montreal Biosphère (Expo 1967, Montreal, Canada) (Figura 2.14(a)) e The Eden Project (Cornwall, UK, 2001) (Figura 2.14(b)).

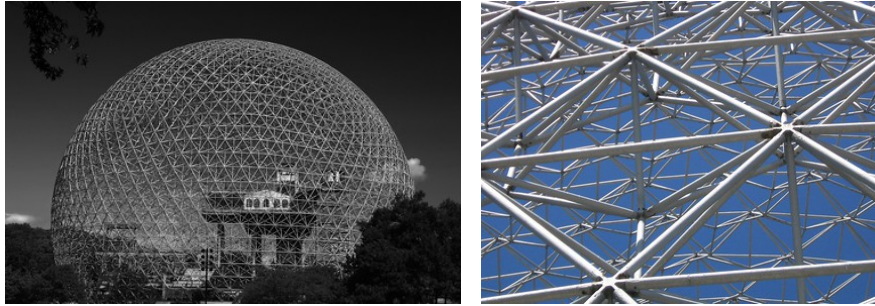
A paixão de *Buckminster Fuller* pelas cúpulas geodésicas vem da afinidade da sua forma com a Natureza e, da vontade de criar uma forma natural e orgânica, um efeito que ele descreveu como a “energetic-synergetic” geométrica das cúpulas (Fuller, D. E. B. & Applewhite, E. J., 1967). “Energetic” é referência à ideia de Fuller de que a Natureza constrói sempre as estruturas mais económicas.

Afirmou, ainda, que as cúpulas geodésicas se baseiam em princípios que incorporam distribuições de força semelhantes às dos átomos, moléculas e cristais, tornando as formas de construção mais leves e eficientes. A sinergia define que “o comportamento da totalidade dos sistemas não pode ser prognosticado com base no comportamento das suas partes separadas” (Fuller, D. E. B. & Applewhite, E. J., 1967). Da mesma forma, a cúpula geodésica apresenta uma robustez e rigidez maiores da que resulta da soma dos componentes individuais que a constituem. (Fuller, D. E. B. & Applewhite, E. J., 1967)



(a) Poliedro de Caracas[W19]

Figura 2.13: Cúpulas geodésicas - Parte 1



(a) Montreal Biosphère [W20] [W21]



(b) The Eden Project [W22] [W23]

Figura 2.14: Cúpulas geodésicas - Parte 2

## 2.2.2 Natureza da geodésica

A palavra geodésica, provém do termo *"geodesia"*, que por sua vez foi utilizado pela primeira vez na Grécia Antiga, por Aristóteles, e significa as divisões geográficas da Terra, ou o ato de dividir a Terra.

A geodesia é simultaneamente um ramo das geociências e um tipo de engenharia, que estuda e analisa as dimensões, a forma e o campo de gravidade da Terra. De acordo com a área da Topografia esta ciência trata de o levantamento da forma e da sua representação e, ainda da superfície terrestre.

Na Matemática aplica-se a geodesia na determinação da medição de superfícies curvas, sendo que uma geodésica é a distância mínima entre dois pontos pertencentes ao mesmo espaço.

## 2.2.3 Forma e geometria

Assumindo que a esfera é a figura geométrica de base para a construção de uma cúpula geodésica, e que possui o maior volume com a mínima área de superfície e visto que, as melhores aproximações para uma esfera são os sólidos platônicos ou os poliedros regulares, quanto mais faces estes tiverem mais a geometria será aproximada.

De acordo com (Fuller, D. E. B. & Applewhite, E. J., 1967), o poliedro que tem melhor aproximação à esfera é aquele que utiliza polígonos triangulares de dimensão constante e que sejam equiláteros. Os sólidos platônicos que respeitam esta definição são apenas: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. O icosaedro é o sólido que melhor se aproxima, e é este, na sua forma hemisférica, que concede a forma às cúpulas em análise nesta dissertação.

(Pinto, L. F. M., 2015) explica que "para definir geometricamente o sólido gerador do domo geodésico

- icosaedro, inicia-se com uma diagonal na vertical e define-se a sua projeção horizontal. Na posição optada, dez faces são visíveis (viradas para cima) e dez faces não visíveis (viradas para baixo). O contorno aparente corresponde a um decágono regular e os vértices distribuem-se por quatro níveis: um vértice no nível inferior, cinco vértices no segundo nível, cinco vértices no terceiro nível e um vértice no nível superior. Para se determinar os quatro níveis a que se encontram os vértices e a projeção vertical do poliedro, considera-se um plano paralelo a duas arestas e perpendicular a quatro faces (duas visíveis e duas não visíveis, em projeção horizontal). As arestas frontais projetam-se em verdadeira grandeza, enquanto que as faces perpendiculares projetam-se segundo segmentos com o comprimento igual à altura dos triângulos das faces. O contorno aparente vertical do sólido é constituído pela projeção de quatro faces projetantes e duas arestas frontais. Para além das faces projetantes, a projeção vertical do icosaedro é constituída por 16 faces com projeção coincidente, duas a duas. Diretamente sobre a projeção vertical, pode-se determinar o raio da esfera circunscrita e o raio da esfera inscrita no poliedro. O raio da esfera circunscrita corresponde à distância do centro do sólido aos vértices (das arestas frontais) e o raio da esfera inscrita corresponde à distância do centro do sólido às faces (projetantes).”

Apresentam-se as projeções ortogonais do sólido na Figura 2.15, para ilustração da conceção do domo geodésico.

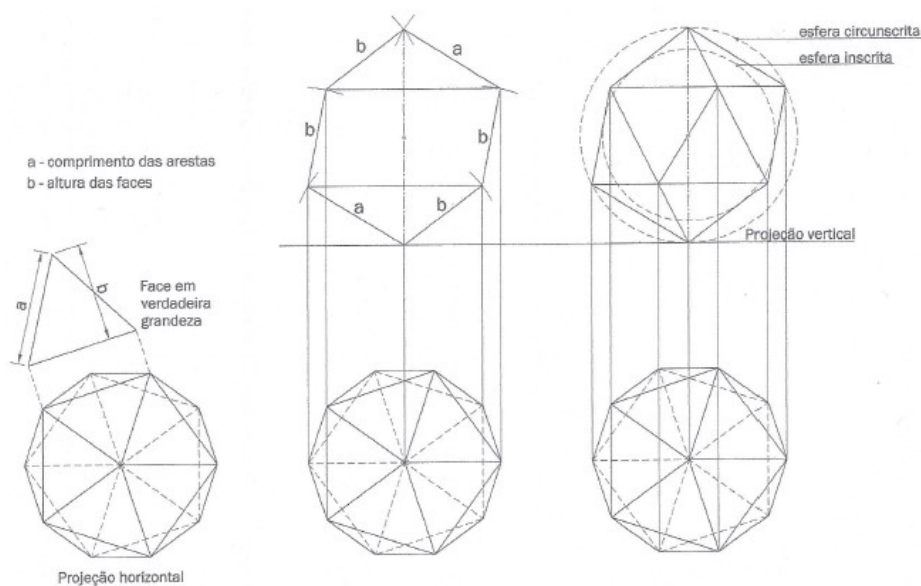


Figura 2.15: Projeções ortogonais do icosaedro (Pinto, L. F. M., 2015)

*Buckminster Fuller* desenhou as cúpulas geodésicas, a partir da divisão esférica de um icosaedro. De acordo com (Marcolli, A., 1980), o processo consiste basicamente em dividir cada face do icosaedro em triângulos equiláteros iguais e projetar radialmente os vértices desses triângulos na esfera circunscrita. O centro de projeção será, naturalmente, o centro do icosaedro – que coincide com o centro das esferas inscrita e circunscrita – e a superfície de projeção é a esfera circunscrita. Quanto mais forem subdivididas as faces do icosaedro, mais triângulos serão obtidos e, conseqüentemente, mais faces terá a geodésica, o que se a aproximará, cada vez mais, de uma superfície esférica.

## 2.2.4 Conceito de frequência e definição dos elementos constituintes

A rede geodésica representa a superestrutura da cúpula e é constituída por elementos de barras e nós.

Com o objetivo de tornar a rede mais regular, ou seja, mais próxima de uma superfície esférica, subdividem-se os triângulos iniciais, criando assim mais triângulos e com isto, mais membros. Esta subdivisão é igualmente conhecida como frequência, quando referente a cúpulas geodésicas, exemplos representados na Figura 2.16.

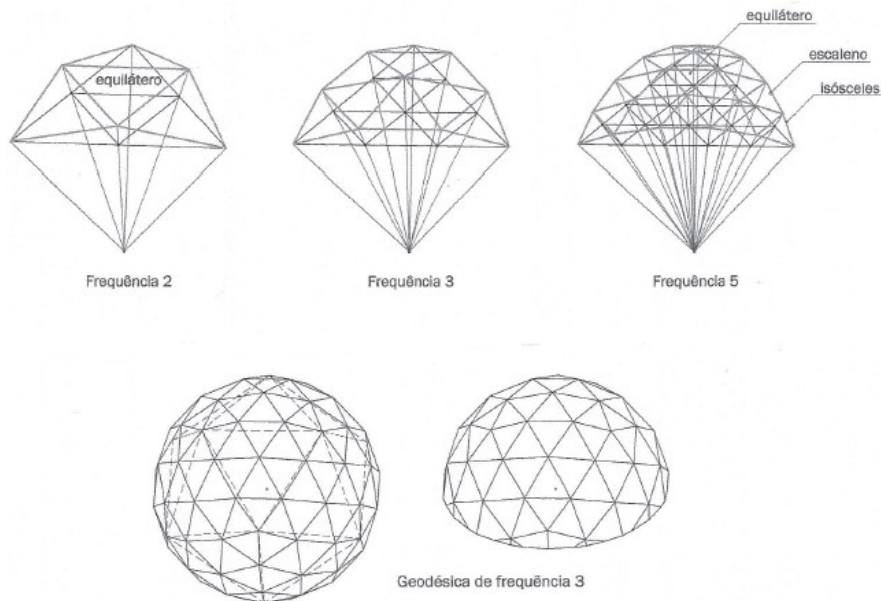


Figura 2.16: Geração de geodésicas de diferentes frequências (Pinto, L. F. M., 2015)

A frequência é correntemente representada por  $V_n$  que refere o número de divisões,  $n$ , do triângulo inicial. Para elementos com a mesma secção transversal, quanto maior for  $n$ , menos comprimento têm os elementos de barra, o que pode resultar numa estrutura menos esbelta face a estruturas com  $n$  inferiores.

Para esta subdivisão, existem três classes consoante o tipo de poliedro que se usa, ver Figura 2.17. As subdivisões podem ser de tipo 1, em que as linhas de divisão são paralelas às arestas dos membros originais, e de tipo 2, em que as mesmas linhas são perpendiculares aos membros (Kubic, M., 2009), ver Figura 2.18.

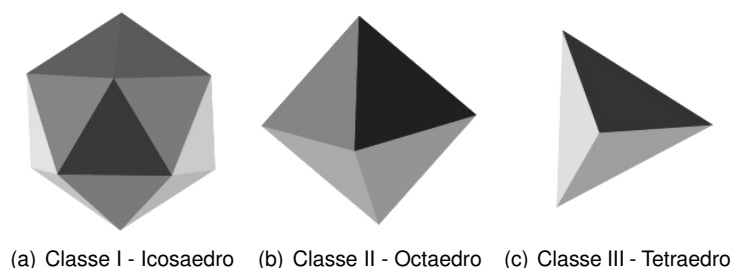


Figura 2.17: Classes de poliedros [W24]

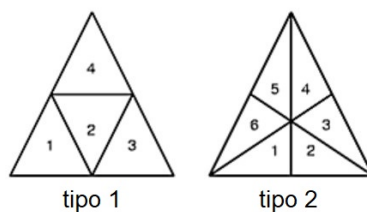


Figura 2.18: Tipo de subdivisão [W24]

Nesta dissertação, e como será apresentado no capítulo seguinte, os modelos serão desenvolvidos tendo por base a classe I, tipo 1.

Os nós que são gerados pela subdivisão de tipo 1 pertencem a um círculo perfeito, o que produz triângulos com dimensões iguais. No caso da subdivisão de tipo 2, as formas geométricas diferem.

Os nós podem ligar 4 a 6 barras (Figura 2.19) consoante a localização do nó na cúpula, independentemente da sua frequência.

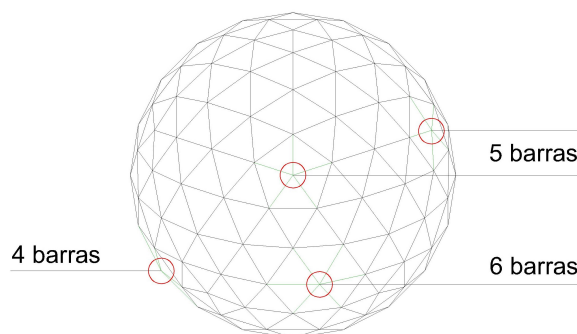


Figura 2.19: Diferentes tipos de nós (exemplo em cúpula  $V_4$  - classe I tipo 1)

A rede geodésica que resulta da introdução de determinada frequência no icosaedro regular, terá também triângulos com diferentes arestas (triângulos isósceles e escalenos), como foi possível observar na Figura 2.16.

A partir de um conjunto de pontos distribuídos no espaço é possível obter malhas de triângulos. O matemático *Delaunay* (1934) demonstrou que existe apenas uma única triangulação que maximiza a soma dos menores ângulos de cada triângulo. A triangulação de *Delaunay* resulta num conjunto de triângulos que ficará sempre o mais próximo possível de triângulos equiláteros (Magalhaes, G. M., et al., 2000). Este é o método usado para a geração dos diferentes modelos de cúpulas a analisar no capítulo seguinte.

Há que salvaguardar, que até agora, foram referidos os conceitos de esfera e de hemisfério, em que estão associados os de icosaedro e cúpula, respetivamente. Assim, as cúpulas de frequência de ordem ímpar não permitem criar uma forma hemisférica visto que o plano equatorial só é gerado para frequências de ordem par. Por conseguinte, são mencionadas as formas com "3/8" quando o plano está acima e "5/8" para o abaixo, relativamente ao plano equatorial - "1/2", ver Figura 2.20. A análise realizada nos capítulos seguintes far-se-á considerando as cúpulas com frequência par.

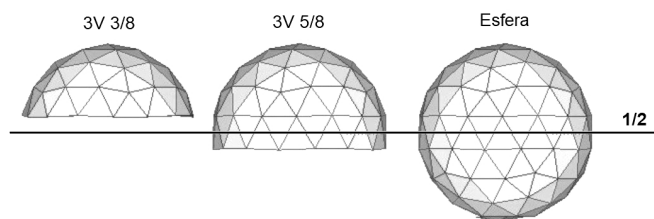


Figura 2.20: Exemplo de cúpula de frequência de ordem ímpar [W24]

## 2.2.5 Funcionamento estrutural

### 2.2.5.1 Modelo aplicado

O comportamento de uma cúpula geodésica depende da configuração dos seus elementos.

As cúpulas têm uma elevada rigidez em todas as direções.

Como já definidos, anteriormente, os elementos da superestrutura, não têm em consideração o revestimento, pois este é fixado às barras e aos nós, mas é de qualquer forma um elemento constituinte do sistema.

Assume-se que cada barra funciona com um modelo de barra bi-rotulada, ou seja, não são transmitidos momentos para os nós e conseqüentemente para as outras barras. Este modelo de barra apresenta a meio vão o valor de momentos máximos,  $M_{y,max}$  e  $M_{z,max}$ , sendo que para o seu dimensionamento são avaliadas as secções a meio vão, onde existe a combinação de esforços de momentos fletores e axial.

Nos nós, ou extremidades das barras, apenas são considerados os esforços axiais,  $N$ , para o seu dimensionamento.

## 2.2.6 Definição de carregamentos aplicados

Qualquer estrutura possui o seu peso próprio e, dependendo da sua localização de implementação terá que ser dimensionada tendo presentes os seguintes aspetos: exposição ao vento, ação do solo ou queda de neve.

Apresenta-se, de seguida, a definição dos carregamentos a considerar nas análises constantes no capítulo 3.

### 2.2.6.1 Peso próprio

Os principais componentes que contribuem para o peso da estrutura são os elementos – barras e o revestimento aplicado, e que diferem consoante os materiais escolhidos. O peso próprio é considerado com a direção da força da gravidade.

### 2.2.6.2 Vento

É possível representar a ação do vento na cúpula a partir de um conjunto de pressões ou de forças cujos efeitos são equivalentes aos efeitos extremos do vento turbulento, numa determinada localização.

De acordo com o Eurocódigo 1 (CEN, 2010), a resposta da estrutura depende da dimensão, da forma e das propriedades dinâmicas da estrutura. A resposta é calculada a partir da pressão dinâmica de pico,  $q_p$ , que depende de diversos fatores e parâmetros, nomeadamente o regime local dos ventos, da rugosidade, do terreno, da orografia e da altura de referência. A pressão dinâmica de pico também depende dos coeficientes de força e de pressão,  $c_p$  e do coeficiente estrutural,  $c_s$   $c_d$ .

Para obter os valores de pressão exterior exercida pelo vento nos diferentes planos, apresenta-se a equação Eq.2.1, em que  $q_p$  é um valor característico da pressão dinâmica de pico e,  $c_{pe}$ , o coeficiente de pressão exterior definido a partir de interpolações com base na Figura 2.21.

$$w_e = q_p(z_e) \cdot c_{pe} \quad (2.1)$$

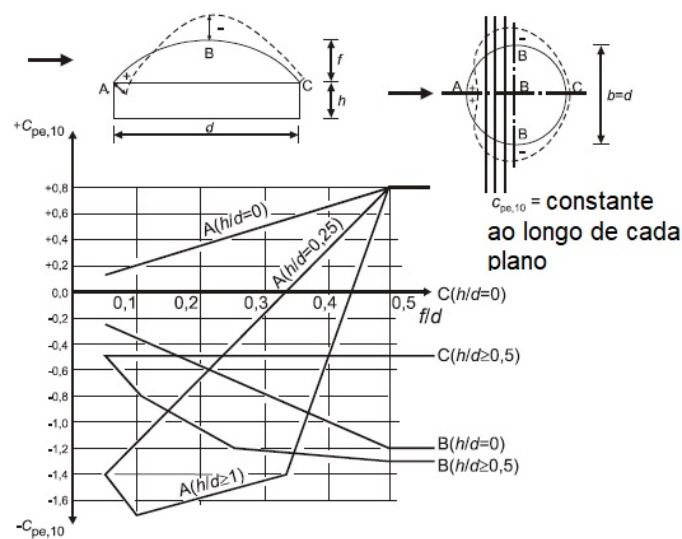


Figura 2.21: Valores recomendados dos coeficientes de pressão exterior  $c_{pe,10}$  para cúpulas de base circular (CEN, 2010)

### 2.2.6.3 Solo

É considerado o carregamento do solo caso a estrutura esteja enterrada. Assume-se que esta terá um comportamento como uma estrutura usual de contenção que suportará todo o solo que exerce força sobre a mesma.

Para calcular as forças sobre a estrutura, a teoria de *Rankine* (Rankine, W. J. M., 1857) foi aplicada para calcular as tensões horizontais e verticais totais induzidas pelo peso do solo, com base na profundidade  $z$  abaixo de nível de referência definido, como mostrado na Figura 2.22. A área de superfície da cúpula é dividida entre os nós, permitindo que as tensões calculadas sejam convertidas em forças nodais.

Terzaghi, K. (1943) identificou que a tensão normal total,  $\sigma$ , é a soma das tensões transmitidas pelo contacto entre as partículas (tensões efetivas),  $\sigma'$ , e a pressão da água (pressão neutra),  $u$ . A Eq.2.2, remete para esse princípio das tensões efetivas.

$$\sigma = \sigma' + u \quad (2.2)$$

É importante relacionar a distribuição de tensões verticais com aquelas que são induzidas horizontalmente na estrutura. A teoria de *Rankine* da pressão do solo considera que existe um estado de tensão numa massa de solo quando a condição de equilíbrio plástico é atingida, ou seja, quando a rotura por corte ocorrer em toda a massa.

A relação entre as tensões horizontais e verticais do solo, Eq.2.6, são relacionadas através de um coeficiente de impulso repouso,  $K_0$ , Eq.2.5, definida por Jaky (Morgenstem, N. R. & Eisenstein, Z., 1970), que é controlado pelo parâmetro de resistência ao corte,  $\phi$ , intrínseco do solo:

$$\sigma_h = K_0 \cdot \sigma_v \quad (2.3)$$

Em que:

$$\sigma_v = \gamma \cdot z \quad (2.4)$$

e,

$$K_0 = 1 - \sin(\phi) \quad (2.5)$$

Para o cálculo das tensões impostas pelo solo à estrutura é considerado o coeficiente de impulso de repouso,  $K_0$ , (2.5), pois durante a construção não é considerada qualquer tensão devida à compactação e, a longo prazo, a estrutura deixa de ter qualquer deformação e deslocamento significativos.

As pressões da sobrecarga,  $sc$ , são calculadas mediante:

$$sc = K_0 \cdot sc \quad (2.6)$$

Em que,  $sc$ , corresponde à sobrecarga de utilização.

A seguir apresenta-se o modelo de tensões a considerar nas análises que são realizadas, aquando da modelação de uma estrutura enterrada (Figura 2.22). De notar que  $\sigma_v$  corresponde a  $\sigma_z$  e,  $\sigma_h$  a  $\sigma_x$  ou  $\sigma_y$ .



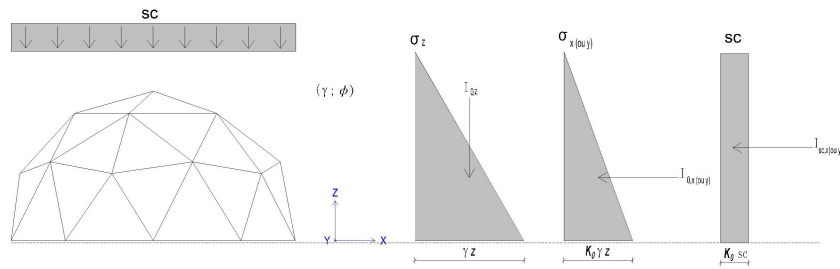


Figura 2.22: Tensões do solo em profundidade

## 2.2.7 Vantagens e desvantagens

A estrutura de uma cúpula geodésica é extremamente leve quando comparada com uma estrutura em alvenaria, para uma mesma área de implantação. De acordo com (Soares, T. L. d. F. & Arruda, A. J. V., 2016), estas propriedades da estrutura são uma mais valia face a outras pois, a esfera tem menos 25% de área de implantação por volume fechado do que qualquer outra forma. E ainda, a cúpula combinada com a sua estabilidade inerente aos triângulos e a vantajosa proporção volume/área de implantação de uma esfera, resulta em menor gasto de materiais de construção para um mesmo espaço comparando com outras estruturas.

(Soares, T. L. d. F. & Arruda, A. J. V., 2016) estimam, ainda, que há uma redução de 30% de materiais e de 50% de energia em relação a uma construção convencional de alvenaria para uma mesma área construída. O que implica também a redução de custos de mão de obra, pois a montagem é mais fácil, simples e rápida.

Como anteriormente referido, a estrutura é leve, o perímetro aproximadamente circular e as cargas são uniformemente distribuídas, o que induz que não seja necessário recorrer à utilização de fundações profundas, quando a caracterização geotécnica do terreno assim o permitir. Por isso, para um terreno coeso, a construção da cúpula pode ser assente em fundações superficiais, o que reduz o tempo e os custos da construção.

Em suma, é a forma geodésica que otimiza o comportamento da estrutura face à carga existente, deslocando-a entre os elementos - barras, e por isso garante uma elevada capacidade de resistência e aerodinâmica face a situações extremas como: ventos fortes, tempestades, terremotos e grandes quedas de neve.

Um ponto menos positivo na construção das cúpulas geodésicas e que pode ser objeto de discussão do ponto de vista estético é o facto das barras que estão localizadas no plano equatorial, não serem todas tangentes a um plano referencial, quando se trata de uma cúpula de forma hemisférica e de forma de ordem ímpar.

Uma desvantagem a referir, de carácter funcional e decorrente da forma hemisférica desta estrutura, é o problema com o isolamento sonoro, no caso de existirem várias divisões sem teto no interior da cúpula, o que leva à propagação do som.

Outro ponto menos favorável, tem a ver com a forma curva das paredes da cúpula, que podem diminuir o espaço útil (Kubic, M., 2009).



# Capítulo 3

## Casos de Estudo

Neste capítulo é apresentada a concepção dos vários modelos de cúpulas geodésicas em estudo, recorrendo ao programa *Matlab* (MATLAB) para auxiliar à geometria e ao programa de cálculo automático *Sap2000* (SAP2000) para a materialização dos modelos e a respetiva análise dos seus comportamentos em diferentes combinações de ações.

### 3.1 Conceção da geometria

#### 3.1.1 Aplicação do algoritmo

Para gerar as cúpulas geodésicas é usado o algoritmo de (Zechmann, E., 2008), com algumas alterações no código, nomeadamente na extração de dados para posterior utilização nos modelos *Sap2000*.

Este algoritmo permite extrair de forma automática as coordenadas dos vértices geodésicos, e também as triangulações, pelo método de *Delaunay*, geradas com a finalidade de definir os vértices que estão mais próximos entre si.

Neste trabalho pretendem-se analisar quatro modelos de cúpulas com um mesmo raio e diferentes frequências. Para esse fim, o algoritmo necessita da introdução, pelo utilizador, dos seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} sphere &= \begin{cases} 0 & \text{se geometria hemisférica} \\ 1 & \text{se geometria esférica} \end{cases} \\ make\_plot &= \begin{cases} 0 & \text{se não imprime o gráfico} \\ 1 & \text{se imprime o gráfico} \end{cases} \\ faceopaque &= \begin{cases} 0 & \text{se gráfico com faces transparentes} \\ 1 & \text{se gráfico com faces opacas} \end{cases} \end{aligned}$$

$r$  = raio da superfície geodésica

$f$  = valor da frequência de ordem par a considerar

Para os modelos em estudo, o parâmetro *sphere* tem valor de 0 e, os parâmetros: *make\_plot* e *faceopaque* têm valor de 1. O valor de *r* foi constante com valor de 3.75 m.

Na Tabela 3.1 define-se o único valor variável, que corresponde ao valor da frequência.

Tabela 3.1: Valores de *f* usado na definição dos modelos em *Matlab*

| modelo   | $V_n$ | $V_2$ | $V_4$ | $V_6$ | $V_8$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>f</i> |       | 2     | 4     | 6     | 8     |

O raio escolhido corresponde aproximadamente a uma área da base coberta de 44 m<sup>2</sup>.

Os modelos são gerados a partir do poliedro - icosaedro, e a subdivisão dos triângulos é classe I tipo 1. De seguida, apresentam-se graficamente os modelos ( Figura 3.1) gerados a partir dos parâmetros anteriormente definidos e a contagem dos elementos desses mesmos modelos na Tabela 3.2:

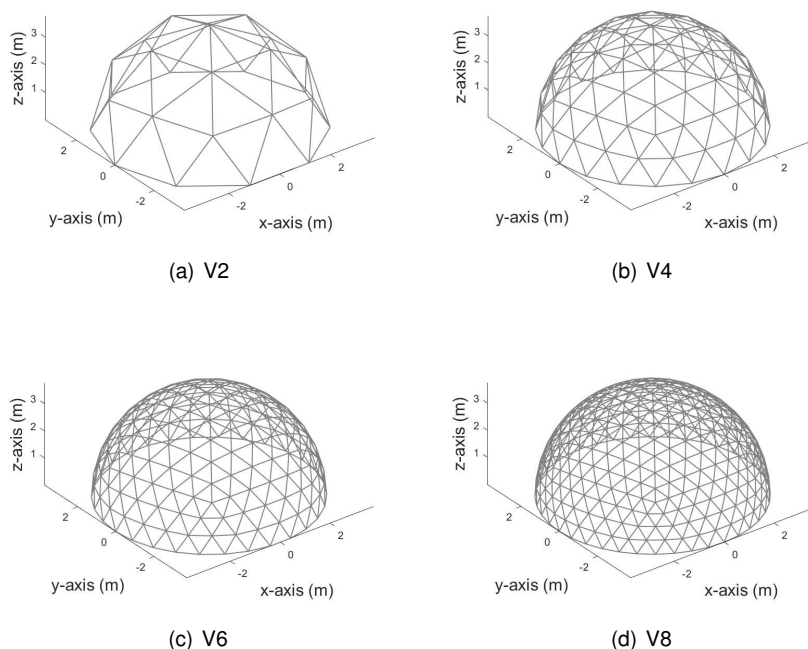


Figura 3.1: Modelos gerados a partir da função *make\_icosahedron* (Zechmann, E., 2008) em *Matlab*

Tabela 3.2: Contagem de elementos constituintes das cúpulas com frequência  $V_n$

|           | Nós   |      | Barras | Faces |
|-----------|-------|------|--------|-------|
|           | Total | Base |        |       |
| <b>V2</b> | 26    | 10   | 65     | 40    |
| <b>V4</b> | 91    | 20   | 250    | 160   |
| <b>V6</b> | 196   | 30   | 555    | 360   |
| <b>V8</b> | 341   | 60   | 980    | 640   |

O facto dos modelos apresentados serem, como referido atrás, de classe 1 tipo 1, apresenta-se uma elevada variação de comprimentos nas barras constituintes dos modelos. Na Tabela 3.3 mostra-se o número de barras de diferentes comprimentos nos modelos em estudo.

Tabela 3.3: Contagem de barras com diferente comprimento nas cúpulas com frequência  $Vn$

| Contagem de barras |    |
|--------------------|----|
| <b>V2</b>          | 2  |
| <b>V4</b>          | 6  |
| <b>V6</b>          | 9  |
| <b>V8</b>          | 19 |

Todos os dados, nomeadamente as coordenadas dos nós e as ligações entre eles, são guardados em ficheiros *Excel* para posterior importação no programa *Sap2000*.

## 3.2 Modelação numérica das cúpulas geodésicas

Previamente à modelação das cúpulas geodésicas é de realçar que estas cúpulas são analisadas em dois ambientes distintos. Um em que os modelos são fundados à superfície do terreno, e outro em que estes são totalmente enterrados.

### 3.2.1 Elementos finitos e secções transversais

A construção do modelo numérico no programa *Sap2000*, passa pela definição dos três tipos de elementos que constituem a estrutura: nós, barras e faces (ou cascas).

Inicialmente para a introdução da geometria são importados os dados obtidos do *matlab* sem especificar a geometria da secção e materiais dos elementos. A geometria é definida, no espaço tridimensional, a partir das coordenadas dos nós e ligações entre eles, ver Figura 3.2.

Os elementos que formam a rede geodésica dos diferentes modelos são:

- nó - *joint*, na modelação e análise serve apenas de identificação das extremidades ou vértices quer das barras quer das cascas;
- barra - *frame*, em que foi imposto em cada barra um *release* dos momentos nas extremidades, devido ao facto das barras serem articuladas na ligação com o nó;
- face - *shell*, painel que corresponde ao revestimento da estrutura geodésica e em que, as cargas aplicadas sobre este, são descarregadas para as barras.

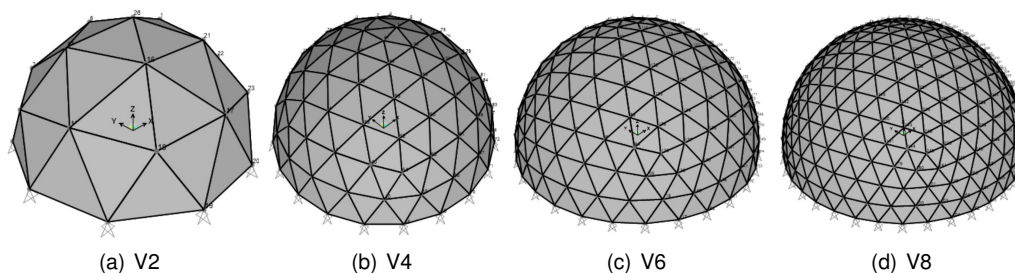


Figura 3.2: Modelos gerados a partir do programa *Sap2000*

A seguir é apresentada a Tabela 3.4 com os comprimentos máximos que os elementos de barras podem ter nos diversos modelos. É de realçar esta informação para posteriormente ser possível justificar opções tomadas no caso de estudo das cúpulas enterradas.

Tabela 3.4: Comprimento máximo das barras nos modelos  $Vn$

|               |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|
| $L_{max} (m)$ | V2   | V4   | V6   | V8   |
|               | 2.32 | 1.22 | 0.82 | 0.62 |

Posteriormente, procede-se, de forma iterativa, ao dimensionamento dos elementos. Para isso é necessário previamente conhecer quais as ações em causa.

### 3.2.2 Definição das ações e combinações de ações

À semelhança de qualquer outro projeto de estruturas, a quantificação dos esforços atuantes exige a definição prévia das ações e das combinações de ações.

É possível definir e quantificar as ações segundo o Eurocódigo 1 (?) e verificar a segurança de acordo com as normas previstas no Eurocódigo 5 (?), no caso de elementos de madeira, ou no Eurocódigo 3 (?), para elementos de aço.

É imprescindível conhecer as ações pois estas geram esforços ou deformações nas estruturas e podem ser:

- Ações permanentes (G) : peso próprio da estrutura- *dead*; pressão do solo- *soil*
- Ações variáveis (Q): pressão do vento - *wind* ou sobrecarga - *sc*

Os elementos são dimensionados, segundo o Eurocódigo 1 (CEN, 2010), para o tipo de estado limite último (ELU) e estado limite de utilização (ELUt), ver Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Combinação de ações considerada nas modelações

| Tipo de Estado Limite (EL) | Combinação     | G                     | Q   |
|----------------------------|----------------|-----------------------|---|
| EL Último (STR)            | Fundamental    | $\gamma_{G,1}G_{k,1}$ | $\gamma_{Q,1}Q_{k,1} + \sum \gamma_{Q,i}\psi_{0,i}Q_{ki}$ |
| EL de Utilização           | Característica | $G_{k,1}$             | $Q_{k,1} + \sum \psi_{0,i}Q_{ki}$                         |

com os coeficientes,  $\gamma_G$  e  $\gamma_Q$  a corresponderem a:

$$\gamma_G = 1.35 / 1.00 ; \gamma_Q = 1.50 / 0.00$$

As combinações de ações que são modeladas apresentam-se a seguir:

$$Comb_1 = 1,35 \cdot dead + 1,50 \cdot wind \quad (3.1)$$

$$Comb_{1,ut} = dead + wind \quad (3.2)$$

$$Comb_2 = 1,35 \cdot (dead + soil) + 1.5 \cdot sc \quad (3.3)$$

$$Comb_{2,ut} = dead + soil + sc \quad (3.4)$$

### 3.2.2.1 Ação - vento

Para a quantificação da ação do vento é necessário definir um local para a implementação dos diferentes modelos estruturais em análise. A localização escolhida foi a Ericeira, distrito de Lisboa, ver Figura 3.3, pois está situada na orla costeira de Portugal, e por isso a estrutura carece de uma análise mais cuidada.

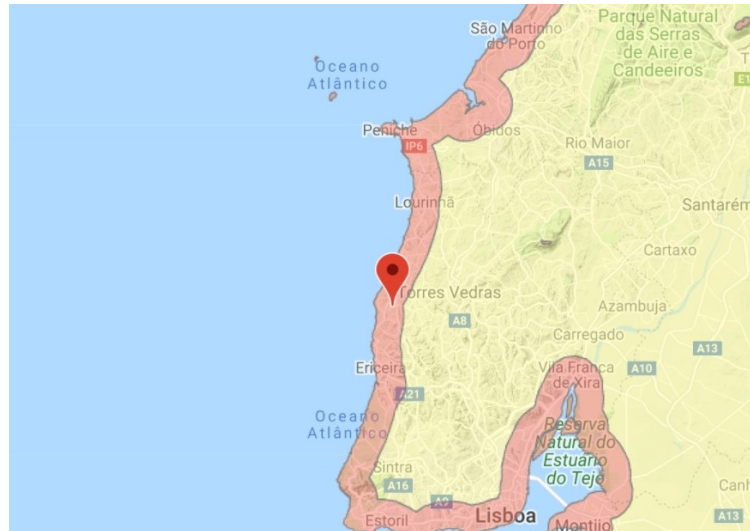


Figura 3.3: Localização da Ericeira de acordo com o tipo de zona segundo o EC1 [W25]

A força exercida pela vento,  $F_w$ , para qualquer face dos modelos é expressa pela soma vetorial das forças: exteriores,  $F_{w,e}$ , interiores,  $F_{w,i}$  e, de atrito,  $F_{fr}$ , resultantes do atrito do vento paralelamente às superfícies exteriores. No entanto, consideram-se nulas as forças interiores, pois assume-se que as estruturas estão completamente isoladas e sem aberturas, e nulas as forças de atrito pois não existem superfícies paralelas à direção do vento. A seguir são apresentadas as expressões e os parâmetros necessários à definição das pressões relativas ao vento, em cada face dos modelos. Estes baseiam-se na consulta do Eurocódigo 1 (?) e Anexo Nacional.

$$\frac{F_{w,e}}{A_{ref}} = c_s c_d \cdot w_e [kN/m^2] \quad (3.5)$$

em que:

$A_{ref}$ , área de referência do elemento *shell*;

$c_s c_d$ , coeficiente estrutural, pois cúpulas com altura inferior a 15 m ( $c_s c_d=1$ );

$w_e$ , pressão exterior exercida pelo vento.

E como a pressão exterior,  $w_e$ , é dada por:

$$w_e = q_p(z_e) c_{pe} [kN/m^2] \quad (3.6)$$

em que:

$z_e$ , altura de referência ( $z_e = h + f = 0 + 3.75 = 3.75[m]$ );

$q_p(z_e)$ , pressão dinâmica de pico à altura de referência  $z_e$  ( $q_p(z_e) = 1.30 [N/m^2]$ );

$c_{pe}$ , coeficiente de pressão exterior.

Sendo assim o valor de força exercida pelo vento por unidade de área, para cada face é expresso por:

$$\frac{F_{w,e}}{A_{ref}} = 1.30 \cdot c_{pe} [kN/m^2] \quad (3.7)$$

Outros parâmetros:

- Localização - Ericeira:

Zona tipo B:

$v_{b,0} = 30 \text{ m/s}$ ;

Rugosidade máxima e Categoria do terreno I:

$z_0 = 0.005 \text{ m}$ ;

$z_{min} = 1 \text{ m}$ .

- Dados para cálculo de  $c_{pe,10}$  (coeficiente global de pressão exterior):

$f = 3.75 \text{ m}$ ;

$h = 0 \text{ m}$ ;

$d = 7.5 \text{ m}$ .

Do gráfico do EC1, na Figura 2.21 em 2.2.6.2, são retirados os valores de  $c_{pe,10}$  dos pontos A, B e C. Os valores são lidos a partir das retas associadas aos pontos e, nos eixos: horizontal " $f/d$ " e vertical " $+C_{pe,10}$ ".

As coordenadas dos pontos A, B e C estão definidas na Tabela 3.6, que vão posteriormente definir as retas auxiliares, para a estimativa dos  $c_{pe,10}$  nas diferentes faixas.

Tabela 3.6: Coordenadas dos pontos A, B e C retiradas do EC1

|         | Reta     | f/d | $C_{pe,10}$ |
|---------|----------|-----|-------------|
| Ponto A | A(h/d=0) | 0.5 | +0.8        |
| Ponto B | B(h/d=0) | 0.5 | -1.2        |
| Ponto C | C(h/d=0) | 0.5 | 0           |

Segundo o EC1, uma pressão exercida contra a superfície é considerada positiva (compressão), ao passo que uma sucção (tração), atuando com um sentido que se afasta da superfície, é considerada negativa.

A seguir apresenta-se na Figura 3.4 um gráfico esquemático com a definição das duas retas entre os pontos A e B e, B e C.



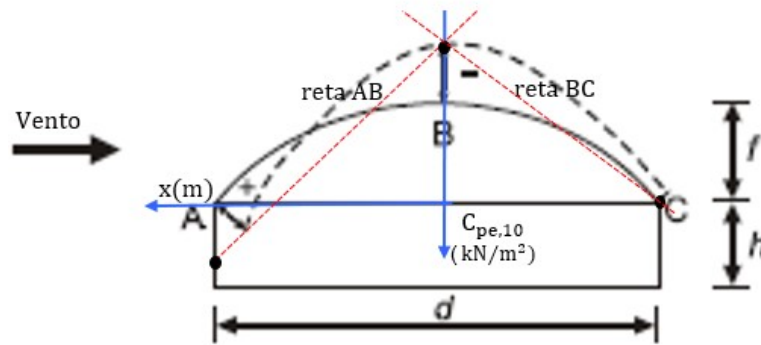


Figura 3.4: Esquemática das retas de  $C_{pe,10}$  em função da distância  $x$  segundo o EC1

A partir dos referenciais da Figura 3.4 é possível definir as equações das retas: AB (Eq. 3.8) e BC (Eq. 3.9), para posteriormente se identificar os elementos de face que estão à compressão e sucção nos diferentes modelos em estudo.

$$C_{pe,10} = 0.53 \cdot x - 1.2 \quad (3.8)$$

$$C_{pe,10} = -0.32 \cdot x - 1.2 \quad (3.9)$$

Definidas as retas, obtêm-se os valores de coeficiente de pressão exterior para cada plano,  $x_i$ , (ver Tabela 3.7). Estes planos,  $x_i$ , são esquematizados na Figura 3.5.

Tabela 3.7:  $C_{pe,10}$  nas faixas  $x_i$

|                  | $C_{pe,10}$ (reta AB) | $C_{pe,10}$ (reta BC) |
|------------------|-----------------------|-----------------------|
| $x_0 =$ +3.75    | +0.8                  | -                     |
| $x_1 =$ +3       | +0.4                  | -                     |
| $x_2 =$ +2.25    | 0                     | -                     |
| $x_3 =$ +1.5     | -0.4                  | -                     |
| $x_4 =$ +0.75    | -0.8                  | -                     |
| $x_5 =$ 0        | -1.2                  | -1.2                  |
| $x_6 =$ -0.75    | -                     | -0.96                 |
| $x_7 =$ -1.5     | -                     | -0.72                 |
| $x_8 =$ -2.25    | -                     | -0.48                 |
| $x_9 =$ -3       | -                     | -0.24                 |
| $x_{10} =$ -3.75 | -                     | 0                     |

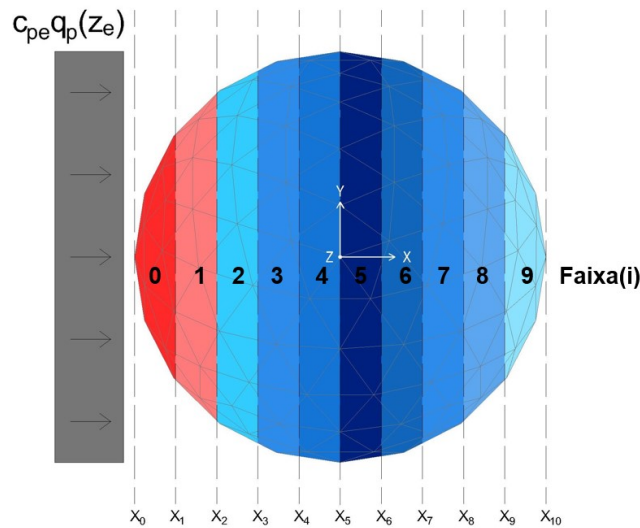


Figura 3.5: Demonstração da localização dos coeficientes de pressões exteriores nas diferentes faixas, em planta, do modelo  $V_4$

É assumido um  $C_{pe,10}$  médio por faixa dado pela Equação 3.10. Os valores obtidos estão apresentados na Tabela 3.8).

$$Faixa_i = \frac{C_{pe,10}(x_i) + C_{pe,10}(x_{i+1})}{2} \quad (3.10)$$

Tabela 3.8: Valores de  $C_{pe,10}$  por faixa

|                | Média $C_{pe,10}$ | $[x_i; x_{i+1}]$ |
|----------------|-------------------|------------------|
| <b>Faixa 0</b> | 0.6               | [3.75 ; 3]       |
| <b>Faixa 1</b> | 0.2               | [3 ; 2.25]       |
| <b>Faixa 2</b> | -0.2              | [2.25 ; 1.5]     |
| <b>Faixa 3</b> | -0.6              | [1.5 ; 0.75]     |
| <b>Faixa 4</b> | -1                | [0.75 ; 0]       |
| <b>Faixa 5</b> | -1.08             | [0 ; -0.75]      |
| <b>Faixa 6</b> | -0.84             | [-0.75 ; -1.5]   |
| <b>Faixa 7</b> | -0.6              | [-1.5 ; -2.25]   |
| <b>Faixa 8</b> | -0.32             | [-2.25 ; -3]     |
| <b>Faixa 9</b> | -0.12             | [-3 ; -3.75]     |

A seguir na Fig.3.6 apresentam-se graficamente os valores das faixas de  $C_{pe,10}$ , tendo por base novamente o esquema do EC1.

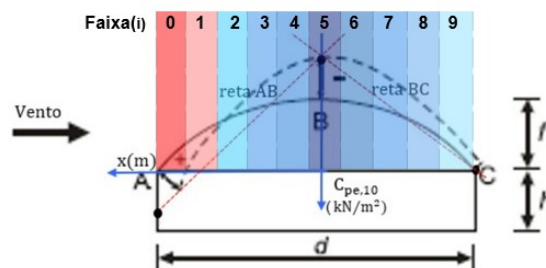


Figura 3.6: Esquematização gráfica da tabela de valores de  $C_{pe,10}$

Considerando que a amplitude das faixas de 0.75 m é significativamente pequena, assume-se que cada face tem um valor constante de  $C_{pe,10}$  da faixa a que corresponde o seu centróide.

Opta-se por considerar um mesmo número de faixas em todos os modelos, pois o raio é o mesmo, e o que varia nos modelos  $V_n$  é apenas o número de faces. Ou seja, o modelo  $V_8$  possui um maior número de faces, nas faixas 1 e 2, que terá valor positivo de  $C_{pe,10}$ , o que implica mais faces e maior área da superfície dos modelos à compressão (ver Tabela 3.9).

Tabela 3.9: Áreas com compressão nos modelos  $V_n$

|                                    | $V_2$ | $V_4$ | $V_6$ | $V_8$ |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Número de faces à compressão       | 7     | 30    | 69    | 126   |
| Área total de compressão [ $m^2$ ] | 14.1  | 16.1  | 16.7  | 17.1  |

De acordo com o EC1, estas pressões introduzidas na estrutura pela ação do vento são perpendiculares às faces, o que implica que no *Sap2000* estes valores sejam introduzidos tendo em conta o sistema de coordenadas local de cada face (*shell*). Ainda, no *Sap2000* as compressões têm sinal negativo, o que faz com que os valores obtidos tenham que ser aplicados com sinais contrários.

### 3.2.2.2 Ação - solo

Tal como para a ação do vento é necessário parametrizar as condições que se querem analisar. Para o caso das estruturas que são construídas no subsolo e depois cobertas com solo, para por exemplo, servir de *bunker* em alguma região que necessite de proteção do exterior, é necessário caracterizar o solo onde se pretende fazer as análises das estruturas. A Tabela 3.10 apresenta os parâmetros de um solo granular. Este parâmetros são definidos para quantificar a ação nos diferentes modelos  $V_n$ .

Tabela 3.10: Parâmetros do solo

| $\phi$ [°] | $\phi_d$ [°] | $\gamma$ [ $kN/m^3$ ] | $K_0$ | $\gamma_\phi$ |
|------------|--------------|-----------------------|-------|---------------|
| 30         | 25.7         | 20                    | 0.5   | 1.00          |

Para a quantificação das pressões exercidas pelo solo nas faces das estruturas são consideradas as pressões nos centróides das mesmas e, uniformes ao longo de toda a face. Estas tensões são aplicadas a partir do eixo de coordenadas global visto que as tensões horizontais coincidem com os eixos  $x$  e  $y$  e as tensões verticais com o eixo  $z$ . Considerando que os modelos possuem uma altura máxima de 3.75 m, assume-me que a base destes está a uma cota de -4.75 m em relação à cota de superfície, ver Figura 3.7.

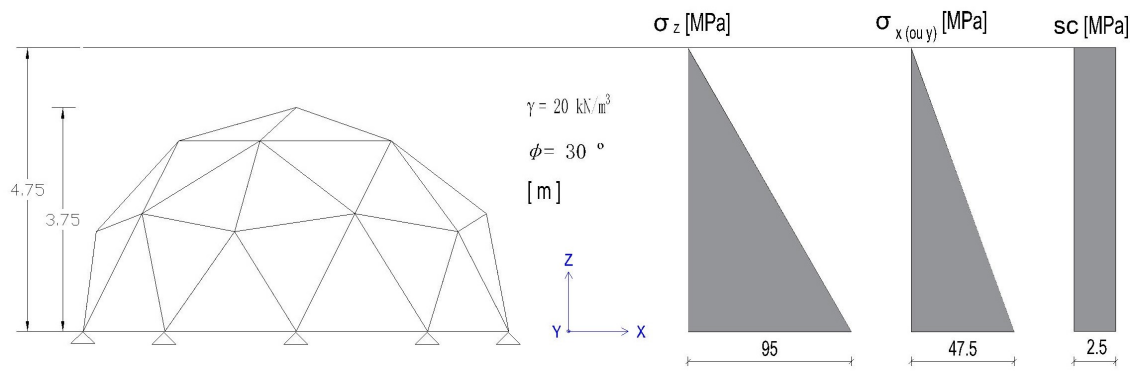


Figura 3.7: Exemplo do modelo  $V_4$  sob ação do solo (vista em alçado)

### 3.2.3 Condições de fronteira

As cúpulas geodésicas, modelos  $V_n$ , estão rigidamente fixas ao solo, através dos nós que se encontram nessa interface.

## 3.3 Análise numérica de cúpulas geodésicas à superfície - Caso de estudo 1

Para esta análise, nas cúpulas nomeadamente os elementos de barras (*frame*) e nós (*joint*), são dimensionados para o Estado Limite Último -  $comb_1$  (Eq. 3.1) e para o Estado Limite de Utilização -  $comb_{1,ut}$  (Eq. 3.2).

### 3.3.1 Faces (*shell*)

No caso das cúpulas geodésicas à superfície, define-se que as faces não são elementos estruturais, apenas fazem parte da estrutura os elementos de barras e nós.

#### 3.3.1.1 Geometria e Materiais

No entanto é proposta a aplicação de uma membrana impermeabilizante de ECOPVC de 1.2 mm de espessura, da empresa SOTECNISOL, ver propriedades na Tabela 3.11, para revestimento da estrutura geodésica.

Esta membrana tem baixa rigidez de flexão o que implica que seja flexível. É necessário que esta membrana seja aplicada bem tracionada para que possa resistir à ação do vento.

Tabela 3.11: Valores característicos do *ecoPVC*

| $E[kN/m^2]$       | $\rho[kN/m^3]$ | $\nu$ |
|-------------------|----------------|-------|
| $1.99 \cdot 10^8$ | 12.74          | 0.49  |

### 3.3.2 Dimensionamento da secção transversal - barra (*frame*)

#### 3.3.2.1 Geometria e Materiais

Foram considerados os elementos de barras constituídos por madeira maciça de classe C24 (resinosa) (ver características na Tabela 3.12) devido ao facto de no mercado da construção civil existir uma vasta opção de secções disponíveis para este tipo de madeira.

A geometria da secção da barra é quadrada por admitir igual inércia nas duas direcções. É possível ver na Figura 3.8 a representação do referencial e variáveis usadas em todo o dimensionamento.

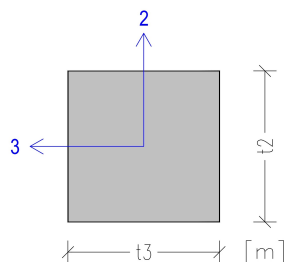


Figura 3.8: Secção transversal de madeira C24 no programa *Sap2000*

Tabela 3.12: Valores característicos da madeira C24

|                                  |        |
|----------------------------------|--------|
| $f_{m,k}$ [N/mm <sup>2</sup> ]   | 24     |
| $f_{t,0,k}$ [N/mm <sup>2</sup> ] | 14.5   |
| $f_{c,0,k}$ [N/mm <sup>2</sup> ] | 21     |
| $E_{mean}$ [N/mm <sup>2</sup> ]  | 11 000 |
| $E_{0,05}$ [N/mm <sup>2</sup> ]  | 7400   |
| $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]      | 420    |

Para além da classificação base das ações, no caso da madeira existe a classificação denominada de classe de duração das ações. Esta classifica as ações de acordo com a sua duração. Neste caso particular, como existe mais que uma ação a considerar, o EC5 dita que a classe corresponde à carga com menor duração.

O EC5 preconiza ainda a divisão dos materiais em classes de serviço que se destina a caracterizar a estrutura relativamente ao ambiente, temperatura e humidade do sítio, onde está a ser construída. Então, a especificação destas classe leva à introdução do parâmetro de correção,  $k_{mod}$ , o fator de modificação da resistência que traduz o efeito da duração da carga e do ambiente nas propriedades mecânicas. Na Tabela 3.13 estão definidos esses parâmetros corretivos.

Tabela 3.13: Características e valores para dimensionamento da madeira

| Classe de duração das ações  | Classe de serviço | $k_{mod}$ | $\gamma_M$ |
|--|-------------------|-----------|------------|
| min[permanente (peso próprio); curta duração (vento)]<br>= curta duração | 3                 | 0.70      | 1.3        |

Por isso, os valores de cálculo das ações e das propriedades dos materiais são obtidos a partir dos valores característicos e, afetados pelo coeficiente parcial de segurança,  $\gamma_M$ , e pelo  $k_{mod}$ . A seguir na

equação 3.11 define-se a forma de obtenção das propriedades de cálculo,  $R_d$  para um determinado valor característico da propriedade em causa,  $R_k$ , por exemplo, propriedades de cálculo da capacidade resistente do material:

$$R_d = k_{mod} \cdot \frac{R_k}{\gamma_M} \quad (3.11)$$

Os valores resistentes da madeira a considerar na verificação de segurança das ações estão presentes na Tabela 3.14).

Tabela 3.14: Valores de cálculo da madeira C24

|                     |      |
|---------------------|------|
| $f_{m,d}[N/mm^2]$   | 12.9 |
| $f_{t,0,d}[N/mm^2]$ | 7.8  |
| $f_{c,0,d}[N/mm^2]$ | 11.3 |

### 3.3.2.2 Ações

O elemento barra é sujeito indiretamente à ação do vento devido ao facto desta ação ser aplicada nas faces, que são suportadas pelos elementos de barra. Também o peso próprio do elemento, que varia com as dimensões da sua secção transversal do modelo em causa, faz parte da combinação de ações em análise.

Esta  $comb_1$  (ver Eq. 3.1) induz nos elementos esforços e combinações de esforços, nomeadamente:

1. Esforço axial de tração
2. Esforço axial de compressão
3. Flexão com esforço axial de tração
4. Flexão com esforço axial de compressão

As combinações referidas atrás são analisadas para as secções da Figura 3.9, designadamente para as extremidades (Secção 1 e Secção 3) onde apenas atuam esforços axiais ((1) ou (2)) (porque os modelos das barras são biarticulados); e a meio vão (Secção 2) onde pode existir combinação de esforços de momento e esforço axial ((3) ou (4)).

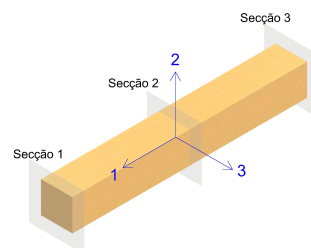


Figura 3.9: Elemento *frame* com secção transversal de madeira C24

### 3.3.2.3 Estado Limite Último

As análises para as diferentes secções acima apresentadas são efetuadas de modo a que sejam garantidas as verificações ao estado limite último em conjunto com o método dos coeficientes parciais.

Para a última combinação (4), ou para o esforço axial de compressão isolado, é necessário verificar a estabilidade para estes elementos.

Para minimizar os efeitos de estabilidade no dimensionamento dos elementos comprimidos, optou-se por limitar o valor de esbelteza,  $\lambda$ , a 60.

E como  $\lambda$ , por definição é o rácio entre o valor de encurvadura,  $L_e$  e o raio de giração.  $i$ :

$$\lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{L_{barra}}{i} = 60 \quad (3.12)$$

Então a partir do raio de giração é possível obter um valor inicial para as dimensões de  $t_3$  ou  $t_2$  (visto ser considerada uma secção quadrada), e assim uma geometria inicial e com esta verificar se para as combinações solicitadas a segurança é verificada.

$$t_2 = \sqrt{12 \cdot i^2} \quad (3.13)$$

Os comprimentos,  $L_{barra}$ , considerados para este pré-dimensionamento são os apresentados na Tabela 3.4 em 3.2.1, pois para as mesmas condições de apoio, verifica-se maior encurvadura quanto mais esbelto for o elemento.

Na tabela seguinte (Tabela 3.15) apresentam-se os valores obtidos para a definição da geometria inicial do elemento *frame*.

Tabela 3.15: Valores de  $t_2$  a partir da estabilidade nos modelos  $V_n$

|    | $\lambda$ | $L_{barra}[m]$ | $i[m]$    | $t_2[m]$ |
|----|-----------|----------------|-----------|----------|
| V2 | 60        | 2.32           | 0.038627  | 0.133    |
| V4 | 60        | 1.22           | 0.0203075 | 0.070    |
| V6 | 60        | 0.82           | 0.013539  | 0.047    |
| V8 | 60        | 0.62           | 0.010291  | 0.036    |

Visto que a secção é homogénea e o elemento *frame* possui as mesmas condições de apoio para ambas as direções, então a esbelteza normalizada,  $\lambda_{rel}$ :

$$\lambda_{rel} = \lambda_{rel,y} = \lambda_{rel,z}$$

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 1.0 \quad (3.14)$$

Para o caso (4) em que há a combinação da compressão com a flexão, é necessário recorrer às expressões de verificação de segurança para viga-coluna:

$$\frac{\sigma_{c,ed}}{k_c \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,ed}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,ed}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (3.15)$$

Em que:

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^2}} \quad (3.16)$$

$$k = 0.5(1 + \beta_c(\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^2) \quad (3.17)$$

- $\beta_c = 0.2$ , no caso de madeira sólida (EC5) ;
- $k_m$ , fator que contabiliza a redistribuição de esforços e efeito da heterogeneidade do material na secção transversal ( $k_m = 1.0$  (EC5)).

O que implica que para todos os modelos  $V_n$ :

$$k = 1.1 \rightarrow k_c = 0.7$$

Para combinação (3) em que a flexão está combinada com a tração, não se aplicam os fatores corretivos:

$$\frac{\sigma_{t,ed}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,ed}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,ed}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (3.18)$$

A partir da definição das secções transversais definidas na Tabela 3.16 são apresentados todos os esforços e tensões nos elementos *frames* nas secções condicionantes.

Tabela 3.16: Parâmetros da secção transversal nos modelos  $V_n$  à superfície

|    | Material            | Tipo     | $t_2 = t_3 [m]$ | $A [m^2]$ | $w [m^3]$ |
|----|---------------------|----------|-----------------|-----------|-----------|
| V2 | <i>softwood</i> C24 | quadrada | 0.1             | 0.01      | 0.000167  |
| V4 | <i>softwood</i> C24 | quadrada | 0.06            | 0.0036    | 0.000036  |
| V6 | <i>softwood</i> C24 | quadrada | 0.04            | 0.0016    | 0.0000107 |
| V8 | <i>softwood</i> C24 | quadrada | 0.035           | 0.0012    | 0.0000071 |

Para simplificação das tabelas seguintes, a verificação de segurança 3.15 e 3.18 divide-se em três parcelas:

- 1.ª parcela para o efeito da compressão ou tração;
- 2.ª parcela para o efeito da flexão em torno do eixo y;
- 3.ª parcela para o efeito da flexão em torno do eixo z.



A seguir apresentam-se as Tabelas 3.17 - 3.20, que mostram o cumprimento da verificação de segurança das secções para estado limite último nas combinações de esforços (3) e (4).

As Figuras 3.10 - 3.13 apresentam o elemento de barra mais condicionante (combinação (3)) em cada modelo  $V_n$ .

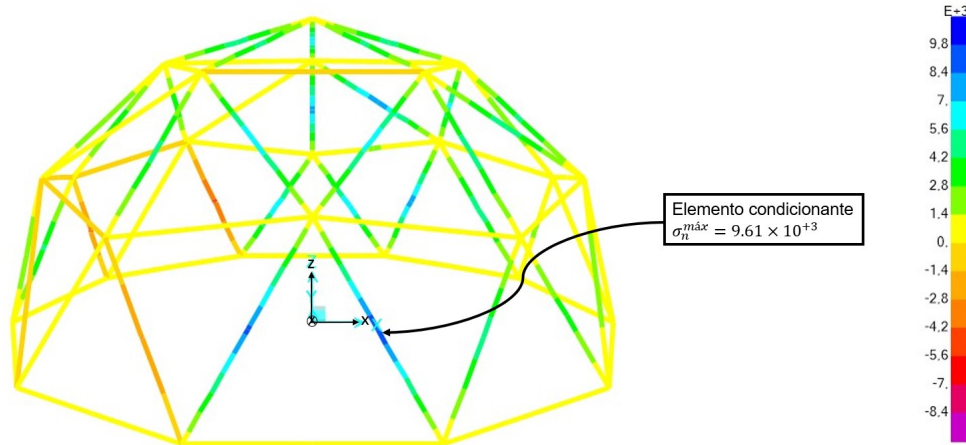


Figura 3.10: Tensões normais e elemento condicionante - modelo  $V_2$

Tabela 3.17: Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo  $V_2$

| $L_{barra} [m]$ | Esforço Axial [kN] | $M_2 [kN.m]$ | $M_3 [kN.m]$ |
|-----------------|--------------------|--------------|--------------|
| 2.32            | Tração 1.742       | -1.025       | -0.547       |
| 2.32            | Compressão -2.234  | 0.417        | -0.265       |

| 1.ª Parcela | 2.ª Parcela | 3.ª Parcela | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ? |
|-------------|-------------|-------------|------------------------|------------|
| 0.022       | 0.422       | 0.210       | 0.75                   | ✓          |
| 0.028       | 0.194       | 0.123       | 0.35                   | ✓          |

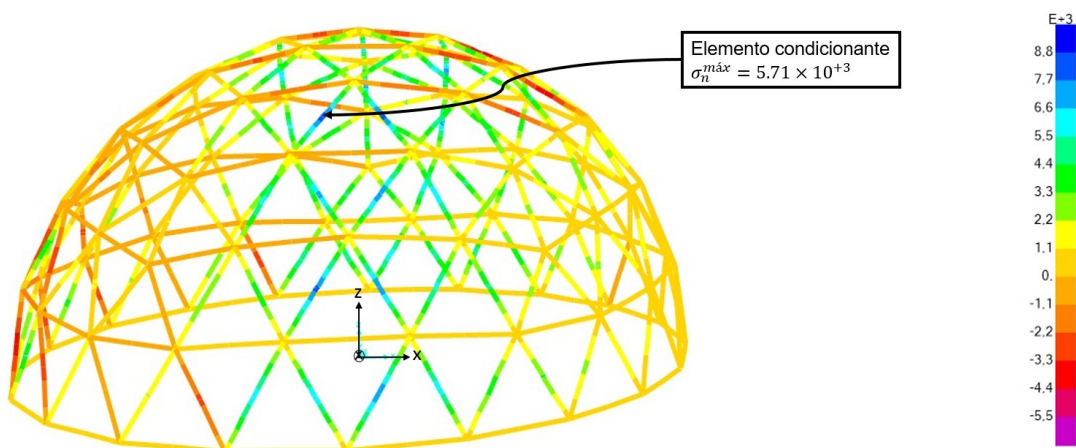


Figura 3.11: Tensões normais e elemento condicionante - modelo  $V_4$

Tabela 3.18: Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo  $V_4$

| $L_{barra}[m]$ | Esforço Axial [kN] | $M_2[kN.m]$ | $M_3[kN.m]$ |
|----------------|--------------------|-------------|-------------|
| 1.22           | Tração             | 4.454       | 0.057       |
| 1.12           | Compressão         | -0.038      | 0           |
|                |                    |             | -0.161      |

| 1.ª Parcela | 2.ª Parcela | 3.ª Parcela | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ? |
|-------------|-------------|-------------|------------------------|------------|
| 0.158       | 0.123       | 0.435       | 0.72                   | ✓          |
| 0.001       | 0.000       | 0.347       | 0.35                   | ✓          |

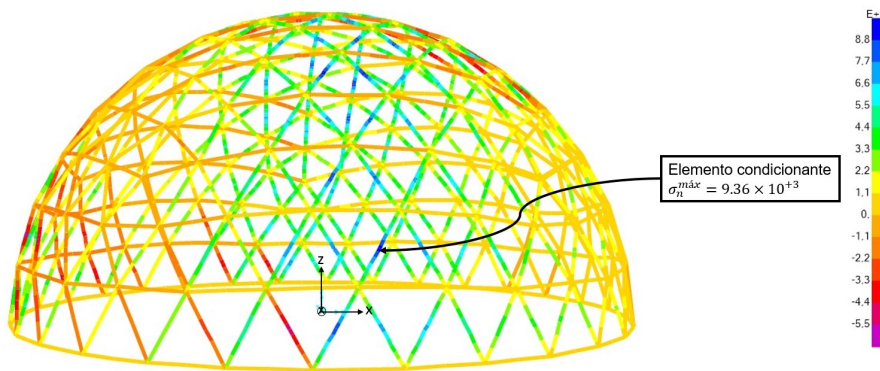


Figura 3.12: Tensões normais e elemento condicionante - modelo  $V_6$

Tabela 3.19: Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo  $V_6$

| $L_{barra}[m]$ | Esforço Axial [kN] | $M_2[kN.m]$ | $M_3[kN.m]$ |
|----------------|--------------------|-------------|-------------|
| 0.81           | Tração             | 3.233       | -0.050      |
| 0.81           | Compressão         | -0.889      | -0.029      |
|                |                    |             | 0.018       |

| 1.ª Parcela | 2.ª Parcela | 3.ª Parcela | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ? |
|-------------|-------------|-------------|------------------------|------------|
| 0.259       | 0.365       | 0.203       | 0.83                   | ✓          |
| 0.070       | 0.211       | 0.132       | 0.41                   | ✓          |

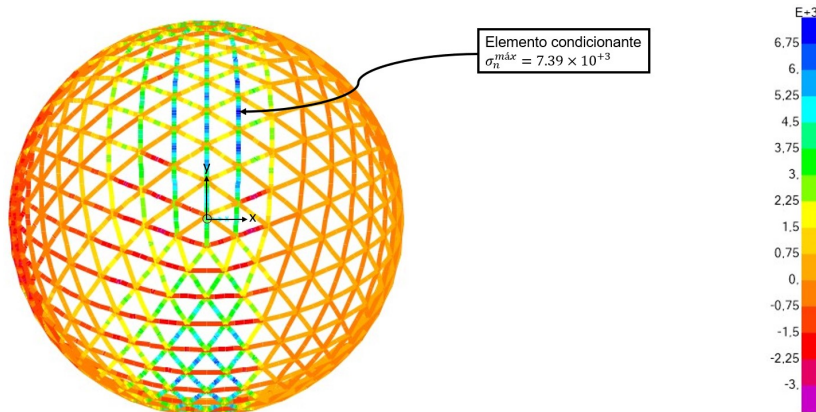


Figura 3.13: Tensões normais e elemento condicionante - modelo  $V_8$

Tabela 3.20: Verificação de segurança ao Estado Limite Último - Secção 2 - modelo  $V_8$

| $L_{barra} [m]$ | Esforço Axial [kN] |  | $M_2 [kN.m]$ | $M_3 [kN.m]$ |
|-----------------|--------------------|--|--------------|--------------|
| 0.60            | Tração             |  | 3.273        | 0.004        |
| 0.60            | Compressão         |  | -0.762       | 0.011        |

| 1.ª Parcela | 2.ª Parcela | 3.ª Parcela | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ? |
|-------------|-------------|-------------|------------------------|------------|
| 0.342       | 0.044       | 0.322       | 0.71                   | ✓          |
| 0.096       | 0.140       | 0.066       | 0.30                   | ✓          |

A partir das tabelas anteriores percebe-se que os esforços atuam em 70-80% da capacidade resistente da secção, o que se conclui que a secção está folgada.

Verifica-se para as barras do modelo  $V_2$ , que nas duas combinações de esforços analisadas (3) e (4), os esforços preponderantes são os de flexão devido ao facto de se estar perante elementos com comprimento elevado que se traduz em elementos esbeltos.

Para a combinação de tração e flexão esta diminuição do efeito da flexão traduz-se no aumento do efeito da tração com o aumento de  $V_n$ .

No entanto para a combinação do esforço mais elevado de compressão em conjunto com a flexão, não se verifica o efeito superior da compressão face à flexão. A flexão assume um efeito preponderante para os elementos comprimidos em todos os modelos  $V_n$ .

### 3.3.3 Dimensionamento do elemento nó (joint)

Para efetuar o dimensionamento do elemento nó, e do lado conservativo, assume-se que todos os elementos barra que convergem no nó possuem o máximo esforço axial de tração existente no modelo  $V_n$  respetivo do dimensionamento.

No programa *Inventor* (Inventor) são modelados três tipos de nós:

- nó para 4 barras;
- nó para 5 barras;
- nó para 6 barras.

Para estes tipos de nós faz-se variar o parâmetro de diâmetro externo, de modo a verificar a segurança quanto à tensão de comparação de *von Mises*,  $\sigma_{vM}$  e ao fator de segurança,  $FS$ .

#### 3.3.3.1 Geometria e Material

Estes elementos são cortados do bambu, naturalmente têm forma de um anel com desenvolvimento cilíndrico como na Figura 3.14, com diâmetro interno,  $\phi_{int}$ , diâmetro externo,  $\phi_{ext}$  e desenvolvimento em  $z$ ,  $h$ .

O bambu consoante a sua espécie e idade, possui espessuras e resistências díspares.

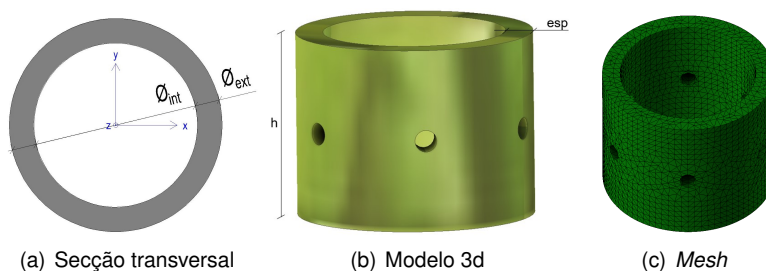


Figura 3.14: Modelo de elemento de bambu

Na Tabela 3.21 apresentam-se os valores das propriedades mecânicas do bambu que são usados no dimensionamento. Estas características foram obtidas a partir de ensaios laboratoriais de (Shastry, A. & Unnikrishnan, S., 2017).

Tabela 3.21: Valores característicos da bambu

|                    |        |
|--------------------|--------|
| $f_{y,k} [N/mm^2]$ | 337.5  |
| $f_{t,k} [N/mm^2]$ | 203    |
| $\nu$              | 0.46   |
| $E [N/mm^2]$       | 45.475 |
| $\rho [kg/m^3]$    | 731    |

Na Tabela 3.22 são apresentados os valores de esforços de dimensionamento para cada modelo.

Tabela 3.22: Esforços máximos atuantes no nó

|    | $N_{ed} [kN]$ |
|----|---------------|
| V2 | 7.33          |
| V4 | 5.60          |
| V6 | 4.00          |
| V8 | 3.29          |

É de referir que é difícil obter bambu no mercado com diâmetros exatos, por isso, nas tabelas em 3.3.3.2, respetivas aos resultados dos estudos do modelo  $V_4$ , são apresentados intervalos de resultados relativos ao deslocamento máximo,  $\delta_{max}$  e, tensão de comparação de *von Mises*,  $\sigma_{vM}$ .

Os resultados dos restantes modelos podem ser observados em anexo.

O fator de segurança admissível para qualquer elemento modelado está compreendido entre aproximadamente 2 e 4. Para isso foi-se variando o diâmetro externo, mantendo o interno constante, para se perceber quais as espessuras válidas, *esp*, do elemento de *bamboo* que verificam esse pressuposto.

### 3.3.3.2 Resultados - modelo V4

- Conector com 4 furações

Tabela 3.23: Resultados de análise para conectores com 4 furos -  $V_4$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 5.60         | 60      | 100              | 114              | 14        | 0.07               | 153.5                 | 2.2  |
| 5.60         | 60      | 100              | 122              | 22        | 0.03               | 77.8                  | 4.3  |

- Conector com 5 furações

Tabela 3.24: Resultados de análise para conectores com 5 furos -  $V_4$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 5.60         | 60      | 100              | 115              | 15        | 0.06               | 140.1                 | 2.4  |
| 5.60         | 60      | 100              | 125              | 25        | 0.02               | 65.9                  | 5.1  |

Nas Figuras 3.15 - 3.16, são apresentados graficamente os resultados da tensão de *von Mises*, no modelo  $V_4$  de 6 furos.

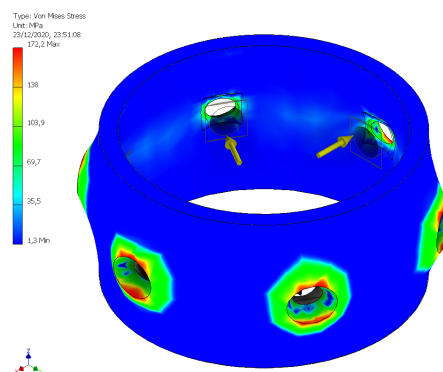


Figura 3.15: Análise de  $\sigma_{VM}$  num conector  $V_4$  com 6 furações para  $FS=2$

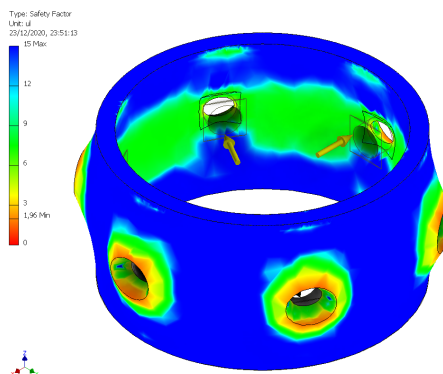


Figura 3.16: Análise de  $FS$  num conector  $V_4$  com 6 furações para  $FS=2$

- Conector com 6 furações

Tabela 3.25: Resultados de análise para conectores com 6 furos -  $V_4$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 5.60         | 60      | 100              | 113              | 13        | 0.07               | 172.2                 | 2.0  |
| 5.60         | 60      | 100              | 122              | 22        | 0.03               | 81.7                  | 4.1  |

Percebe-se que as zonas mais críticas são as dos furos, logo o dimensionamento está essencialmente sujeito à verificação da tensão admissível nessas regiões.

Para juntar este elemento com as barras envolventes são feitas furações perpendiculares à superfície do bambu onde serão introduzidos parafusos compatíveis com os esforços atuantes, definidos Tabela 3.22.

Assumindo que são usados parafusos com as características descritas na Tabela 3.26.

Tabela 3.26: Características do parafuso: M12 Classe 4.6

| $\phi[mm]$ | $f_{ub}[N/mm^2]$ | $A_s[mm^2]$ | $k_2$ | $\gamma_{M2}$ |
|------------|------------------|-------------|-------|---------------|
| 12         | 400              | 84.3        | 0.9   | 1.25          |

Para verificar se estes parafusos, com as características já definidas, são suficientes para resistir aos esforços atuantes, é necessário respeitar a seguinte condição:

$$F_{t,Ed} \leq F_{t,Rd} \quad (3.19)$$

em que:

$$F_{t,Rd} = \frac{k_2 f_{ub} A_s}{\gamma_{M2}} \quad (3.20)$$

com:

- $k_2 = 0.9$ , característica para parafusos não embutidos;
- $f_{ub}$ , tensão de rotura à tração para parafusos;
- $A_s$ , área da secção transversal do parafuso;
- $\gamma_{M2}$ , coeficiente parcial de segurança para as ligações.

Obtém-se a partir da Eq.3.19 que:

$$A_{s,min} \geq \frac{1.25 \cdot F_{t,ed}}{k_2 \cdot f_{ub}} \quad (3.21)$$

Verifica-se que de acordo com a Tabela 3.27 a área de secção necessária,  $A_{s,min}$  para verificar a resistência da ligação à tração é consideravelmente inferior à área de um parafuso M12. No entanto foi considerada para dimensionamento a furação no bambu de 12 mm de diâmetro.

Tabela 3.27: Áreas mínimas da secção da furação

|    | $A_{s,min}[mm^2]$ |
|----|-------------------|
| V2 | 25.5              |
| V4 | 19.5              |
| V6 | 13.9              |
| V8 | 11.4              |

### 3.4 Análise numérica de cúpulas geodésicas enterradas - Caso de estudo 2

São apenas analisadas as estruturas a partir da frequência  $V_4$  porque  $V_2$  seria um modelo pouco exequível por ter elementos de face e barra de elevadas dimensões.

#### 3.4.1 Dimensionamento da secção transversal - face (*shell*)

Para dimensionar as faces dos modelos é necessário, para as combinações de ações, verificar se a tensão máxima aplicada é admissível de acordo com o material escolhido e se a deformação é aceitável relativamente ao valor definido. Para isso foi escolhido o elemento mais carregado de todos os modelos em análise.

##### 3.4.1.1 Geometria e Materiais

O material escolhido para este elemento é o aço *S355* (ver propriedades em Tabela 3.28) devido ao facto de atualmente ser um dos mais comercializados. Em termos de geometria, inicialmente optou-se por chapas maciças de *S355*, no entanto concluiu-se que para resistir às tensões que estes modelos são sujeitos, as chapas teriam uma espessura muito elevada. Por isso, optou-se por uma solução de gradil, ver exemplo na Figura 3.17.

O modelo geométrico para este elemento é observado, em alçado na Figura 3.18(a) e, em planta na Figura 3.18(b). Esta chapa de gradil face a uma chapa maciça com inércia semelhante tem menor massa. É aplicada ainda uma chapa maciça de espessura,  $e_{rev}$ , de 2 mm, que assenta sobre o gradil, servindo de revestimento.

Tabela 3.28: Valores característicos do Aço S355

| $f_{yk}[N/mm^2]$ | $E[kN/m^2]$       | $\rho[kg/m^3]$ | $\gamma_M$ |
|------------------|-------------------|----------------|------------|
| 355              | $2.10 \cdot 10^8$ | 7.85           | 1.0        |

Para implementar este modelo no programa *Sap2000*, e para simplificar, é desenvolvido um modelo equivalente do elemento face com espessura,  $e_{eq}$ , que possui a mesma inércia do modelo real.

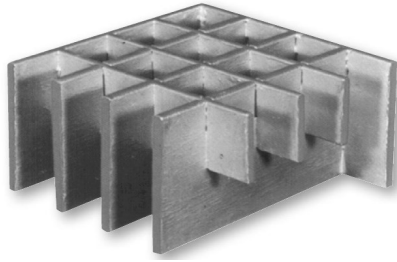


Figura 3.17: Exemplo de gradil

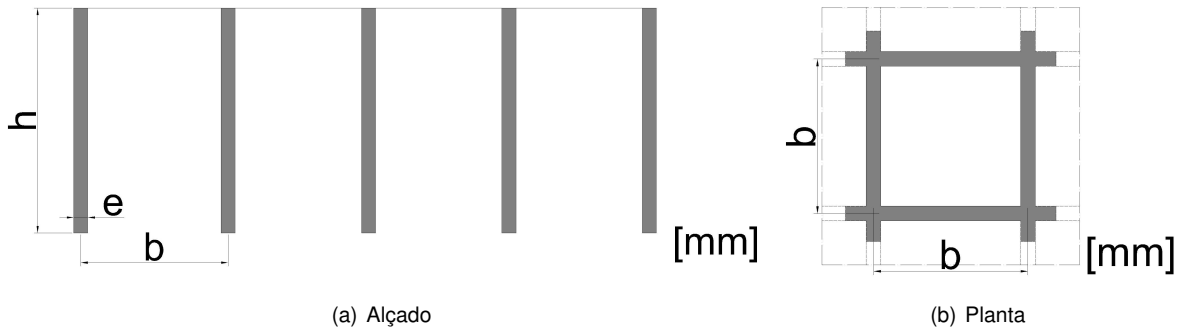


Figura 3.18: Geometria do elemento *shell* escolhida para os diferentes modelos  $V_n$

### 3.4.1.2 Ações

Como foi referido atrás, para uma análise mais rigorosa carregam-se os modelos com as pressões do solo e observa-se a face mais solicitada. O que se observa é que os triângulos mais afetados são aqueles que surgem dos pentágonos, sensivelmente a meia altura da estrutura.

Então, para cada face mais carregada dos modelos  $V_n$ , as tensões aplicadas podem ser consultadas na Tabela 3.29. Na Figura 3.19 apresenta-se o modelo gerado para análise da face. Foram criados nós intermédios, a partir da divisão em 4 dos elementos barras envolventes, para se observar com mais detalhe a deformação a que é sujeita a superfície.

Tabela 3.29: Tensões associadas à face mais carregada em cada modelo  $V_n$

|    | dead                |                    | soil                        |                             |                             | sc   |
|----|---------------------|--------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------|
|    | gradil [ $kN/m^2$ ] | chapa [ $kN/m^2$ ] | $\sigma_{h,x}$ [ $kN/m^2$ ] | $\sigma_{h,y}$ [ $kN/m^2$ ] | $\sigma_{v,z}$ [ $kN/m^2$ ] |      |
| V4 | 0.49                | 0.16               | 19.12                       | -17.78                      | -46.09                      | 2.50 |
| V6 | 0.31                | 0.16               | 15.64                       | 24.50                       | -51.32                      | 2.50 |
| V8 | 0.25                | 0.16               | 20.72                       | 19.53                       | -50.28                      | 2.50 |



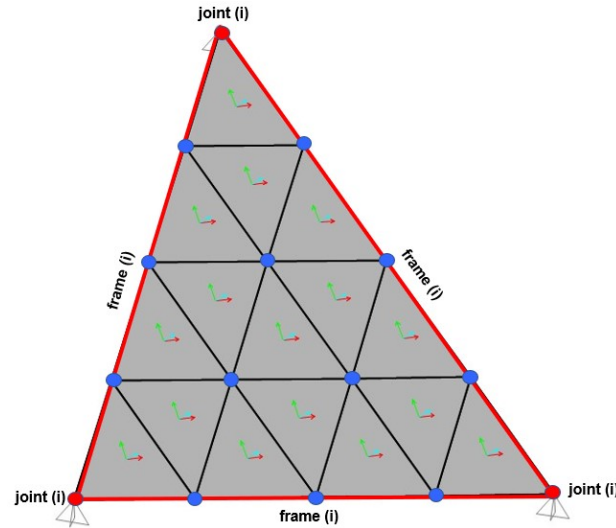


Figura 3.19: Elemento *shell* mais carregado

Estas ações são aplicadas com os fatores parciais de segurança associados a cada combinação,  $comb_2$  para ELU e  $comb_2, ut$  para ELUtilização.

### 3.4.1.3 Estado Limite Último

O dimensionamento da *shell* é realizado a partir da combinação de ações para o ELU, que é o mais condicionante. É um processo iterativo, na medida em que o objetivo é definir uma geometria o mais eficaz possível aproveitando as características de resistência do aço.

Para facilitar a introdução da geometria do gradil pretendida, no programa *Sap2000*, adequa-se essa geometria a uma chapa de espessura constante. Ao introduzir essa espessura constante,  $e_{cte}$ , é necessário aplicar os fatores corretivos relativos à rigidez. Ou seja, para um elemento com a mesma inércia identificar a espessura equivalente,  $e_{eq}$ , (Eq. 3.22) e, corrigir a rigidez,  $K$ , (Eq. 3.23).

$$I_{chapgadil} = I_{chapaequivalente} \leftrightarrow \frac{eh^3}{12 \cdot b} = \frac{1(e_{eq})^3}{12} \leftrightarrow e_{eq} = h \cdot \sqrt[3]{\frac{e}{b}} \quad (3.22)$$

$$K = \left( \frac{e_{eq}}{e_{cte}} \right)^3 \quad (3.23)$$

Na Tabela 3.30 apresentam-se os parâmetros,  $e_{cte}$  e  $K$  introduzidos em *shell properties* no *Sap2000*. Os parâmetros  $e$ ,  $h$  e  $b$  foram definidos na Figura 3.18, que correspondem ao modelo do gradil.

Tabela 3.30: Parâmetros geométricos considerados nos modelos  $V_n$

|                | $V_4$  | $V_6$  | $V_8$  |
|----------------|--------|--------|--------|
| e (mm)         | 2      | 2      | 2      |
| h (mm)         | 80     | 50     | 40     |
| b (mm)         | 50     | 50     | 50     |
| $e_{cte}$ (mm) | 6.4    | 4      | 3.2    |
| $e_{eq}$ (mm)  | 27.4   | 17.1   | 13.7   |
| K              | 78.125 | 78.125 | 78.125 |

Ao introduzir a *shell* com essas características, as tensões obtidas para a  $comb_2$  não são as do gradil mas da geometria equivalente, por isso é preciso converter para as tensões efetivas da *shell* com gradil.

De seguida apresentam-se as equações de momento, Eq. 3.24, e da tensão média, Eq. 3.25, que são aplicadas na Tabela 3.31.

$$\frac{M_{gradil}}{b} = \frac{\sigma_{m,eq} h^2}{6} (Nmm/mm) \quad (3.24)$$

$$\sigma_{m,gradil} = \frac{6bM_{gradil}}{eh^2} \quad (3.25)$$

Tabela 3.31: Tensões na face  $V_n$

|                                 | V4     | V6     | V8     |
|---------------------------------|--------|--------|--------|
| $\sigma_{m,eq} (N/mm^2)$        | 1995   | 1796   | 1463   |
| $M_{gradil} (\cdot 10^3) (Nmm)$ | 681.11 | 239.94 | 124.84 |
| $\sigma_{m,gradil} (N/mm^2)$    | 319    | 287    | 234    |

Verifica-se que as condições de segurança (Eq. 3.26) são respeitadas pois as tensões,  $\sigma_{m,shell}$ , são inferiores a  $f_{y,d}$ .

$$\sigma_{m,shell} < f_{y,d} \quad (3.26)$$

Na Tabela 3.32 apresenta-se uma síntese das soluções adotadas para os vários modelos  $V_n$ .

Tabela 3.32: Parâmetros da secção transversal nos modelos  $V_n$  enterrados

|    | Material | Tipo                  | $e[mm]$ | $h[mm]$ | $b[mm]$ | $e_{rev}[mm]$ |
|----|----------|-----------------------|---------|---------|---------|---------------|
| V4 | Aço S355 | gradil + chapa maciça | 2       | 80      | 50      | 2             |
| V6 | Aço S355 | gradil + chapa maciça | 2       | 50      | 50      | 2             |
| V8 | Aço S355 | gradil + chapa maciça | 2       | 40      | 50      | 2             |

### 3.4.1.4 Estado Limite de Utilização

Para controlar a deformação presente nos elementos de *shell* é assumido um modelo de cálculo simplesmente apoiado nos *frames*, sendo a deformação controlada a partir do alinhamento A-A', apresentado na Figura 3.20.

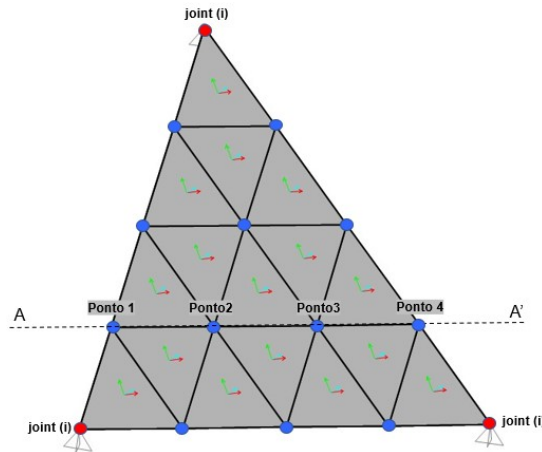


Figura 3.20: Elemento *shell* em análise

Apresenta-se em (Eq. 3.27) o valor de deslocamento máximo admissível considerado para estes elementos.

$$\delta_{max,adm} \leq \frac{L}{300} \quad (3.27)$$

Na Tabela 3.33 apresentam-se os valores máximos admissíveis para qualquer ponto da *shell* em análise.

Tabela 3.33: Deformação máxima (corte A-A') das *shells* nos modelos  $V_n$

|       | $L[m]$ | $\delta_{max,adm}[m]$ |
|-------|--------|-----------------------|
| $V_4$ | 0.84   | 0.003                 |
| $V_6$ | 0.45   | 0.002                 |
| $V_8$ | 0.34   | 0.001                 |

A partir das secções transversais obtidas para o Estado Limite Último em (3.4.1.3), são determinadas as deformadas aproximadas para o alinhamento A-A' para cada modelo  $V_n$ , ver Figuras 3.21 - 3.23. Nestas figuras são apresentados:

- $\Delta\delta_1$  que corresponde ao deslocamento relativo entre os Pontos 1 e 2,
- $\Delta\delta_2$  que corresponde ao deslocamento relativo entre os Pontos 3 e 4.

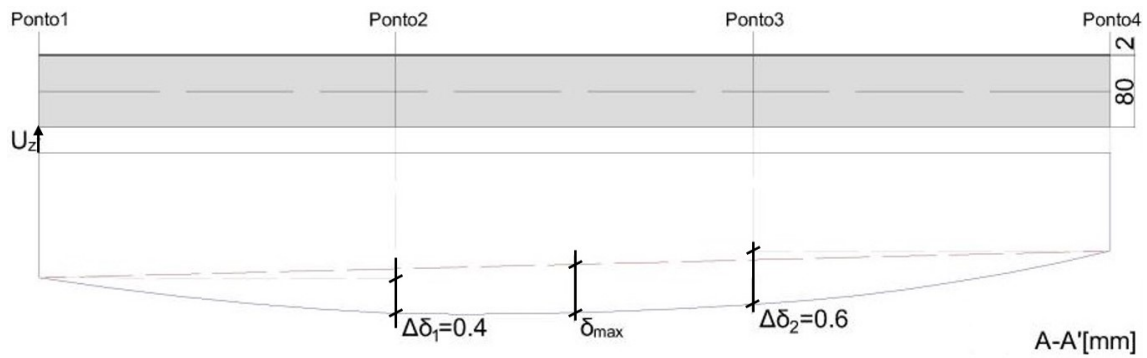


Figura 3.21: Deformações no alinhamento A-A' - modelo  $V_4$

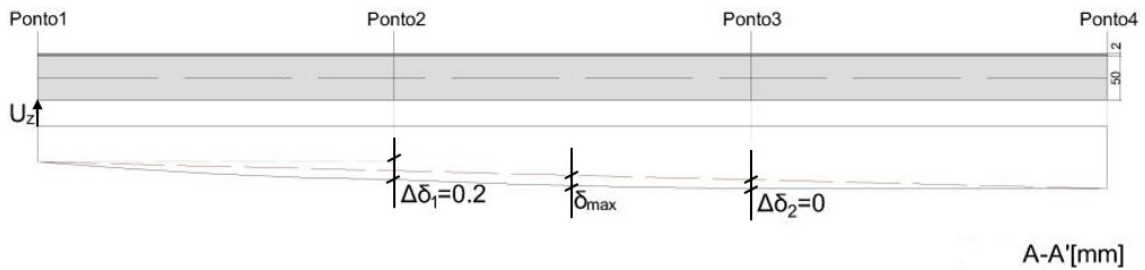


Figura 3.22: Deformações no alinhamento A-A' - modelo  $V_6$

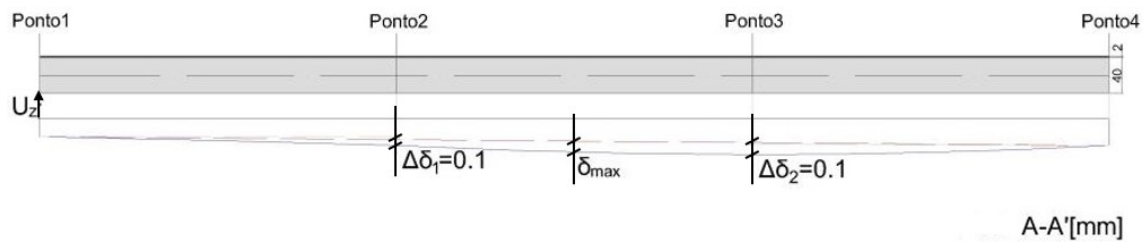


Figura 3.23: Deformações no alinhamento A-A' - modelo  $V_8$

Os valores dos deslocamentos para os diversos pontos dos respectivos modelos são apresentados na Tabela 3.34.

Tabela 3.34: Deslocamentos em modelo de cálculo de face  $V_n$

|       | $U_z(\text{Ponto 1}) [mm]$ | $U_z(\text{Ponto 2}) [mm]$ | $U_z(\text{Ponto 3}) [mm]$ | $U_z(\text{Ponto 4}) [mm]$ |
|-------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $V_4$ | -1.4                       | -1.8                       | -1.7                       | -1.1                       |
| $V_6$ | -0.4                       | -0.6                       | -0.7                       | -0.7                       |
| $V_8$ | -0.2                       | -0.3                       | -0.4                       | -0.3                       |

Sendo assim, e de acordo com as deformadas aproximadas anteriormente observadas, é possível verificar que os deslocamentos relativos são inferiores ao  $\delta_{max}$  correspondente, como se observa na Tabela 3.35.

Tabela 3.35: Verificação de segurança ao ELUtilização nos modelos  $V_n$

|       | $[\Delta\delta_1; \Delta\delta_2][mm]$ | $\delta_{max,adm}[mm]$ | Verifica? |
|-------|--|------------------------|-----------|
| $V_4$ | [0.4;0.6]                              | 3                      | ✓         |
| $V_6$ | [0.2;0]                                | 2                      | ✓         |
| $V_8$ | [0.1;0.1]                              | 1                      | ✓         |

O que se conclui que as geometrias *shell*, definidas na Tabela 3.32, verificam os ELU e ELUt para o caso de estudo 2.

### 3.4.2 Dimensionamento da secção transversal - barra (*frame*)

#### 3.4.2.1 Geometria e materiais

Para esta caso de estudo os elementos de barras são constituídos por Aço S275, ver características na Tabela 3.36, com perfil de secção tubular quadrada, *SHS*, (Figura 3.24). Foi escolhida uma secção tubular por esta não admitir torção lateral por ter elevada rigidez de torção.

Tabela 3.36: Valores característicos do Aço S275

| $f_{y,k}[N/mm^2]$ | $E[N/mm^2]$ | $\rho[kg/m^3]$ | $\gamma_M$ |
|-------------------|-------------|----------------|------------|
| 275               | 21          | 7.849          | 1.0        |

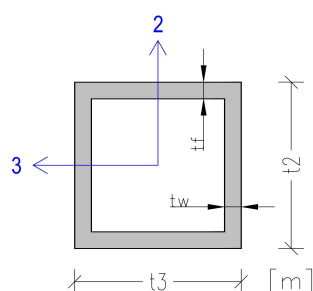


Figura 3.24: Secção transversal de aço A275 no programa *Sap2000*

#### 3.4.2.2 Ações

O elemento barra é sujeito indiretamente às pressões do solo permanentes, devido ao facto destas pressões serem aplicadas nas faces e assim, serem descarregadas nas barras envolventes. Outra das ações e igualmente permanente, é o peso próprio do elemento que varia com as dimensões da sua secção transversal do modelo em causa. Este elemento é também sujeito a uma sobrecarga, *sc*, que corresponde à ação variável.

Consequentemente esta  $comb_2$  (definida na Eq. 3.3), induz nos elementos, os seguintes esforços e combinações de esforços:

1. Esforço axial de compressão
2. Flexão com esforço axial de compressão
3. Flexão composta

As combinações referidas atrás são analisadas para as secções da Figura 3.25, designadamente para as extremidades (Secção 1 e Secção 3) onde apenas atuam esforços axiais (1); e a meio vão (Secção 2) onde pode existir combinação de esforços de momento e esforço axial (2) ou simplesmente de flexão composta (3).

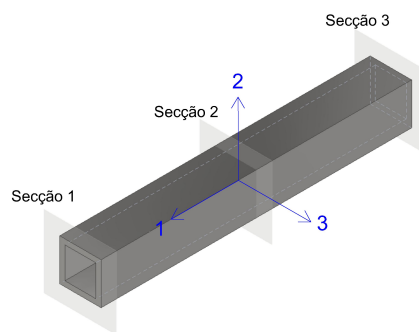


Figura 3.25: Elemento *frame* com secção transversal 2

### 3.4.2.3 Estado Limite Último

Tal como em (3.3.2.3), estes elementos também estão sujeitos ao fenómeno de encurvadura. Para se proceder a um pré dimensionamento do *frame*, assume-se um valor limite de 60 para a esbelteza,  $\lambda$ . E como se viu atrás,  $\lambda$ , por definição é o rácio entre o comprimento de encurvadura,  $L_e$  e o raio de giração,  $i$ :

$$\lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{L_{barra}}{i} = 60 \quad (3.28)$$

Neste caso, para estruturas treliçadas e para perfis tubulares, segundo o Eurocódigo 3:

$$L_e = 0.9 \cdot L_{barra}$$

Então a partir do raio de giração (Tabela 3.37) é possível escolher um perfil comercial que cumpre a condição referida.

Tabela 3.37: Valores de  $i$  a partir da estabilidade nos modelos  $V_n$

|    | $L_{barra}[m]$ | $L_e[m]$ | $i[cm]$ |
|----|----------------|----------|---------|
| V4 | 1.22           | 1.10     | 0.018   |
| V6 | 0.82           | 0.73     | 0.012   |
| V8 | 0.62           | 0.56     | 0.009   |

Os comprimentos,  $L_{barra}$ , considerados para este pré dimensionamento são os apresentados em (3.2.1) na Tabela 3.4.

Na Tabela 3.38 apresentam-se os valores escolhidos para definição da geometria inicial do elemento *frame*.

Tabela 3.38: Parâmetros da secção transversal nos modelos  $V_n$  enterrados

|    | Material | Tipo        | $t_3[m]$ | $t_2[m]$ | $t_f[m]$ | $t_w[m]$ |
|----|----------|-------------|----------|----------|----------|----------|
| V4 | Aço S275 | tubular SHS | 0.08     | 0.08     | 0.008    | 0.008    |
| V6 | Aço S275 | tubular SHS | 0.06     | 0.06     | 0.004    | 0.004    |
| V8 | Aço S275 | tubular SHS | 0.04     | 0.04     | 0.004    | 0.004    |

Segundo o EC3 a verificação de segurança aos estados limites últimos poderá ser efetuada para todas as classes de secções transversais através da soma linear da relação esforço atuante - esforço resistente. No caso das secções de classe 1, 2 ou 3, e para o elemento *frame* mais condicionante sujeito a uma combinação de esforços (2) ( $N_{ed}$ ,  $M_{2,ed}$  e  $M_{3,ed}$ ) este método poderá ser aplicado através do seguinte critério:

$$\frac{N_{ed}}{N_{rd}} + \frac{M_{2,ed}}{M_{y,rd}} + \frac{M_{3,ed}}{M_{z,rd}} \leq 1 \quad (3.29)$$

onde,  $N_{rd}$ ,  $M_{y,rd}$  e  $M_{z,rd}$ , são os valores de cálculo dos esforços resistentes, os quais dependem da classe da secção transversal e podem incluir alguma redução associada ao efeito do esforço transversal. Para secções de Classe 4, o critério de verificação de segurança teria que ser preconizado para a área efetiva da respetiva secção.

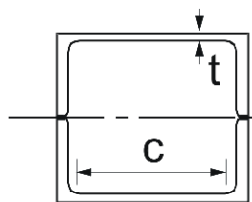
Assim, para a classificação das secções SHS em estudo consideram-se os limites gerais impostos pelo Eurocódigo para componentes internas e secções tubulares solicitadas maioritariamente à compressão, ver Figura 3.26.

Em que:

$$\epsilon = \sqrt{234/f_y} \text{ como } f_y = 275 \rightarrow \epsilon = 0.92$$

Para estas geometrias, e de acordo com a figura atrás apresentada, para efeitos de cálculo, tem-se que:

$$c = t_3 - 2 \cdot t_w \text{ e, } t = t_f$$



| Classe   | Componente solicitado à compressão |
|--|------------------------------------|
| Distribuição das tensões nos componentes (compressão positiva) |                                    |
| 1  | $c/t \leq 33\epsilon$              |
| 2  | $c/t \leq 38\epsilon$              |
| Distribuição das tensões nos componentes (compressão positiva) |                                    |
| 3  | $c/t \leq 42\epsilon$              |

Figura 3.26: Limites máximos das relações largura-espessura para a definição de classes para componentes comprimidos (retirado de (CEN, 1993))

Na Tabela 3.39 apresenta-se a verificação da condição para a classe 1 nas secções dos diferentes modelos.

Tabela 3.39: Definição da classe das secções transversais dos elementos *frames* para os modelos  $V_n$

|    | c [m] | t [m] | $\frac{c}{t}$ | $33\epsilon$ | Classe 1 : $\frac{c}{t} \leq 33\epsilon$ |
|----|-------|-------|---------------|--------------|--|
| V4 | 0.064 | 0.008 | 8             | 30.36        | ✓  |
| V6 | 0.052 | 0.004 | 13            | 30.36        | ✓  |
| V8 | 0.032 | 0.004 | 8             | 30.36        | ✓  |

Após a identificação da classe da secção, que corresponde a classe 1 para todos os modelos  $V_n$ , pode proceder-se à identificação dos esforços resistentes.

Para a combinação de esforços (1), elementos sujeitos à compressão, é obrigatório verificar a segurança ao estado limite último de encurvadura. Isto é, garantir o seguinte critério:

$$\frac{N_{ed}}{N_{b,rd}} \leq 1 \quad (3.30)$$



Com,

$$N_{b,rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M0}} \quad (3.31)$$

Em que  $\chi$  corresponde ao coeficiente de redução para este modo de encurvadura, dado por:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \lambda^2}} \leq 1 \quad (3.32)$$

Onde,

$$\Phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] \quad (3.33)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{1}{\lambda_1} \quad (3.34)$$

- $\alpha$ , fator de imperfeição, definido na Figura 3.28;
- $N_{cr}$ , valor crítico do esforço normal associado ao modo de encurvadura elástico;

$$\lambda_1 = 93.9\epsilon = 86.4 \quad (3.35)$$

O fator de imperfeição,  $\alpha$ , identifica a curva de dimensionamento apropriada, este depende da geometria da secção, da tensão de cedência do aço e do eixo principal de inércia segundo o qual o elemento encurva, neste caso particular, é indiferente a escolha do eixo pois são os dois, eixos principais de inércia.

As curvas de dimensionamento a considerar estão definidas na Figura 3.27. Então para elementos - coluna com secção SHS, sendo que é laminada a quente, considera-se a curva **a** quando a coluna é constituída por aço S275.


| Secção transversal |   | Limites           | Encurvadura em relação ao eixo | Curva de encurvadura             |                |
|--------------------|---|-------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------|
|                    |   |                   |                                | S 235<br>S 275<br>S 355<br>S 420 | S 460          |
| Secções tubulares  |  | acabadas a quente | qualquer                       | a                                | a <sub>0</sub> |
|                    |   | enformadas a frio | qualquer                       | c                                | c              |

Figura 3.27: Curvas de dimensionamento em função da secção transversal (retirado de (CEN, 1993))

O valor do parâmetro  $\alpha$ , dependente da curva de dimensionamento considerada, apresenta-se na Figura 3.28 com o valor de 0.21.

| Curva de encurvadura           | $a_0$ | a    | b    | c    | d    |
|--------------------------------|-------|------|------|------|------|
| Factor de imperfeição $\alpha$ | 0,13  | 0,21 | 0,34 | 0,49 | 0,76 |

Figura 3.28: Fatores de imperfeição para as curvas de dimensionamento (retirado de (CEN, 1993))

A partir das figuras atrás apresentadas, os parâmetros e o valor de coeficiente de redução,  $\chi$ , têm os valores apresentados na Tabela 3.40.

Tabela 3.40: Parâmetros e valor de coeficiente de redução,  $\chi$

| $\alpha$ | $\bar{\lambda}$ | $\Phi$ | $\chi$ |
|----------|-----------------|--------|--------|
| 0.21     | 0.7             | 0.7975 | 0.85   |

O EC3 define ainda regras para verificação de segurança dos estados limites últimos de resistência à encurvadura para elementos uniformes sujeitos a flexão, nomeadamente elementos sujeitos a fenómenos de torção ou flexão-torção. Sendo as secções em estudo com elevada rigidez de torção, estes fenómenos não se verificam. O que implica que nas verificações de segurança para combinação de esforços de compressão e flexão composta, Eq. 3.36 e Eq.3.37, o  $\chi_{LT} = 1$ . E que apenas se tenham que considerar os fatores de interação,  $k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$ ,  $k_{zz}$ , entre estes dois tipos de esforços (compressão e flexão).

$$\frac{N_{ed}}{\chi N_{Rk}} + k_{yy} \frac{M_{2,ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} + k_{yz} \frac{M_{3,ed}}{M_{z,Rk}} \leq 1 \quad (3.36)$$

$$\frac{N_{ed}}{\chi N_{Rk}} + k_{zy} \frac{M_{2,ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} + k_{zz} \frac{M_{3,ed}}{M_{z,Rk}} \leq 1 \quad (3.37)$$

Em que:

- $k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$ ,  $k_{zz}$ , fatores de interação;

$$N_{Rk} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} \quad (3.38)$$

$$M_{Rk} = M_{pl,rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{com } M_{y,Rk} = M_{z,Rk} = M_{Rk} \quad (3.39)$$

- $W_{pl}$ , módulo de flexão plástico da secção transversal.

Apenas é realizada a verificação de segurança de Eq.3.36 pois é a mais condicionante, por se tratar de uma secção quadrada.

Para determinar os fatores de interação  $k_{yy}$  e  $k_{yz}$  o EC3 propõe que se recorra ao método que é apresentado na Figura 3.29 e na Figura 3.30.

| Fatores de interação | Tipo de secções                                    | Propriedades plásticas das secções transversais<br>Classe 1, Classe 2   |
|----------------------|--|---|
| $k_{yy}$             | Secções em I<br>Secções tubulares<br>rectangulares | $C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$<br>$\leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ |
| $k_{yz}$             | Secções em I<br>Secções tubulares<br>rectangulares | $0,6 k_{zz}$  |
| $k_{zy}$             | Secções em I<br>Secções tubulares<br>rectangulares | $0,6 k_{yy}$  |
| $k_{zz}$             | Secções tubulares<br>rectangulares                 | $C_{mz} \left( 1 + (\bar{\lambda}_z - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$<br>$\leq C_{mz} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ |

Figura 3.29: Fatores de interação  $k_{ij}$  para elementos não suscetíveis à deformação por torção (retirado de (CEN, 1993))

Quanto à análise da Figura 3.30, é importante realçar que dos diagramas de momentos apresentados apenas o último é ajustado ao modelo de cálculo do elemento *frame* que está sujeito a carga uniforme. E, visto que não há momentos nas extremidades (Secção 1 e 3), o  $\psi$  é igual a zero, e como  $M_h$  igual a zero implica que  $\alpha_h$  seja igualmente zero.

O que faz com que o domínio de aplicação seja:

$$\text{Domínio de aplicação} = \begin{cases} \psi = 0 \\ \alpha_s = 0 \end{cases}$$


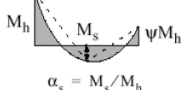
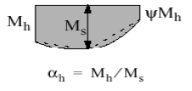
| Diagrama de momentos   | Domínio de aplicação     |                        | $C_{my}$ e $C_{mz}$ e $C_{mLT}$ |                                |
|--|--------------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
|  |                          |                        | Carga uniforme                  | Carga concentrada              |
|  $\psi M$   | $-1 \leq \psi \leq 1$    |                        | $0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$        |                                |
|  $\psi M_h$<br>$\alpha_s = M_s / M_h$   | $0 \leq \alpha_s \leq 1$ | $-1 \leq \psi \leq 1$  | $0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$    | $0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$   |
|  | $-1 \leq \alpha_s < 0$   | $0 \leq \psi \leq 1$   | $0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$    | $-0,8\alpha_s \geq 0,4$        |
|  $\psi M_h$<br>$\alpha_h = M_h / M_s$   | $0 \leq \alpha_h \leq 1$ | $-1 \leq \psi \leq 1$  | $0,95 + 0,05\alpha_h$           | $0,90 + 0,10\alpha_h$          |
|  | $-1 \leq \alpha_h < 0$   | $0 \leq \psi \leq 1$   | $0,95 + 0,05\alpha_h$           | $0,90 + 0,10\alpha_h$          |
|  |                          | $-1 \leq \psi < 0$     | $0,95 + 0,05\alpha_h(1+2\psi)$  | $0,90 + 0,10\alpha_h(1+2\psi)$ |
| Em elementos com modos de encurvadura associados a deslocamentos laterais, o coeficiente de momento uniforme equivalente deverá tomar-se igual a $C_{my} = 0,9$ ou $C_{mz} = 0,9$ , respectivamente. |                          |                        |                                 |                                |
| $C_{my}$ , $C_{mz}$ e $C_{mLT}$ deverão ser obtidos de acordo com o diagrama dos momentos flectores actuantes entre as secções de travamento, de acordo com:   |                          |                        |                                 |                                |
| coeficiente de momento   | eixo de flexão           | travamento na direcção |                                 |                                |
| $C_{my}$   | y-y                      | z-z                    |                                 |                                |
| $C_{mz}$   | z-z                      | y-y                    |                                 |                                |
| $C_{mLT}$  | y-y                      | y-y                    |                                 |                                |

Figura 3.30: Coeficientes de momento uniforme equivalente,  $C_m$  (retirado de (CEN, 1993))

Ou seja, para todos os elementos *frame* dos modelos  $V_n$  em análise, tem-se que:

$$C_m = \begin{cases} C_{my} = 0.95 \\ C_{mz} = 0.95 \end{cases}$$

Após a definição dos fatores de interação de esforços, e antes de proceder à verificação de segurança, são definidos os esforços resistentes (ver Tabela 3.41) a partir de  $A$  e  $W_{pl}$ , parâmetros da secção, e, de  $f_{yd}$ , parâmetro do material.

Tabela 3.41: Definição dos esforços resistentes dos elementos *frames* para os modelos  $V_n$

|       | $A[m^2]$ (*) | $W_{pl}[m^3]$ (*)    | $N_{Rk}[kN]$ | $N_{b,Rd}[kN]$ | $M_{Rk}[kN.m]$ |
|-------|--------------|----------------------|--------------|----------------|----------------|
| $V_4$ | 0.00224      | $5.95 \cdot 10^{-5}$ | 616.0        | 523.6          | 16.3           |
| $V_6$ | 0.00879      | $1.83 \cdot 10^{-5}$ | 241.7        | 205.4          | 5.0            |
| $V_8$ | 0.000559     | $7.44 \cdot 10^{-6}$ | 153.7        | 130.6          | 2.0            |

(\*) Valores retirados de tabelas comerciais.

A seguir apresentam-se as tabelas, Tabela 3.42 - Tabela 3.44, que mostram o cumprimento da secção para estado limite último com o critério definido em Eq.3.36, visto que é mais condicionante que o critério Eq.3.37.

Tabela 3.42: Verificação de segurança ao Estado Limite Último para o modelo  $V_4$

| $L_{barras}[m]$ | Esforço Axial [kN] |                        | $M_2[kN.m]$            | $M_3[kN.m]$            |
|-----------------|--------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1.11            | Compressão         | -50.83                 | 6.957                  | -5.987                 |
|                 | $k_{yy}$           | $\frac{M_y}{M_{y,rk}}$ | $k_{yz}$               | $\frac{M_z}{M_{z,rk}}$ |
|                 | 0.95               | 0.468                  | 0.57                   | 0.403                  |
| 1.ª Parcela     | 2.ª Parcela        | 3.ª Parcela            | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ?             |
| 0.108           | 0.444              | 0.229                  | 0.78                   | √                      |

Tabela 3.43: Verificação de segurança ao Estado Limite Último para o modelo  $V_6$

| $L_{barras}[m]$ | Esforço Axial [kN] |                        | $M_2[kN.m]$            | $M_3[kN.m]$            |
|-----------------|--------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0.62            | Compressão         | -29.671                | 2.019                  | 1.938                  |
|                 | $k_{yy}$           | $\frac{M_y}{M_{y,rk}}$ | $k_{yz}$               | $\frac{M_z}{M_{z,rk}}$ |
|                 | 0.95               | 0.403                  | 0.57                   | 0.387                  |
| 1.ª Parcela     | 2.ª Parcela        | 3.ª Parcela            | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ?             |
| 0.144           | 0.382              | 0.221                  | 0.75                   | √                      |

Tabela 3.44: Verificação de segurança ao Estado Limite Último para o modelo  $V_8$

| $L_{barras}[m]$ | Esforço Axial [kN] |                        | $M_2[kN.m]$            | $M_3[kN.m]$            |
|-----------------|--------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0.82            | Compressão         | -19.942                | 0.848                  | 0.836                  |
|                 | $k_{yy}$           | $\frac{M_y}{M_{y,rk}}$ | $k_{yz}$               | $\frac{M_z}{M_{z,rk}}$ |
|                 | 0.95               | 0.392                  | 0.57                   | 0.386                  |
| 1.ª Parcela     | 2.ª Parcela        | 3.ª Parcela            | Total $\sum(Parcelas)$ | Verifica ?             |
| 0.139           | 0.372              | 0.220                  | 0.73                   | √                      |

A partir das tabelas apresentadas anteriormente percebe-se que os esforços atuam entre 70-80% da capacidade resistente da secção, o que se conclui que a secção dimensionada está folgada.

Conclui-se que para as secções em causa (Tabela 3.38) a flexão nos dois eixos é o mais condicionante para o dimensionamento dos elementos de barra, sujeitos às pressões elevadas do solo, quando comparado com a parcela à compressão.

### 3.5 Considerações gerais

De seguida tomam-se algumas considerações acerca dos casos de estudo analisados neste capítulo.

- Os modelos não possuem qualquer abertura;
- As análises têm como base modelos de cálculo da estrutura apropriados para o estado limite em consideração;
- Os modelos de cálculo e os parâmetros assumidos para os cálculos demonstram o comportamento estrutural no estado limite correspondente, com a devida precisão e refletem o comportamento previsto dos elementos e das secções transversais respetivas;
- Para a verificação de segurança dos elementos de barra são considerados os efeitos de segunda ordem, nomeadamente o efeito de deformação por encurvadura;
- A análise é estática, ou seja, as condições são independentes do tempo, em oposição a uma análise dinâmica, que teria em consideração o comportamento em condições influenciadas pelo tempo, como sismos ou tempestades;
- A Tabela 3.45 mostra que há um aumento significativo do número de barras com o aumento de  $V_n$ , o mais visível é de  $V_6$  para  $V_8$ , conseqüentemente da quantidade de material. No modelo  $V_2$  para um elemento de barra de comprimento máximo de 2.32 m em termos de massa, o valor de 9.75 kg, o que já é um valor considerável.

Um elemento de barra do modelo  $V_4$  com um comprimento de 1.22 m, totaliza 1.84 kg, o que é um valor mais aceitável comparando com o modelo  $V_2$ , quer em termos de massa quer em termos de comprimento.

As dimensões da secção do modelo  $V_6$  diminuem ligeiramente comparando com o modelo  $V_4$ , mas o parâmetro mais notório é a massa de uma barra que diminui para 0.55 kg. No entanto para haver esta diminuição de massa, implica que o número de elementos de barra aumente, o que pode não ser tão viável em termos construtivos.

O Modelo  $V_8$  possui 980 barras, o que torna um modelo mais demorado a nível construtivo visto ter que se fazer mais cortes.

Tabela 3.45: Dados dos elementos de barra para modelos  $V_n$  à superfície

|    | Número de barras | $\sum L_{barras}[m]$ | Secção [ $cm^2$ ] |
|----|------------------|----------------------|-------------------|
| V2 | 65               | 262                  | 10x10             |
| V4 | 250              | 537                  | 6x6               |
| V6 | 555              | 809                  | 4x4               |
| V8 | 980              | 1081                 | 3.5x3.5           |

- Na Figura 3.31, apresentam-se os pesos totais dos elementos de barra que constituem os modelos  $V_n$  para o caso de estudo 1. Verifica-se que existem um elevado desnível de  $V_2$  para  $V_4$  e a partir de  $V_4$  a variação não é tão significativa;



Figura 3.31: Peso dos elementos *frames* das cúpulas à superfície

- Para o caso de estudo 2, apresenta-se na Figura 3.32 a comparação do peso da estrutura em aço adotada com elementos de gradil + perfis metálicos SHS e caso a opção tivesse sido chapas maciças para as faces no invés de gradil. Verifica-se que o peso das estruturas com chapas maciças seriam muito elevados comparando com os perfis de gradil. Tendo em conta que se estariam a aplicar chapas da ordem dos 1.5 - 3 cm aproximadamente, valores calculados anteriormente.

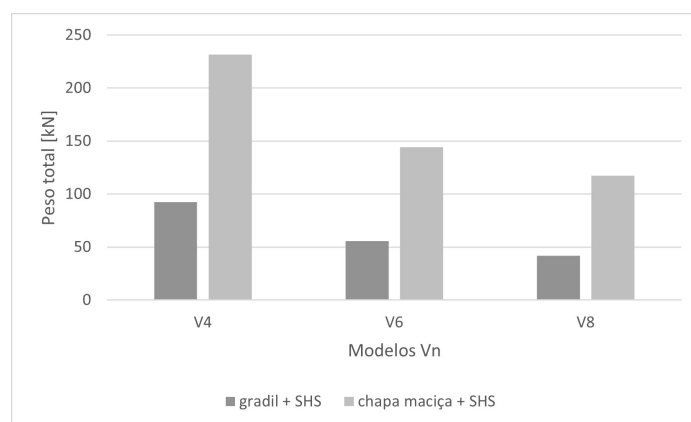


Figura 3.32: Peso dos elementos das cúpulas enterradas

## Capítulo 4

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

Neste último capítulo são apresentadas as conclusões e uma síntese dos resultados obtidos nos estudos desenvolvidos em dois casos de estudo distintos nos modelos  $V_n$  de cúpulas geodésicas.

Por fim, identificam-se possíveis abordagens de investigação às estruturas geodésicas, com vista à expansão deste conceito e inovação, face à construção atualmente praticada.

### 4.1 Conclusões

Esta dissertação, pretende ilustrar o comportamento das estruturas geodésicas hemisféricas, tendo em conta duas situações distintas: uma em que a estrutura está à superfície e livre de obstáculos sujeita à ação do vento (tipo 2) ( $comb_1$ ) e a outra em que a estrutura está enterrada a uma profundidade de 4.75 m e está sujeita à ação de um tipo de solo arenoso ( $comb_2$ ). São analisadas quatro tipos de cúpulas geodésicas:  $V_2$ ,  $V_4$ ,  $V_6$  e  $V_8$ .

Aplicados os carregamentos à estrutura são obtidas várias respostas a partir das quais são analisados diferentes esforços e retiradas as seguintes conclusões:

#### **Cúpulas geodésicas à superfície - Caso de estudo 1:**

- Faces

As faces para este cenário não correspondem a um elemento estrutural. O sistema é articulado, ou seja, barra - nó. No entanto foram definidas as faces, para os modelos no *Sap2000* com uma membrana de ECOPVC de 1.2 mm, para ser possível introduzir as pressões do vento sobre a estrutura. Foi escolhido este material pelo facto de ser mais leve que a madeira ou aço e por ser impermeável.

- Barras

Os elementos para dimensionamento são de madeira C24 e o critério primário para definir a secção transversal, quadrada, face à ação é a esbelteza.

Para todos os modelos, as barras que estão localizadas nas faixas 1 e 2 (Figura 3.6), estão à compressão. O número reduzido de barras sujeitas à combinação da compressão e flexão não é limitativo para o dimensionamento das barras.

As restantes barras estão à tração, no entanto, não é esse o esforço predominante na verificação ao Estado Limite Último.

As pressões do vento também induzem flexão nos dois planos a meio vão das barras (secção 2), e essa sim, é preponderante no dimensionamento dos elementos de barras, em combinação com a tração, para todos os modelos  $V_n$ .

Relativamente ao modelo  $V_2$ , este possui elementos de barra com comprimento da ordem dos 2 m o que é pouco razoável para esta estrutura, pois quanto maior for o elemento de barra maior é a probabilidade de problemas de encurvadura em elementos que estejam sujeitos à compressão.

Para o modelo  $V_4$  a flexão tem o papel predominante no dimensionamento deste modelo e, noutra perspetiva o esforço axial de tração é consideravelmente superior ao do elemento condicionante do modelo  $V_2$ .

No modelo  $V_6$ , tal como no  $V_4$ , o elemento mais condicionante na verificação de segurança, possui o efeito da flexão superior ao da tração. Para o modelo  $V_8$  o mais condicionante, a influência dos esforços de tração e momentos são semelhantes.

- Nós

Como existem três tipos de nós diferentes (com 4, 5 e 6 barras) foram desenvolvidos modelos simples para testar a capacidade do material bambu. Este material a nível científico ainda é pouco investigado, e por se saber que a capacidade resistente deste material varia consoante a sua idade e espécie, estes modelos foram testados para parâmetros determinados por (Shastri, A. & Unnikrishnan, S., 2017).

Observa-se que o bambu resiste às ações a que é sujeito, dado que as tensões de *von mises* são inferiores ao valor característico deste material. O comportamento do bambu apresenta resultados semelhantes nos diferentes modelos  $V_n$ .

### **Cúpulas geodésicas enterradas - Caso de estudo 2:**

Devido ao facto das pressões do solo serem elevadas é necessário que todos os elementos sejam dimensionados com o material aço.

- Faces

As faces para este caso de estudo correspondem a elementos estruturais devido ao facto das pressões do solo descarregarem diretamente para estas.

De forma conservativa assumiu-se o dimensionamento para a face mais condicionante em cada modelo  $V_n$ . Este dimensionamento foi realizado para o Estado Limite Último e Estado Limite de Utilização.



Inicialmente, foi ponderado aplicar chapas de aço maciças sobre as barras, essa hipótese foi anulada pelo facto de se ter obtido espessura de chapa elevadas, o que implicava um custo elevado. Por isso, optou-se por uma solução de gradil, para minimizar o peso para uma mesma inércia. Esta solução implica a aplicação de uma chapa fina para impermeabilizar a estrutura.

Verificou-se que houve uma redução da altura do gradil com o aumento da frequência dos modelos implicou uma diminuição da inércia do perfil.

À medida que a frequência dos modelos aumenta, a tensão média e o deslocamento das faces diminuem.

- Barras

Os esforços das barras são provenientes das ações que são aplicadas sobre as faces.

A combinação de esforços mais crítica para estes elementos é a de flexão composta com compressão. Foi necessário dimensionar estes elementos, de secção tubular, para a encurvadura.

Verifica-se que para todos os modelos  $V_n$  as parcelas relativas à flexão são as mais condicionantes para o dimensionamento ao ELU.

- Nós

Não são alvo de estudo nesta dissertação.

A conclusão geral para os dois casos de estudo é que a flexão é a mais condicionante para qualquer modelo com menor ou maior frequência face à tração / compressão, quer para os elementos de face, quer para os de barra. Para os nós, não se aplica, visto que os nós apenas estão sujeitos ao esforço axial.

Para o cenário das cúpulas à superfície, o modelo  $V_4$  é o que será mais viável executar, é o que tem uma relação mais equilibrada de número de barras e seu comprimento e possui uma dimensão de secção razoável.

Para o cenário das cúpulas enterradas, não é conclusivo o melhor modelo, no entanto, afirma-se que o  $V_4$  poderá ter faces com áreas elevadas, o que implica um peso de gradil superior, comparando com  $V_6$  ou  $V_8$  que têm áreas com menor valor.

Relativamente aos materiais, pode-se concluir que é possível introduzir a madeira como material estrutural para este tipo de estruturas geodésicas, desde que os esforços não sejam muito elevados e existam condições de meio para o seu uso. O aço continua a ser um material com características distintas de outros materiais, nomeadamente elevada capacidade resistente, o que confere a sua aplicabilidade em casos de estudo com elevados esforços atuantes. Foi introduzido o bambu, além de não ter sido aprofundado o seu desempenho, é possível assumir que será um material com potencial no futuro da construção, devido à sua capacidade resistente.

## 4.2 Desenvolvimentos futuros

Nesta dissertação, os objetivos propostos foram alcançados.

Sugerem-se alguns desenvolvimentos futuros de modo a aprofundar o conhecimento sobre a temática das cúpulas geodésicas.

- Necessidade de confirmação dos resultados obtidos dos nós de bambu com ensaios laboratoriais;
- Estudo de estruturas geodésicas com geometria não hemisférica, como por exemplo com base nos planos a "3/8" e "5/8" da esfera para as mesmas frequências analisadas;
- Análise de modelos geodésicos com aberturas para perceber a sua influência;
- Análise de modelos geodésicos parcialmente enterrados (só superfície da estrutura correspondente a metade da área da base);
- Estudo de fundações para os casos de estudo analisados nesta dissertação;
- Investigação de revestimentos ecológicos para cúpulas à superfície;
- Análise de cúpulas geodésicas com elementos de barra com o material bambu.

# Bibliografia

CEN (1993). Eurocódigo 3 – Projecto de estruturas de aço - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. NP, EN 1993-1:2005 + AC:2009. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

CEN (2009). Eurocódigo 1 - Ações em estruturas. Parte 1-1 - Ações gerais. NP, EN 1991-1:2002 + AC:2009. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

CEN (2010). Eurocódigo 1 - Ações em estruturas — Ações gerais — Part 1-4: Ações do vento. NP, EN 1991-1-4:2005 + AC:2010. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

CEN (2011). Eurocódigo 5 – Projecto de estruturas de madeira Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. NP, EN 1995-1-1:2004. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

CEN (2009). Eurocódigo 7 – Projecto geotécnico Parte 1-1: Regras gerais. NP, EN 1997-1:2004 + AC:009. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

Delaunay, B. (1934) Sur la sphère vide, Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk, 7:793–800

Engel, H. (2013). Structure Systems. Hatje Cantz Verlag, 5.<sup>a</sup> Edição.

Fuller, D. E. B.; Applewhite, E. J. (1976). Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking.

Gómez, A. M., Bermejo Lopez, M. L., Martinez Murillo, J. M., e de la Plaza Escudero, L. (2014). Dicionário visual de arquitetura. Quimera.

Inventor. Versão 2021. Autodesk, inc.

Jaky, J. (1948). Pressure in silos. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. 1, pp. 103–107.

Kubic, M. (2009). Structural Analysis of Geodesic Domes. Final year project, Durham University School of Engineering.

Magalhães, G. M., et al., (2000). Geração de malha de delaunay orientada a objetos. Anais do Worcomp 2000, (January 2000):73–79.

Makowski, Z.S. (1984). Analysis, Design and Construction of Braced Domes. Nichols Publishing Company, Nova York.

Marculli, A. (1980). Teoria del campo 2 Corso di metodologia della visione. Sansoni, Firenze.

MATLAB. Versão R2020a. The mathworks, inc.

Morgenstem, N. R. & Eisenstein, Z. (1970): "Methods of Estimating Lateral Loads and Deformations," Proc. ASCE Conf. Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Str., Cornell Univ., Ithaca, 51-102.

Oliveira, E. V. (1968). Construções em Falsa Cúpula. Geographica, nº16 edition.

Oliveira, E. V. et al., (1994). Construções Primitivas em Portugal. 3.<sup>a</sup> Edição. Publicações Dom Quixote.

Pinto, L. F. M. (2015). Domo geodésico. Revista Arquitectura Lusíada, 7:45–59. Prenis, J. (1973). The Dome Builder's handbook no.1. page 1. Running Press.

Rankine, W. J. M. (1857): "On the Stability of Loose Earth" Trans. Royal Society, London, Vol.147.

Rovero, L. & Tonietti, U. (2014). A modified corbelling theory for domes with horizontal layers. Construction and Building Materials, vol.50.

Sander, A. & Souza, C. D. (2006). Análise Teórica e Experimental de Treliças Espaciais. Caderno de engenharia de Estruturas, n.20(São Carlos):31–61.

SAP 2000. Versão 22. Static and dynamic finit element analysis of strutures. structural analysis program. Computers and structures. inc.

Shastry, A. Unnikrishnan, S. (2017). Investigation on Elastic Properties of Bamboo and Behavior of Bamboo Reinforced Concrete Beams. International Journal of Earth Sciences and Engineering, 10(02):304–312.

Soares, T. L. d. F. & de Arruda, A. J. V. (2016). As Estruturas Geodésicas Do Ecocamp Na Patagónia: Um Estudo Sobre Seus Aspectos Ergonómicos E Sustentáveis. (1):216–227.

Terzaghi, K. (1943). "Theoretical Soil Mechanics". John Wiley and Sons, Inc., New York.

The Canadian Encyclopedia. (2006, maio 19). *Igloo*. <https://www.thecanadianencyclopedia.ca/en/article/igloo>

The Canadian Encyclopedia. (2008, agosto 11). *Wigwam*. <https://www.thecanadianencyclopedia.ca/en/article/wigwam>

Zechmann, E. (2008). Make Icosahedron. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19169-make-icosahedron>, MATLAB Central File Exchange.

ZENVISION GmbH. Geodesic History. <https://zendome.de/en/company/history>

# Webgrafia

- [W1] “Momondo” <https://www.momondo.com.br/discover/sitios-arqueologicos-no-mundo>. Acesso em Mai. 10, 2020.
- [W2] “Coisas da Arquitetura” <https://coisasdaarquitetura.wordpress.com>. Acesso em Mai. 10, 2020.
- [W3] R. R. Gadacz. “The Canadian Encyclopedia” <https://www.thecanadianencyclopedia.ca/en/article/wigwam>. Acesso em Set. 25, 2020.
- [W4] R. R. Gadacz. “The Canadian Encyclopedia” <https://www.thecanadianencyclopedia.ca/en/article/igloo>. Acesso em Set. 25, 2020.
- [W5] “Tribo Himba: uma cultura seminômade da Namíbia” <https://www.seumochilao.com.br/tribo-himba-namibia/are>. Acesso em Set. 25, 2020.
- [W6] “The Mongolian Yurt.” <https://www.mongolyurt.com/en/construction/frames.html>. Acesso em Set. 25, 2020.
- [W7] “Bjorn Free” <https://bjornfree.com/travel/galleries/>. Acesso em Out. 22, 2020.
- [W8] “Wikimedia commons” <https://commons.wikimedia.org>. Acesso em Out. 22, 2020.
- [W9] “Buena Vibra” <https://buenavibra.es/por-el-mundo/destinos/europa/santa-sofia-la-joya-de-estambul-sigue-sorprendiendo-al-viajero/>. Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W10] “Best HQ Wallpapers” <https://besthqwallpapers.com/pt/cidades/>. Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W11] Palestine View “Flickr” [https://www.flickr.com/photos/palestine\\_view/](https://www.flickr.com/photos/palestine_view/). Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W12] “Road Affair” <https://www.roadaffair.com/best-unesco-world-heritage-sites/>. Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W13] “Coole Photography” <http://www.coolephotography.co.uk/blog/mughal-masterpieces/>. Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W14] Emanuel Facius “Flickr” <https://www.flickr.com/photos/182363664@N08/>. Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W15] Deborah Guber “Flickr” <https://www.flickr.com/photos/>. Acesso em Nov. 21, 2020.
- [W16] “Vatican.com” <https://vatican.com/Private-Essential-Sistine-Chapel-Tour-Vatican-Museum-St-Peters-Basilica/>. Acesso em Ago. 20, 2020.

[W17] nydavid1234 “Flickr” <https://www.flickr.com/photos/nydavid1234/10117418864/in/pool-26943102@N00>. Acesso em Ago. 20, 2020.

[W18] “PxHere” <https://pxhere.com/>. Acesso em Set. 10, 2020.

[W19] Werner Ustorf “Flickr” <https://www.flickr.com/photos/phancurio/collections>. Acesso em Abr. 17, 2020.

[W20] Herbert Plagge “Flickr” <https://www.flickr.com/people/herbert-plagge/photosof>. Acesso em Abr. 17, 2020.

[W21] Lee Jaffe “Flickr” <https://www.flickr.com/photos/ldjaffe/>. Acesso em Abr. 17, 2020.

[W22] Metropanas “Flickr” <https://www.flickr.com/>. Acesso em Abr. 17, 2020.

[W23] Samuel Sánchez “Flickr” <https://www.flickr.com/>. Acesso em Abr. 17, 2020.

[W24] “Domerama” <http://www.domerama.com/>. Acesso em Set. 25, 2020.

[W25] “Dlupal Software GmbH” <https://www.dlupal.com/pt/>. Acesso em Set. 10, 2020.

## Apêndice A

# Conceção da geometria - Matlab (Zechmann, E., 2008)

### A.1 Programa: make\_icosahedron

```
1000 function [ x, y, z, TRI]=make_icosahedron(f, r, sphere, make_plot, faceopaque)
1002 % prompt = {'Frequência (apenas de ordem par):', 'Raio:', 'Hemisfério (0) (em caso de esfera
           (1):', 'Gráfico (caso não pretenda (0))', 'Faces opacas no gráfico (caso não pretenda
           (0))'};
           % dlgtitle = 'Geração de geometria geodésica';
1004 % dims = [1 50];
           % definput = {'', '', '0', '1', '0'};
1006 % answer = inputdlg(prompt, dlgtitle, dims, definput)
           % f=str2num(answer{1})
1008 % r=str2num(answer{2})
           % sphere=str2num(answer{3})
1010 % make_plot=str2num(answer{4})
           % faceopaque=str2num(answer{5})
1012
           %% Syntax;
1014 %% [ x, y, z, TRI]=make_icosahedron(f, r, mic_r, make_plot, faceopaque);
           %% *****
1016 %% Description
           %% Program makes an icosahedron of f frequency of type 1 (using midpoints)
1018 %% f is restricted to the even numbers because odd frequency icosahedra do
           %% not have a cutting plane.
1020 %% *****
           %% Input Variables
1022 %% f is the frequency of the icosahedron.
           %%
           %%         Default frequency is 2, which is a typical icosahedron.
1024 %%
           %%         f is rounded up to the nearest even integer.
           %% r is the radius of the icosahedron. Default radius is 1.
```

```

1026 %% sphere = 1; makes a sphere. Otherwise a hemisphere is output.
    %%          default is a sphere
1028 %% make_plot = 1; makes a 3d plot of the icosahedron.
    %%          Default is to not make a plot.
1030 %% faceopaque =1; makes the faces of the icosahedron opaque.
    %%          Default is faces transparent.
1032 %% *****
    %% Output Variables
1034 %% x,y,and z are row vector of the x, y, and z coordinates of the
    %% icosahedron nodes.
1036 %% TRI is the triangularization of the icosahedron nodes.
    %% *****
1038 % Example
    % make_plot=1
1040 % [ x, y, z, TRI]=make_icosahedron(f, r, sphere, make_plot, faceopaque);
    % f=10;
1042 % r=4;
    % sphere = 0;
1044 % make_plot=1;
    % faceopaque=0;
1046 % [ x, y, z, TRI]=make_icosahedron(f, r, sphere, make_plot, faceopaque);

1048 if nargin < 1 || isempty(f) || logical(f < 2)
        f=2;
1050 end

1052 f=round(f);
    if f < 2
1054         f=2;
    end

1056 if isequal(mod(f, 2), 1)
1058     f=2*ceil(f/2);
    end

1060
1062 if nargin < 2 || isempty(r) || logical(r < 0) || ~isnumeric(r)
        r=1;
    end

1064
1066 if nargin < 3 || ~isequal(sphere, 1)
        sphere=0;
    end

1068
1070 if nargin < 4 || ~isequal(make_plot, 1)
        make_plot=0;
    end

1072
1074 if nargin < 5 || ~isequal(faceopaque, 1)
        faceopaque=0;
    end

```



```

end
1076 [x2, y2, z2, it]=icosahedron_nodes(f, r);
1078
1080 [x, y, z]=build_icoso(x2, y2, z2);
1082
1084 [rho, theta, phi]=spherical_angle_ed(x, y, z);
1086
1088 [x10, y10, z10]=splat(rho, theta, phi);
1090
1092 TRI = delaunay(x10, y10);
1094 save Tri
1096 t=array2table(TRI)
1098 save t
1100 writetable(t, 'incidenciasdosverticesF.xls');
1102
1104 %% Export Points
1106 ico=array2table([x',y',z']);
1108 writetable(ico, 'Matrix_pontosF.xls');
1110 % spherical=array2table([rho',theta',phi']);
1112 % writetable(spherical, 'Matrix_spherical.xls');
1114
1116 if sphere == 1
1118     [TRI, x, y, z]=make_sphere(TRI, x, y, z);
1120 end
1122
1124 if make_plot ==1
1126     figure(10)
1128     if faceopaque == 1
1130         h=trisurf(TRI,x,y,z, 'FaceColor', [1 1 1], 'EdgeColor', 0.5*[1 1 1], 'LineWidth', 1 );
1132     else
1134         h=trisurf(TRI,x,y,z, 'FaceColor', 'none', 'EdgeColor', 0.5*[1 1 1], 'LineWidth', 1 );
1136     end
1138     axis equal;
1140
1142     xlabel('x-axis (m)', 'FontSize', 16');
1144     ylabel('y-axis (m)', 'FontSize', 16');
1146     zlabel('z-axis (m)', 'FontSize', 16');
1148     title( ['Structure Struts and Nodes'], 'FontSize', 16');
1150
1152     axis equal;
1154     grid off;
1156 end
1158 end

```

## A.2 Sub programa: icosahedron\_nodes

```
1000 function [x, y, z, it]=icosahedron_nodes(f, r)
%% Syntax;
1002 %% [x, y, z, it]=icosahedron_nodes(f, r);
%% *****
1004 %% Description
%% Program makes the master triangle for an icosahedron of
1006 %% f frequency of type 2.
%% *****
1008 %% Input Variables
%% f is the frequency of the icosahedron.
1010 %% f=2 is similar to a soccer ball.
%% r is the radius of the icosahedron.
1012 %% *****
%% Output Variables
1014 %% x, y, and z are vectors with the rectangular coordinates for the nodes
%% of a hemispherical icosahedron.
1016 %% it is the matrix of coordinate indices for the rectangular coordinate
%% vectors.
1018 %% *****
% Example
1020 % f=2; % 2 frequency icosahedron.
% r=4; % 4 meter radius.
1022 % [x2, y2, z2, it]=icosahedron_nodes(f, r);
%calculate the coordinate indices
1024 % i1 -> x
% i2 -> y
1026 % i3 -> z
num_pts=0.5*((f+1)^2+(f+1));
1028 it=zeros(3,num_pts);

1030 for e1=1:(f+1);
    i1=f-e1+1;
1032     for e2=1:(e1);
        i2=(e2-1);
1034         i3=(f-i1-i2);

1036         a=e1+1;
        b=f+1;
1038         if a <= f+1;
            pt=0.5*(b^2+b-a^2+a)+i2+1;
1040         else
            pt=i2+1;
1042         end

1044         it(1, pt)=i1;
            it(2, pt)=i2;
1046         it(3, pt)=i3;
```

```

    end
1048 end

1050 x1=1:num_pts;
    y1=1:num_pts;
1052 z1=1:num_pts;

1054 % Coordinate formulas for base pentagon
    % Icosahedron class 1, type 2, frequency f
1056 tau=0.5*(1+sqrt(5));

1058 for e1=1:num_pts;

1060     i1=it(1, e1);
        i2=it(2, e1);
1062     i3=it(3, e1);

1064     x1(e1)=i1*sin(72/180*pi);
        y1(e1)=i2+i1*cos(72/180*pi);
1066     z1(e1)=f/2+i3/tau;
    end
1068 [rho, theta, phi]=spherical_angle_ed(x1, y1, z1);
    [x, y, z]=spherical_to_rectangular(r, theta, phi);

```

### A.3 Sub programa: spherical\_to\_rectangular de icosahedron\_nodes

```

1000 function [x, y, z]=spherical_to_rectangular(r, theta, phi)
    %% spherical, rectangular, coordinates
1002 %% Syntax;
    %% [x, y, z]=spherical_to_rectangular(r, theta, phi);
1004 %% *****
    %% Description
1006 %% Program maps the spherical coordinates r, theta, and phi from a
    %% sphere to rectangular coordinates.
1008 %% *****
    %% Input Variables
1010 %% r, theta, phi, are matrices of spherical coordinates.
    %% *****
1012 %% Output Variables
    %% x, y, and z, are matrices of rectangular coordinates.
1014 %% *****
    % Example
1016 % phi=pi/4:pi/320:pi/2;
    % theta=0:(pi/16):(5*pi);

```

```

1018 % r=ones(size(phi));
      % [x, y, z]=spherical_to_rectangular(r, theta, phi);
1020 % plot3(x,y,z, '-r', 'Linewidth', 3 );
      x=r.*sin(phi).*cos(theta);
1022 y=r.*sin(phi).*sin(theta);
      z=r.*cos(phi);

```

## A.4 Sub programa: spherical\_angle\_ed de icosahedron\_nodes

```

1000 function [rho, theta, phi]=spherical_angle_ed(x, y, z)
      %% spherical, rectangular, coordinates
1002 %% Syntax;
      %% [rho, theta, phi]=spherical_angle_ed(x, y, z);
1004 %% *****
      %% Description
1006 %% Program maps the rectangular coordinates, x, y, and z to
      %% spherical coordinates r, theta, and phi.
1008 %% theta is set to 0 at the top and bottom points.
      %% *****
1010 %% Input Variables
      %% x, y, and z, are matrices of rectangular coordinates.
1012 %% *****
      %% Output Variables
1014 %% r, theta, phi, are matrices of spherical coordinates.
      %% *****
1016 % Example
      % x=1:100;
1018 % y=x.^2;
      % z=x.^3;
1020 % [rho, theta, phi]=spherical_angle_ed(x, y, z);
      rho=sqrt(x.^2+y.^2+z.^2);
1022 r=sqrt(x.^2+y.^2);

1024 buf=size(x);
      n=buf(1);
1026 m=buf(2);
      theta=zeros(n, m);
1028 phi=zeros(n, m);

1030 for e1=1:n;
      for e2=1:m;
1032         if abs(y(e1, e2))< 10^(-13) && abs(x(e1, e2)) < 10^(-13)
              theta(e1, e2)=0;
1034         else
              theta(e1, e2) = atan2(y(e1, e2),x(e1, e2));
1036         end
      end

```

```

        phi(e1, e2) = atan2(r(e1, e2), z(e1, e2));
1038     end
end

```

## A.5 Sub programa: build\_icosah

```

1000 function [x2, y2, z2]=build_icosah(x, y, z)
    %% Syntax;
1002 %% [x2, y2, z2]=build_icosah(x, y, z);
    %% *****
1004 %% Description
    %% Program makes a hemispherical icosahedron of f frequency of type 2
1006 %% If f is even a full hemisphere is output.
    %% If f is odd only a partial hemisphere is output.
1008 %% Odd frequency icosahedra do not have a hemispherical cutting plane.
    %% *****
1010 %% Input Variables
    %% x, y, z are vectors with the rectangular coordinates of the
1012 %%         master triangle fro an icosahedron.
    %% *****
1014 %% Output Variables
    %% x2, y2, z2 are vectors with the rectangular coordinates for the nodes a
1016 %% of a hemispherical icosahedron.
    %% *****
1018 % Example
    % f=2; % 2 frequency icosahedron.
1020 % r=4; % 4 meter radius.
    % [x2, y2, z2, it]=icosahedron_nodes(f, r);
1022 % [x, y, z]=build_icosah(x2, y2, z2, sphere);
    nx=length(x);
1024 radius=norm([x(1), y(1), z(1)]);

1026 f=-3/2+sqrt(9/4+2*(length(x)-1));

1028 % remove the right edge
    % nre—> no right edge
1030 re=(1:(f+1));
    nre=setdiff(1:nx, re);
1032
    % remove the left edge
    % nle—> no right edge
1034 b=f+1;
1036 ig=1;

1038 for e1=1:f;

```

```

1040     a=f+2-e1;
1041     e2=0.5*(b^2+b-a^2+a)+1;
1042     ig=[ig e2];

1044 end

1046 le=ig;
1047 nle=setdiff(1:nx, le);
1048
1049 % remove the bottom edge
1050 % nbe—> no bottom edge
1051 ib=[];
1052
1053 for e1=1:(f+1);
1054     ib=[ib ig(e1)+f+1-e1];
1055 end
1056
1057 be=ib;
1058 nbe=setdiff(1:nx, be);

1060 % make master triangle

1062 x3=x(nre);
1063 y3=y(nre);
1064 z3=z(nre);

1066 x2=x3;
1067 y2=y3;
1068 z2=z3;

1070 v=[x(f+1), y(f+1), z(f+1)];

1072 [x4, y4, z4]=rotate_transform2(x3, y3, z3, v, 72);

1074 x2=[x2 x4];
1075 y2=[y2 y4];
1076 z2=[z2 z4];

1078 nrorbe=intersect(nre, nbe);

1080 x3=x(nrorbe);
1081 y3=y(nrorbe);
1082 z3=z(nrorbe);

1084 [x4, y4, z4]=rotate_transform2(x3, y3, z3, v, 144);

1086 x2=[x2 x4];
1087 y2=[y2 y4];
1088 z2=[z2 z4];

```

```

1090 x3=x(nle);
      y3=y(nle);
1092 z3=z(nle);

1094 % To make a full sphere of odd frequency one line of nodes below z=0
      % must be kept.
1096 % For the even frequencies only keep the nodes that are very close to z=0.
      %
1098 if mod(f, 2) == 0
          IX=find( z2 > -0.01*radius/(f+1));
1100 else
          if isequal(sphere, 1)
1102             IX=find( z2 > -0.5*radius/(f+1));
          else
1104             IX=find( z2 > -0.01*radius/(f+1));
          end
1106 end

1108 x2=x2(IX);
      y2=y2(IX);
1110 z2=z2(IX);

1112 x3=x2;
      y3=y2;
1114 z3=z2;

1116 for e1=1:4;

1118     theta=e1*72/180*pi;

1120     [x1, y1, z1]=shift_theta(x3,y3,z3, theta);

1122     x2=[x2 x1];
      y2=[y2 y1];
1124     z2=[z2 z1];

1126 end

1128 x2=[x2 0];
      y2=[y2 0];
1130 z2=[z2 radius];

1132 % The hemispherical dome is completed.

```

## A.6 Sub programa: rotate\_transform2 de build\_icoso

```
1000 function [X1, Y1, Z1]=rotate_transform2(X, Y, Z, nv, theta)
1001 %% rotate matrices , rectangular coordinates
1002 %% Syntax;
1003 %% [X1, Y1, Z1]=rotate_transform2(X, Y, Z, nv, theta);
1004 %% *****
1005 %% Description
1006 %% Rotates coordinates X, Y, and Z, about nv axis
1007 %% by an angle theta degrees
1008 %% *****
1009 %% Input Variables
1010 %% X, Y, Z, are matrices of rectangular coordinates.
1011 %% nv is the vector to rotate the matrices about.
1012 %% theta is the angle in degrees to rotate the matrices.
1013 %% *****
1014 %% Output Variables
1015 %% X1, Y1, Z1, are the rotated matrices in rectangular coordinates.
1016 %% *****
1017 %
1018 % Example
1019 % theta1=0:(pi/50):(2*pi);
1020 % X=cos(theta1);
1021 % Y=sin(theta1);
1022 % Z=ones(size(theta1));
1023 % nv=[1 1 1];
1024 % theta=90;
1025 % [X1, Y1, Z1]=rotate_transform2(X, Y, Z, nv, theta);
1026 % figure(1);
1027 % plot3(X, Y, Z, 'k');
1028 % hold on;
1029 % plot3([0 1], [0 1], [0 1], 'g');
1030 % plot3(X1, Y1, Z1, 'r');
1031 %%enter theta in degrees
1032 theta=theta*pi/180;
1033
1034 %%normalize a,b,c
1035 nv=1/norm(nv)*nv;
1036 a=nv(1);
1037 b=nv(2);
1038 c=nv(3);
1039
1040 ct=cos(theta);
1041 st=sin(theta);
1042
1043 T=[[a^2*(1-ct)+ct a*b*(1-ct)-c*st a*c*(1-ct)+b*st];
1044   [a*b*(1-ct)+c*st b^2*(1-ct)+ct b*c*(1-ct)-a*st];
1045   [a*c*(1-ct)-b*st b*c*(1-ct)+a*st c^2*(1-ct)+ct]];
1046
```



```

AA=size(X);
1048
for e1=1:AA(1);
1050     for e2=1:AA(2);

1052         p=[X(e1, e2); Y(e1, e2); Z(e1, e2)];
           p1=T*p;

1054         X1(e1, e2)=p1(1);
1056         Y1(e1, e2)=p1(2);
           Z1(e1, e2)=p1(3);
1058     end
end

```

## A.7 Sub programa: shift\_theta de build\_icoso

```

1000 function [x1, y1, z1]=shift_theta(x,y,z, theta)
           %% spherical, rectangular, coordinates
1002 %% Syntax;
           %% [x1, y1, z1]=shift_theta(x,y,z, theta);
1004 %% *****
           %% Description
1006 %% rotates matrices, x, y, and z theta radians about the z-axis.
           %% *****
1008 %% Input Variables
           %% x, y, and z, are matrices of rectangular coordinates.
1010 %% theta is the angle in radians.
           %% *****
1012 %% Output Variables
           %% x1, y1, z1, are the rotated matrices in rectangular coordinates.
1014 %% *****
           %
1016 % Example
           % theta1=0:(pi/50):(2*pi);
1018 % x=cos(theta1);
           % y=sin(theta1);
1020 % z=(1:length(x)).^3;
           % theta=pi/2;
1022 % [x1, y1, z1]=shift_theta(x, y, z, 1*theta);
           % [x2, y2, z2]=shift_theta(x, y, z, 2*theta);
1024 % [x3, y3, z3]=shift_theta(x, y, z, 3*theta);
           % plot3(x, y, z, 'k');
1026 % hold on;
           % plot3(x1, y1, z1, 'r');
1028 % plot3(x2, y2, z2, 'b');
           % plot3(x3, y3, z3, 'g');

```

```

1030 [rho1, theta1, phi1]=spherical_angle_ed(x, y, z);
1032
1034 theta1=theta1+theta;
1034
[x1, y1, z1]=spherical_to_rectangular(rho1, theta1, phi1);

```

## A.8 Sub programa: splat

```

1000 %% mapping, delaunay, flat projection
%% Syntax;
1002 %% [x, y, z]=splat(r, theta, phi);
%% *****
1004 %% Description
%% Program maps the spherical coordinates r, theta, and phi from a
1006 %% sphere to a flat plane to aid in triangularization of hemispherical
%% coordinates.
1008 %% *****
%% Input Variables
1010 %% r, theta, phi, are matrices of spherical coordinates.
%% *****
1012 %% Output Variables
%% x, y, and z, are matrices of rectangular coordinates.
1014 %% *****
% Example
1016 % phi=pi/4:pi/320:pi/2;
% theta=0:(pi/16):(5*pi);
1018 % r=ones(size(phi));
% [x, y, z]=spherical_to_rectangular(r, theta, phi);
1020 % [x10, y10, z]=splat(r, theta, phi);
% TRI = delaunay(x10, y10);
1022 % figure(1);
% h=trisurf(TRI,x,y,z, 'FaceColor', [1 1 1], 'EdgeColor', 0.5*[1 1 1],...
1024 % 'LineWidth', 1 );
% hold on;
1026 % plot3(x,y,z, '-r', 'Linewidth', 3 );
% TRI2 = delaunay(x, y);
1028 % figure(2);
% h=trisurf(TRI2,x,y,z, 'FaceColor', [1 1 1], 'EdgeColor', 0.5*[1 1 1],...
1030 % 'LineWidth', 1 );
% hold on;
1032 % plot3(x,y,z, '-r', 'Linewidth', 3 );
%
1034
x=r.*phi.*cos(theta);
1036 y=r.*phi.*sin(theta);

```

```
z=r.*cos(phi);
```

f

## A.9 Sub programa: make\_sphere

```
1000 function [TRI4, x4, y4, z4]=make_sphere(TRI, x, y, z)
%% Syntax;
1002 %% [TRI3, x3, y3, z3]=make_sphere(TRI, x, y, z);
%% *****
1004 %% Description
%% Program makes the dome of an even frequency icosahedron
1006 %% into a full spherical icosahedron.
%% *****
1008 %% Input Variables
%% x, y, and z are row vector of the x, y, and z coordinates of the
1010 %% icosahedron nodes of the dome.
%% TRI is the triangularization of the icosahedron nodes.
1012 %% *****
%% Output Variables
1014 %% x4, y4, and z4 are row vector of the x4, y4, and z4 coordinates of the
%% full spherical icosahedron nodes.
1016 %% TRI4 is the triangularization of the spherical icosahedron nodes.
%% *****
1018 %%
% Example
1020 % f=2; % 2 frequency similar to soccer ball
% r=4; % 4 meter radius
1022 % [x2, y2, z2, it]=icosahedron_nodes(f, r);
% [x, y, z]=build_icoso(x2, y2, z2);
1024 % [rho, theta, phi]=spherical_angle.ed(x, y, z);
% [x10, y10, z10]=splat(rho, theta, phi);
1026 % TRI = delaunay(x10, y10);
% [TRI, x, y, z]=make_sphere(TRI, x, y, z);
1028 % figure(1);
% h=trisurf(TRI,x,y,z, 'FaceColor', [1 0 0], 'EdgeColor', 0*[1 1 1], ...
1030 % 'LineWidth', 1 );
% title('Red Soccer Ball');
1032 % axis equal
%
1034 nn=length(x);
r=sqrt((x(1, 1).^2+y(1, 1).^2+z(1, 1).^2));
1036
% Calculate the frequency from the length of x
1038 % Assuming that x,y, and z are for a dome.
% length(x)=5*f^2+5/2*f+1;
1040 % using the quadratic equation
f=round(0.25*(sqrt(1/5*(16*length(x)-11))-1));
```

```

1042
1044 % For a full sphere the frequency can be calculated from the number
% of nodes by the formulas
1046 % length(x)=10*f^2+2;
% Using the quadratic equation
1048 % f=round(sqrt((length(x)-2)/10));

1050 ix1=find( abs(z) < 0.01*r/(f+1));
ix2=setdiff(1:mn, ix1);
1052
trix2=[];
1054 trix3=[];
m=length(TRI);
1056
for e1=1:m;
1058
    tri1=TRI(e1, :);
1060
    aa=intersect(tri1, ix1);
1062
    if ~isempty(aa)
1064        trix2=[trix2 e1];
    else
1066        trix3=[trix3 e1];
    end
1068
end
1070
1072 TRI2=TRI(trix2, :);
TRI3=TRI(trix3, :);
1074 TRI33=zeros(size(TRI3));

1076 for e1=1:length(TRI3);
    for e2=1:3;
1078        TRI33(e1, e2)=find(TRI3(e1, e2)==ix2);
    end
1080 end

1082 TRI22=zeros(size(TRI2));

1084 for e1=1:length(TRI2);
    for e2=1:3;
1086
        ix3=find(TRI2(e1, e2)==ix1);
1088        if ~isempty(ix3)
            TRI22(e1, e2)=ix1(ix3);
        else
1090

```

```
1092         ix4=nn+find (TRI2(e1, e2)==ix2);
1093         TRI22(e1, e2)=ix4;
1094     end
1095 end
1096 end
1097
1098 x4=[x x(ix2)];
1099 y4=[y y(ix2)];
1100 z4=[z -z(ix2)];
1101
1102 TRI4=[TRI' [nn+TRI33]' TRI22']';
```

## A.10 *Outputs* - exemplo: modelo $V_4$

| Ponto(i) | Var1  | Var2  | Var3 | Ponto50 | -2,56 | -2,58 | 0,94 |
|----------|-------|-------|------|---------|-------|-------|------|
| Ponto1   | 0,90  | 0,29  | 3,63 | Ponto51 | -3,75 | 0,00  | 0,00 |
| Ponto2   | 0,99  | 1,36  | 3,35 | Ponto52 | -3,57 | -1,16 | 0,00 |
| Ponto3   | 0,99  | 2,39  | 2,71 | Ponto53 | -3,03 | -2,20 | 0,00 |
| Ponto4   | 0,90  | 3,12  | 1,88 | Ponto54 | -2,20 | -3,03 | 0,00 |
| Ponto5   | 1,88  | 0,61  | 3,19 | Ponto55 | -0,55 | -0,76 | 3,63 |
| Ponto6   | 1,97  | 1,68  | 2,71 | Ponto56 | 0,00  | -1,68 | 3,35 |
| Ponto7   | 1,88  | 2,58  | 1,97 | Ponto57 | 0,61  | -2,52 | 2,71 |
| Ponto8   | 2,69  | 0,87  | 2,47 | Ponto58 | 1,11  | -3,05 | 1,88 |
| Ponto9   | 2,69  | 1,81  | 1,88 | Ponto59 | -1,16 | -1,59 | 3,19 |
| Ponto10  | 3,19  | 1,04  | 1,68 | Ponto60 | -0,61 | -2,52 | 2,71 |
| Ponto11  | 3,24  | 1,64  | 0,94 | Ponto61 | 0,00  | -3,19 | 1,97 |
| Ponto12  | 2,58  | 2,52  | 1,04 | Ponto62 | -1,66 | -2,29 | 2,47 |
| Ponto13  | 1,59  | 3,23  | 1,04 | Ponto63 | -1,11 | -3,05 | 1,88 |
| Ponto14  | 0,55  | 3,59  | 0,94 | Ponto64 | -1,97 | -2,71 | 1,68 |
| Ponto15  | 3,03  | 2,20  | 0,00 | Ponto65 | -1,66 | -3,23 | 0,94 |
| Ponto16  | 2,20  | 3,03  | 0,00 | Ponto66 | -0,61 | -3,55 | 1,04 |
| Ponto17  | 1,16  | 3,57  | 0,00 | Ponto67 | 0,61  | -3,55 | 1,04 |
| Ponto18  | 0,00  | 3,75  | 0,00 | Ponto68 | 1,66  | -3,23 | 0,94 |
| Ponto19  | 0,00  | 0,94  | 3,63 | Ponto69 | -1,16 | -3,57 | 0,00 |
| Ponto20  | -0,99 | 1,36  | 3,35 | Ponto70 | 0,00  | -3,75 | 0,00 |
| Ponto21  | -1,97 | 1,68  | 2,71 | Ponto71 | 1,16  | -3,57 | 0,00 |
| Ponto22  | -2,69 | 1,81  | 1,88 | Ponto72 | 2,20  | -3,03 | 0,00 |
| Ponto23  | 0,00  | 1,97  | 3,19 | Ponto73 | 0,55  | -0,76 | 3,63 |
| Ponto24  | -0,99 | 2,39  | 2,71 | Ponto74 | 1,59  | -0,52 | 3,35 |
| Ponto25  | -1,88 | 2,58  | 1,97 | Ponto75 | 2,58  | -0,20 | 2,71 |
| Ponto26  | 0,00  | 2,83  | 2,47 | Ponto76 | 3,24  | 0,11  | 1,88 |
| Ponto27  | -0,90 | 3,12  | 1,88 | Ponto77 | 1,16  | -1,59 | 3,19 |
| Ponto28  | 0,00  | 3,35  | 1,68 | Ponto78 | 2,20  | -1,36 | 2,71 |
| Ponto29  | -0,55 | 3,59  | 0,94 | Ponto79 | 3,03  | -0,99 | 1,97 |
| Ponto30  | -1,59 | 3,23  | 1,04 | Ponto80 | 1,66  | -2,29 | 2,47 |
| Ponto31  | -2,58 | 2,52  | 1,04 | Ponto81 | 2,56  | -1,99 | 1,88 |
| Ponto32  | -3,24 | 1,64  | 0,94 | Ponto82 | 1,97  | -2,71 | 1,68 |
| Ponto33  | -1,16 | 3,57  | 0,00 | Ponto83 | 2,56  | -2,58 | 0,94 |
| Ponto34  | -2,20 | 3,03  | 0,00 | Ponto84 | 3,19  | -1,68 | 1,04 |
| Ponto35  | -3,03 | 2,20  | 0,00 | Ponto85 | 3,57  | -0,52 | 1,04 |
| Ponto36  | -3,57 | 1,16  | 0,00 | Ponto86 | 3,58  | 0,58  | 0,94 |
| Ponto37  | -0,90 | 0,29  | 3,63 | Ponto87 | 3,03  | -2,20 | 0,00 |
| Ponto38  | -1,59 | -0,52 | 3,35 | Ponto88 | 3,57  | -1,16 | 0,00 |
| Ponto39  | -2,20 | -1,36 | 2,71 | Ponto89 | 3,75  | 0,00  | 0,00 |
| Ponto40  | -2,56 | -1,99 | 1,88 | Ponto90 | 3,57  | 1,16  | 0,00 |
| Ponto41  | -1,88 | 0,61  | 3,19 | Ponto91 | 0,00  | 0,00  | 3,75 |
| Ponto42  | -2,58 | -0,20 | 2,71 |         |       |       |      |
| Ponto43  | -3,03 | -0,99 | 1,97 |         |       |       |      |
| Ponto44  | -2,69 | 0,87  | 2,47 |         |       |       |      |
| Ponto45  | -3,24 | 0,11  | 1,88 |         |       |       |      |
| Ponto46  | -3,19 | 1,04  | 1,68 |         |       |       |      |
| Ponto47  | -3,58 | 0,58  | 0,94 |         |       |       |      |
| Ponto48  | -3,57 | -0,52 | 1,04 |         |       |       |      |
| Ponto49  | -3,19 | -1,68 | 1,04 |         |       |       |      |

Figura A.1: Geração de coordenadas de pontos

| TRI1 | TRI2 | TRI3 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|------|------|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| 31   | 35   | 32   | 61 | 60 | 63 | 5  | 8  | 6  | 82 | 80 | 58 |  |
| 46   | 32   | 47   | 57 | 80 | 77 | 4  | 14 | 28 | 68 | 71 | 72 |  |
| 56   | 59   | 60   | 19 | 23 | 20 | 6  | 7  | 3  | 83 | 68 | 72 |  |
| 41   | 21   | 44   | 38 | 59 | 55 | 73 | 91 | 55 | 82 | 58 | 68 |  |
| 37   | 20   | 41   | 61 | 57 | 60 | 3  | 26 | 23 | 83 | 72 | 87 |  |
| 46   | 47   | 45   | 77 | 78 | 74 | 26 | 4  | 28 | 68 | 83 | 82 |  |
| 60   | 59   | 62   | 45 | 48 | 43 | 27 | 28 | 29 | 84 | 79 | 81 |  |
| 39   | 43   | 40   | 49 | 53 | 50 | 26 | 3  | 4  | 85 | 88 | 89 |  |
| 42   | 43   | 39   | 62 | 39 | 40 | 7  | 13 | 4  | 81 | 83 | 84 |  |
| 39   | 59   | 38   | 38 | 42 | 39 | 13 | 17 | 14 | 81 | 82 | 83 |  |
| 50   | 53   | 54   | 48 | 52 | 49 | 3  | 7  | 4  | 84 | 87 | 88 |  |
| 40   | 64   | 62   | 43 | 48 | 49 | 12 | 16 | 13 |    |    |    |  |
| 41   | 44   | 42   | 49 | 52 | 53 | 2  | 6  | 3  |    |    |    |  |
| 43   | 49   | 40   | 42 | 45 | 43 | 12 | 13 | 7  |    |    |    |  |
| 29   | 30   | 27   | 47 | 51 | 48 | 13 | 16 | 17 |    |    |    |  |
| 22   | 32   | 46   | 48 | 51 | 52 | 12 | 9  | 11 |    |    |    |  |
| 29   | 33   | 30   | 44 | 46 | 45 | 12 | 11 | 15 |    |    |    |  |
| 34   | 35   | 31   | 36 | 51 | 47 | 75 | 8  | 5  |    |    |    |  |
| 18   | 29   | 14   | 25 | 31 | 22 | 12 | 15 | 16 |    |    |    |  |
| 25   | 21   | 24   | 32 | 36 | 47 | 11 | 10 | 86 |    |    |    |  |
| 17   | 18   | 14   | 44 | 45 | 42 | 11 | 9  | 10 |    |    |    |  |
| 26   | 24   | 23   | 47 | 48 | 45 | 12 | 7  | 9  |    |    |    |  |
| 14   | 4    | 13   | 44 | 22 | 46 | 5  | 6  | 2  |    |    |    |  |
| 23   | 24   | 20   | 35 | 36 | 32 | 9  | 7  | 6  |    |    |    |  |
| 74   | 5    | 1    | 30 | 34 | 31 | 9  | 8  | 10 |    |    |    |  |
| 68   | 58   | 67   | 30 | 34 | 31 | 9  | 8  | 10 |    |    |    |  |
| 79   | 78   | 81   | 25 | 30 | 31 | 75 | 78 | 79 |    |    |    |  |
| 61   | 63   | 66   | 25 | 22 | 21 | 11 | 86 | 90 |    |    |    |  |
| 81   | 80   | 82   | 31 | 32 | 22 | 11 | 90 | 15 |    |    |    |  |
| 66   | 69   | 70   | 27 | 30 | 25 | 86 | 76 | 85 |    |    |    |  |
| 58   | 80   | 57   | 33 | 34 | 30 | 85 | 79 | 84 |    |    |    |  |
| 73   | 1    | 91   | 23 | 2  | 3  | 76 | 10 | 8  |    |    |    |  |
| 70   | 71   | 67   | 27 | 25 | 24 | 85 | 76 | 79 |    |    |    |  |
| 81   | 78   | 80   | 91 | 19 | 37 | 86 | 10 | 76 |    |    |    |  |
| 65   | 50   | 54   | 24 | 21 | 20 | 86 | 85 | 89 |    |    |    |  |
| 40   | 49   | 50   | 26 | 28 | 27 | 84 | 83 | 87 |    |    |    |  |
| 65   | 54   | 69   | 18 | 33 | 29 | 86 | 89 | 90 |    |    |    |  |
| 63   | 64   | 65   | 28 | 14 | 29 | 85 | 84 | 88 |    |    |    |  |
| 40   | 50   | 64   | 20 | 37 | 19 | 76 | 75 | 79 |    |    |    |  |
| 63   | 65   | 66   | 38 | 41 | 42 | 76 | 8  | 75 |    |    |    |  |
| 64   | 50   | 65   | 21 | 22 | 44 | 2  | 1  | 5  |    |    |    |  |
| 65   | 69   | 66   | 37 | 41 | 38 | 2  | 19 | 1  |    |    |    |  |
| 67   | 61   | 66   | 20 | 21 | 41 | 77 | 73 | 56 |    |    |    |  |
| 62   | 64   | 63   | 55 | 37 | 38 | 77 | 74 | 73 |    |    |    |  |
| 66   | 70   | 67   | 55 | 91 | 37 | 60 | 57 | 56 |    |    |    |  |
| 58   | 57   | 61   | 56 | 73 | 55 | 80 | 78 | 77 |    |    |    |  |
| 56   | 55   | 59   | 74 | 75 | 5  | 73 | 74 | 1  |    |    |    |  |
| 60   | 62   | 63   | 2  | 23 | 19 | 78 | 75 | 74 |    |    |    |  |
| 59   | 39   | 62   | 26 | 27 | 24 | 56 | 57 | 77 |    |    |    |  |
|      |      |      | 91 | 1  | 19 | 61 | 67 | 58 |    |    |    |  |
|      |      |      | 6  | 8  | 9  | 71 | 68 | 67 |    |    |    |  |

Figura A.2: Geração de triangulação de Delaunay





# Apêndice B

## Caso de estudo 1

### B.1 Dimensionamento do elemento barra

#### B.1.1 Modelo $V_4$

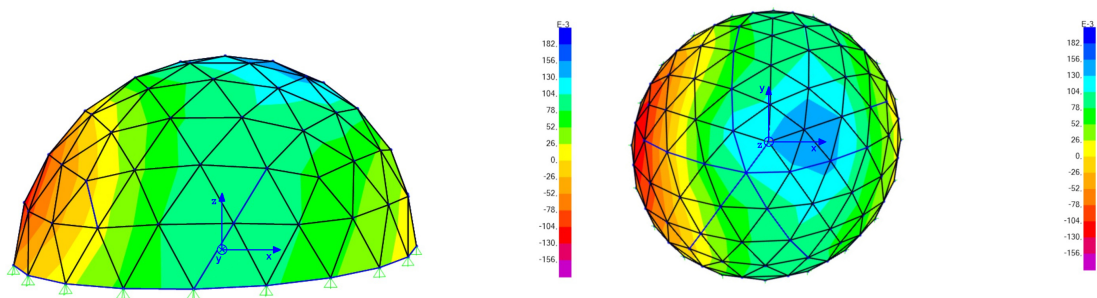


Figura B.1: Tensões normais  $\sigma_{11}$  no modelo  $V_4$

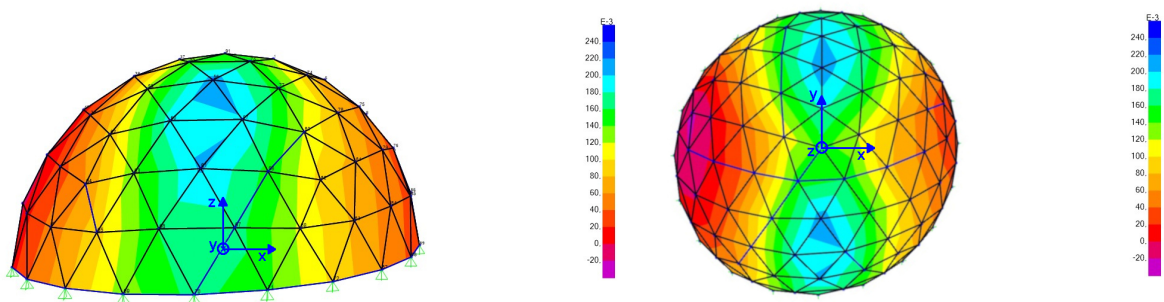


Figura B.2: Tensões normais  $\sigma_{22}$  no modelo  $V_4$

## B.2 Dimensionamento do elemento nó

### B.2.1 Resultados - modelo V2

Tabela B.1: Resultados de análise para conectores com 4 furos -  $V_2$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 7.33         | 100     | 100              | 116              | 16        | 0.09               | 171.2                 | 2.0  |
| 7.33         | 100     | 100              | 125              | 25        | 0.04               | 78.4                  | 4.3  |

Tabela B.2: Resultados de análise para conectores com 5 furos -  $V_2$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 7.33         | 100     | 100              | 118              | 18        | 0.06               | 152.0                 | 2.2  |
| 7.33         | 100     | 100              | 125              | 25        | 0.04               | 84.6                  | 3.9  |

Tabela B.3: Resultados de análise para conectores com 6 furos -  $V_2$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 7.33         | 100     | 100              | 116              | 16        | 0.07               | 165.3                 | 2.0  |
| 7.33         | 100     | 100              | 126              | 26        | 0.03               | 76.0                  | 4.4  |

### B.2.2 Resultados - modelo V6

Tabela B.4: Resultados de análise para conectores com 4 furos -  $V_6$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 4.00         | 40      | 100              | 110              | 10        | 0.07               | 147.8                 | 2.3  |
| 4.00         | 40      | 100              | 115              | 15        | 0.03               | 71.8                  | 4.7  |

Tabela B.5: Resultados de análise para conectores com 5 furos -  $V_6$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 4.00         | 40      | 100              | 110              | 10        | 0.07               | 156.2                 | 2.2  |
| 4.00         | 40      | 100              | 115              | 15        | 0.03               | 81.5                  | 4.1  |

Tabela B.6: Resultados de análise para conectores com 6 furos -  $V_6$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 4.00         | 40      | 100              | 110              | 10        | 0.06               | 148.3                 | 2.3  |
| 4.00         | 40      | 100              | 116              | 16        | 0.02               | 74.4                  | 4.6  |

### B.2.3 Resultados - modelo V8

Tabela B.7: Resultados de análise para conectores com 4 furos -  $V_8$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 3.29         | 35      | 100              | 109              | 9         | 0.06               | 134.7                 | 2.5  |
| 3.29         | 35      | 100              | 113              | 13        | 0.03               | 79.4                  | 4.3  |

Tabela B.8: Resultados de análise para conectores com 5 furos -  $V_8$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 3.29         | 35      | 100              | 108              | 8         | 0.07               | 162.3                 | 2.1  |
| 3.29         | 35      | 100              | 112              | 12        | 0.03               | 77.8                  | 4.3  |

Tabela B.9: Resultados de análise para conectores com 6 furos -  $V_8$

| $N_{ed}[kN]$ | $h[mm]$ | $\phi_{int}[mm]$ | $\phi_{ext}[mm]$ | $esp[mm]$ | $\delta_{max}[mm]$ | $\sigma_{vM}[N/mm^2]$ | $FS$ |
|--------------|---------|------------------|------------------|-----------|--------------------|-----------------------|------|
| 3.29         | 35      | 100              | 108              | 8         | 0.07               | 160.6                 | 2.1  |
| 3.29         | 35      | 100              | 114              | 14        | 0.02               | 66.8                  | 5.1  |

