

Estruturas curvas apoiadas no intradorso ou extradorso

João Luís dos Santos Raposo

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Civil

Orientadores:

Professor Doutor José Manuel de Matos Noronha da Câmara

Professor Doutor Carlos Manuel Tiago Tavares Fernandes

Júri

Presidente: Professor Doutor António Manuel Figueiredo Pinto da Costa

Orientador: Professor Doutor José Manuel de Matos Noronha da Câmara

Vogal: Professor Doutor José Joaquim Costa Branco de Oliveira Pedro

Mai 2019

“Nothing in life is to be feared, it is only to be understood. Now is the time to understand more, so that we may fear less.” - Marie Curie

Declaração

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.

Declaration

I declare that this document is an original work of my own authorship and that it fulfills all the requirements of the Code of Conduct and Good Practices of the Universidade de Lisboa.

Agradecimentos

A realização desta dissertação não teria sido possível sem o apoio de algumas pessoas a quem dedico este espaço, para fazer os devidos agradecimentos e demonstrar a minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Câmara, pela sua partilha de conhecimentos, por toda a disponibilidade, incentivo, dedicação e entusiasmo que sempre demonstrou ao longo de todo o trabalho, tendo contribuído muito para o meu gosto pelo estudo das estruturas.

Agradeço ao Prof. Carlos Tiago por toda a atenção demonstrada no esclarecimento de dúvidas, pela formulação do código no Wolfram Mathematica e pela pessoa atenciosa que foi para comigo.

Agradeço ao Eng. Miguel Lourenço pela disponibilidade, ajuda e partilha de conhecimentos na formulação e resolução do problema tendo por base o método estático da teoria da plasticidade.

Agradeço ao Eng. Filipe Reis pelo interesse e disponibilidade demonstrada na realização deste documento.

Agradeço o apoio e incentivo que todos os meus amigos que, de uma forma ou de outra, me acompanharam ao longo deste percurso académico.

Gostaria de agradecer ao meu irmão, José Raposo, aos meus avós, Maria Raposo, José Raposo, Maria Caçador, Martinho Santos, e à minha tia Maria Beselga, por toda a preocupação e apoio que me deram.

Por fim, agradecer e dedicar este trabalho, aos meus pais, Francisca Raposo e António Raposo, pelo carinho, entusiasmo, preocupação e por todo o seu esforço, que possibilitou a minha formação académica.

Resumo

A presente dissertação incide sobre o estudo do comportamento de estruturas curvas apoiadas pelo intradorso ou pelo extradorso. Devido à sua geometria, este tipo de estruturas requer apenas um alinhamento de apoios simples ao longo de um dos seus bordos para que o equilíbrio seja garantido. Por conseguinte, torna-se possível a realização de estruturas em “consola” sem necessidade de encastramento dos seus bordos.

Com recurso às equações de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas, pretendeu-se numa primeira abordagem caracterizar a solução do problema observando em particular as distribuições de esforços obtidas. De seguida e através de modelos numéricos de elementos finitos, avaliou-se o seu comportamento em serviço e no estado limite último, de modo a mostrar a viabilidade deste tipo de soluções. Para isso, analisou-se um caso prático de estudo e efetuou-se posteriormente, uma análise paramétrica. Numa segunda fase, estudou-se uma estrutura curva com geometria em “S” de modo a verificar se o comportamento estrutural deste tipo de soluções era semelhante à situação anterior e avaliar eventuais benefícios ou desvantagens.

O estudo demonstrou que o dimensionamento deste tipo de estruturas é essencialmente condicionado pela verificação ao estado limite de serviço. Verificou-se que a solução é eficaz conduzindo a alturas de seção e quantidades de armaduras correntes. Os resultados para soluções com geometria em “S” permitiram concluir que este tipo de geometria conduz a soluções mais rígidas e portanto a um conseqüente melhor comportamento em serviço.

Palavras-chave: Estruturas curvas, comportamento estrutural, análise paramétrica, estado limite de serviço, estado limite último, betão estrutural.

Abstract

The following dissertation focuses on the study of the behavior of curved structures supported on inner or outer edges. Because of its geometry, this type of structure requires only a simple alignment of supports along one of its edges so that balance is guaranteed. Consequently, it becomes possible to construct cantilever structures without using fixed supports.

Using the equations of equilibrium, compatibility and the constitutive relations, it was intended in a first approach to characterize the exact solution of the problem, observing in particular the stress distribution obtained. Afterwards and through numerical models of finite elements, the behavior in service and the ultimate limit state were evaluated, in order to demonstrate the viability of this type of solutions. For this, a practical study case was analyzed and a parametric analysis was carried out later. In a second point, a curved structure with “S” geometry was studied in order to understand whether the structural behavior of these type of solutions was similar and possible benefits or disadvantages with respect to the previous solution.

The study showed that the design of this type of structures is essentially conditioned by the verification of the service limit state. It has been found, however, that the solution is effective leading to current dimensions and amounts of reinforcement. The results for solutions with geometry in “S” allowed to conclude that this type of geometry leads to more rigid solutions and therefore to a consequent better behavior in service.

Keywords: Curved structures, structural behavior, parametric analysis, service limit state, ultimate limit state, structural concrete.

Índice

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 ENQUADRAMENTO	1
1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	2
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	3
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	5
2.1 FLEXÃO SIMÉTRICA DE LAJES CIRCULARES.....	5
2.1.1 <i>Enquadramento</i>	5
2.1.2 <i>Condições de equilíbrio</i>	5
2.1.3 <i>Relações constitutivas</i>	7
2.1.4 <i>Condições de compatibilidade</i>	7
2.1.5 <i>Equação governativa</i>	7
2.1.6 <i>Condições de fronteira</i>	8
2.1.7 <i>Campos de deslocamentos</i>	9
2.2 MÉTODO ESTÁTICO.....	13
2.3 ESTADO LIMITE ÚLTIMO	16
2.3.1 <i>Dimensionamento à flexão simples</i>	16
2.4 ESTADOS LIMITE DE UTILIZAÇÃO	17
2.4.1 <i>Estado limite de fendilhação</i>	18
2.4.2 <i>Estado limite de deformação</i>	21
2.4.3 <i>Estado limite de vibração</i>	23
3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO GLOBAL DA ESTRUTURA BASE.....	29
3.1 CARACTERIZAÇÃO E MODELAÇÃO.....	29
3.2 ANÁLISE DOS ESTADOS LIMITE DE UTILIZAÇÃO	32
3.2.1 <i>Estado limite de abertura de fendas</i>	33
3.2.2 <i>Estado limite de deformação</i>	33
3.2.3 <i>Estado limite de vibração</i>	36
3.3 ANÁLISE DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO.....	37
4. ANÁLISE PARAMÉTRICA.....	41
4.1 LAJE DE ESPESSURA CONSTANTE	42
4.1.1 <i>Análise dos deslocamentos</i>	42
4.1.2 <i>Análise das vibrações</i>	43
4.1.3 <i>Análise dos esforços</i>	43
4.2 SECÇÃO APOIADA PELO EXTRADORSO	44

4.2.1	<i>Análise dos deslocamentos</i>	44
4.2.2	<i>Análise das vibrações</i>	45
4.2.3	<i>Análise dos esforços</i>	46
4.3	VARIAÇÃO DA ESPESSURA DA LAJE.....	47
4.4	VARIAÇÃO DO ÂNGULO ENTRE APOIOS.....	49
4.5	VARIAÇÃO DO RAIO MÉDIO.....	51
4.6	VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DA “CONSOLA”	52
5.	CASO DE ESTUDO 2	55
5.1	CARATERIZAÇÃO E MODELAÇÃO	55
5.2	ESTRUTURA APOIADA PELO INTRADORSO.....	56
5.2.1	<i>Análise dos deslocamentos</i>	56
5.2.2	<i>Análise das vibrações</i>	58
5.2.3	<i>Análise dos esforços</i>	59
5.3	ESTRUTURA APOIADA PELO EXTRADORSO	61
5.3.1	<i>Análise dos deslocamentos</i>	61
5.3.2	<i>Análise das frequências</i>	62
5.3.3	<i>Análise dos esforços</i>	63
5.4	ESTRUTURA CONTINUAMENTE APOIADA AO LONGO DE UM BORDO.....	65
5.4.1	<i>Análise dos deslocamentos</i>	65
5.4.2	<i>Análise das vibrações</i>	66
5.4.3	<i>Análise dos esforços</i>	66
6.	CONCLUSÕES	69
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
6.2	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	71
	BIBLIOGRAFIA	73
	ANEXOS	75
	ANEXO A.....	75
	ANEXO B.....	81
	ANEXO C.....	83

Índice de Figuras

Figura 1 – Suspensão de um tabuleiro curvo: (a) pelo exterior (b) pelo interior (Retirado de Strasky)..	1
Figura 2 - Ponte pedonal de Gahlensche Straße (retirado de Idelberger 2011).....	1
Figura 3 - Hall de entrada do hotel Savoy Palace na Madeira (JSJ).....	2
Figura 4 – Relações a satisfazer e grandezas que as relacionam. (Freitas, et al., 2018).....	5
Figura 5 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal (adaptado de Reddy 2006).	6
Figura 6 - Parametrização do problema.....	8
Figura 7 – Deformada teórica do caso 1 (esq.) e caso 2 (dir.).....	10
Figura 8 - Esquema de uma laje simplesmente apoiada pelo intradorso (esq.) e extradorso (dir.) (retirado de Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959).	10
Figura 9 - Momento fletor radial (esq.) e circunferencial (dir.) relativo ao caso1.....	12
Figura 10- Método estático vs método cinemático. (Câmara, et al., 2016)	13
Figura 11 – Comparação dos momentos circunferenciais da solução só estaticamente admissível com os da solução exata.....	14
Figura 12 - Comparação dos momentos radiais da solução só estaticamente admissível com a solução exata.....	15
Figura 13 - Tipos de fendilhação provocados por diferentes tipos de esforços (Appleton, 2013).....	18
Figura 14 - variação do parâmetro k com a espessura do elemento.....	20
Figura 15 – Secções determinantes na determinação do coeficiente K . (Câmara, et al., 2016)	23
Figura 16 - Modelo de um oscilador com um grau de liberdade. (Bachmann, et al., 1995).....	24
Figura 17 - Fator de amplificação dinâmica - β_1 . (Azevedo, et al., 1991)	25
Figura 18 - Valores aceitáveis de acelerações de pico. (ISO 2631-2:1989).....	27
Figura 19 – Procedimento de verificação ao estado limite de vibração.....	28
Figura 20 - Modelo tridimensional das escadas (esq.) e estrutura finalizada (dir.) (JSJ).....	29
Figura 21 – Definição geométrica da solução estrutural, dimensões em [m] (JSJ).....	30
Figura 22 - Modelo da estrutura base.	30
Figura 23 – Condições de apoio do modelo de MEF utilizado.	31
Figura 24 – Simplificação adotada na modelação da espessura.....	31
Figura 25 – Comparação do momento fletor atuante com o momento de fendilhação.....	33
Figura 26 – Deslocamentos da estrutura base.	34
Figura 27 - Flecha de uma consola.....	34
Figura 28 – 1º, 2º e 3º modo de vibração da estrutura base.	36
Figura 29 – Distribuição de momentos radiais (esq.) e torsões (dir.) (kNm/m).	37
Figura 30 - Distribuição de momentos na direção circunferencial.	38
Figura 31 - Parametrização do problema.....	41
Figura 32 - Deslocamentos da estrutura com secção transversal constante e variável.....	42
Figura 33 - Diagrama de momentos da estrutura com secção transversal constante e variável	44
Figura 34 – Deslocamentos nas estruturas com secção transversal de espessura constante.....	45

Figura 35 - 1º, 2º e 3º modo de vibração da estrutura (esp. constante, apoiada pelo extradorso).	45
Figura 36 - Diagrama de momentos circunferenciais da estrutura com secção transversal constante.	46
Figura 37 - Variação do deslocamento das estruturas para diferentes alturas da secção.	48
Figura 38 - Variação do momento fletor circunferencial reduzido das estruturas para diferentes alturas de secção.	49
Figura 39 – Variação do deslocamento e da frequência para um acréscimo do ângulo entre apoios.	50
Figura 40 - Variação do momento fletor reduzido para um acréscimo do ângulo entre apoios.	50
Figura 41 - Variação do deslocamento e da frequência para um acréscimo do raio médio.....	51
Figura 42 -Variação do momento fletor circunferencial reduzido para um acréscimo do raio médio...	52
Figura 43 - Variação do deslocamento e da frequência própria para um acréscimo do comprimento da “consola”.....	53
Figura 44 - Variação do momento fletor circunferencial reduzido das estruturas para um acréscimo do comprimento da consola.	54
Figura 45 - Parametrização caso de estudo 2.	56
Figura 46 - Deslocamentos elásticos estrutura em “S” apoiada pelo intradorso.	57
Figura 47 – Deslocamentos elásticos ao longo das secções específicas.	57
Figura 48 – 1º, 2º e 3º modo de vibração.....	58
Figura 49 – Distribuição de momentos na direção radial no alinhamento AL1.....	59
Figura 50 – Distribuição de momentos na direção circunferencial (esq) e torsões (dir.).	60
Figura 51 - Distribuição de momentos na direção circunferencial nos alinhamentos AL1 e AL2.....	60
Figura 52 – Deslocamentos ao longo do corte AL.2.	62
Ilustram-se de seguida na figura 53 os três primeiros modos de vibração.....	62
Figura 54 – 1º, 2º e 3º modo de vibração.....	62
Figura 55 – Distribuição de momentos na direção radial entre apoios.....	63
Figura 56 – Distribuição de momentos na direção circunferencial.	64
Figura 57 – Deslocamentos elásticos das várias soluções indicadas.	65
Figura 58 - 1º, 2º e 3º modo de vibração.	66
Figura 59 – Distribuição de momentos circunferenciais (kNm/m).....	67
Figura 60 – Distribuição de momentos circunferenciais nas zonas referidas.....	67
ANEXO 1 - Deslocamento (Extradorso).....	76
ANEXO 2 - Rotação (Extradorso).	76
ANEXO 3 - Momento fletor radial (Extradorso).	77
ANEXO 4 - Esforço transversal radial (Extradorso).	77
ANEXO 5 - Momento fletor circunferencial (Extradorso).	77
ANEXO 6 - Deslocamento (Intradorso).	79
ANEXO 7 - Rotação (Intradorso).....	80

ANEXO 8 - Momento fletor radial (Intradorso).....	80
ANEXO 9 - Esforço transversal radial (Intradorso).....	80
ANEXO 10 - Momento fletor circunferencial (Intradorso).....	80
ANEXO 11 - Pormenorização das armaduras inferiores.....	81
ANEXO 12 - Pormenorização das armaduras superiores.....	82
ANEXO 13 - Posicionamento das armaduras e dos tirantes (foto de Rui Marote).....	83
ANEXO 14 - Soldadura dos reforços na base dos tirantes (foto de Rui Marote).....	83

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Condições de fronteira.....	8
Tabela 2 - Coeficientes k_1 para os casos estudados (Timoshenko, et al., 1959).....	11
Tabela 3 - Valores recomendados de w_{max}	19
Tabela 4 - Diâmetros máximos dos varões ϕ_s * para controlo de fendilhação.....	20
Tabela 5 - Espaçamento máximo dos varões para controlo de fendilhação.....	21
Tabela 6 – Frequências por tipo de atividade.....	26
Tabela 7 – Propriedades mecânicas do betão C30/37 e um aço A500.....	32
Tabela 8 - Caracterização das ações.....	32
Tabela 9 - Método dos coeficientes globais.....	35
Tabela 10 - Informação modal da estrutura base.....	36
Tabela 11 - Verificação de segurança ao ELU na direção radial.....	38
Tabela 12 - Verificação de segurança ao ELU na direção circunferencial.....	39
Tabela 13 – Informação modal da estrutura (esp. constante, apoiada pelo intradorso).....	43
Tabela 14 - Informação modal da estrutura (esp. constante, apoiada pelo extradorso).....	46
Tabela 15 – Tabela comparativa de soluções.....	47
Tabela 16 - Período e frequências de vibração.....	59
Tabela 17 - Verificação do nível de esforços na laje e cálculo de armaduras.....	61
Tabela 18 – Períodos e frequências associadas a cada modo de vibração.....	63
Tabela 19 - Momentos fletores reduzidos e quantidade necessária de armadura.....	64
Tabela 20 - 1º, 2º e 3º modos de vibração.....	66

Simbologia e Notações

Lista de abreviaturas

AL.1	Alinhamento 1
AL.2	Alinhamento 2
EC0	Eurocódigo 0
EC2	Eurocódigo 2
ELS	Estado limite de serviço
ELU	Estado limite de utilização
MEF	Método dos elementos finitos
NP	Norma Portuguesa

Lista de Variáveis

Símbolos latinos maiúsculos

A_s	Área de amadura longitudinal de flexão
A_{ct}	Área de betão tracionado
A_s^{min}	Área de amadura mínima de flexão
D_f	Rigidez de flexão de uma laje
E_c	Módulo de elasticidade do betão
E_s	Módulo de elasticidade do aço
K	Rigidez do sistema
K_t	Produto dos coeficientes k_0 e k_t
L	Vão da estrutura
M_{cr}	Momento de fendilhação
M_{Rd}	Momento fletor resistente
M_{sd}	Momento fletor atuante da laje
M_{rr}	Momento fletor na direção radial
M_{re}	Momento torsor
$M_{\theta\theta}$	Momento fletor na direção circunferencial
Q_r	Esforço transverso na direção radial
Q_θ	Esforço transverso na direção circunferencial
$Q(t)$	Ação harmónica de excitação
\bar{Q}	Amplitude da força de excitação
W_c	Módulo de flexão de uma secção retangular

Símbolos latinos minúsculos

a_0	Deformação a curto prazo
a_c	Flecha elástica
a_t	Deformação a longo prazo
b	Largura da secção útil
c	Amortecimento do sistema
d	Altura da secção útil
f_0	Frequência fundamental do sistema
f_{cd}	Resistência de dimensionamento do betão à compressão
f_{ck}	Resistência característica do betão à compressão
$f_{ck0.05}$	Valor característico da tensão de rotura à tração do betão, com uma probabilidade de excedência de 5%
f_{ctm}	Resistência média do betão à tração
$f_{ct,ef}$	Valor médio efetivo da resistência de tração
f_{syd}	Valor de cálculo da tensão de cedência do aço
f_{yk}	Valor característico da tensão de cedência do aço
h	Altura da secção
k_0	Coefficiente que entra em consideração com o efeito das armaduras e da fendilhação
k_c	Coefficiente que tem em conta quer a forma da distribuição de tensões na secção, imediatamente antes da fendilhação, quer a alteração do braço da força
k_r	Coefficiente que considera o efeito de tensões auto-equilibradas não uniformes
k_t	Coefficiente que entra em consideração com o efeito das armaduras, da fendilhação e da fluência
m	Massa do sistema
q	Carga por unidade de comprimento
\dot{w}	Derivada do deslocamento em ordem ao tempo
\ddot{w}	Segunda derivada do deslocamento em ordem ao tempo
r	Raio da estrutura
t	Variável tempo
w	Deslocamento
w_{adm}	Largura de fenda admissível
w_{max}	Largura de fenda máxima
w_k	Largura de fenda característica
$w(t)$	Deslocamento em função do tempo
z	Coordenada de um ponto infinitesimal

Símbolos gregos

β_1	Coeficiente de amplificação dinâmica
γ_G	Coeficiente parcial de segurança para ações permanentes
γ_q	Coeficiente parcial de segurança para ações variáveis
$\varepsilon_{rr} , \varepsilon_{\theta\theta}$	Curvaturas de flexão
$\varepsilon_{r\theta}$	Curvatura de torção
η	Coeficiente de tem em consideração a armadura de compressão
θ	Ângulo
μ	Momento fletor reduzido
ν	Coeficiente de Poisson
ξ	Coeficiente de amortecimento
π	Pi
ρ	Porcentagem média de armadura longitudinal
σ_s	Nível de tensão máximo no aço
φ	Coeficiente de fluência
ϕ_s	Diâmetro modificado máximo dos varões
ϕ^*	Diâmetro máximo dos varões
ψ	Fator de combinação
ω	Porcentagem mecânica de armadura

1. INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento

Com a evolução da ciência e da engenharia, foram surgindo ao longo dos anos estruturas cada vez mais impressionantes no que diz respeito funcionamento estrutural. Um exemplo são as estruturas tipo das que se estudam nesta dissertação, que apresentam forma circular no seu plano horizontal e têm particular interesse pelo seu distinto comportamento estrutural. Este tipo de soluções necessita apenas de um alinhamento de apoios simples ao longo de um dos seus bordos para garantir o equilíbrio. O projetista pode, portanto, tirar partido da sua geometria e suspendê-la apenas ao longo de um dos bordos como se ilustra na figura 1.

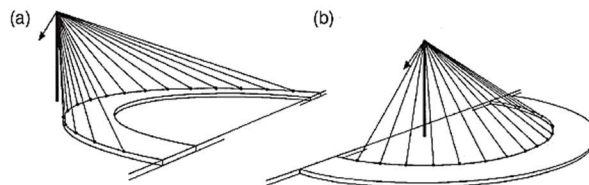


Figura 1 – Suspensão de um tabuleiro curvo: (a) pelo exterior (b) pelo interior (Retirado de Strasky).

A primeira obra deste tipo a ser construída foi concebida e projetada por Schlaich para um concurso para a construção de uma passerelle que possibilitasse a travessia de peões entre as margens do canal na cidade de Kelheim na Alemanha. A obra acabou por ser concluída em 1987, crendo-se ter sido esta a primeira estrutura deste tipo a ser realizada. Na sequência desta obra e com base no mesmo princípio estrutural foram criadas verdadeiras obras de arte com geometrias cada vez mais impressionantes, como é o caso da ponte pedonal de Gahlensche Straße na Alemanha, ilustrada na figura 2.



Figura 2 - Ponte pedonal de Gahlensche Straße (retirado de Idelberger 2011).

A proposta para o estudo deste tipo de soluções nasceu na sequência da realização da escadaria do hall de entrada do hotel Savoy Palace na Madeira, ilustrada na figura 3.



Figura 3 - Hall de entrada do hotel Savoy Palace na Madeira (JSJ).

A escadaria foi projetada pela empresa JSJ que decidiu dar apoio ao desenvolvimento desta solução perante os desafios arquitetónicos que se colocavam.

Pretende-se com este estudo mostrar como a forma e funcionalidade das estruturas podem e devem estar relacionadas, resultando em estruturas simples e harmoniosas, sem um custo associado demasiado elevado.

1.2 Motivação e objetivos

O intuito deste trabalho é estudar o comportamento de estruturas curvas apoiadas pelo intradorso ou pelo extradorso. O primeiro objetivo é investigar as distribuições de esforços que conduzem a soluções equilibradas neste tipo de estruturas.

Depois de clarificada esta questão, pretende-se analisar um caso de estudo prático, de modo a perceber ordens de grandeza relativamente às principais grandezas associadas às verificações de segurança, esforços e deslocamentos.

Posteriormente pretende-se efetuar uma análise paramétrica, variando alguns parâmetros geométricos por forma a perceber a influência de cada um no comportamento estrutural e no consequente dimensionamento. Um dos objetivos deste estudo paramétrico é definir intervalos de aplicabilidade prática para este tipo de soluções, salientando-se em que situações a sua conceção é viável.

Pretende-se retirar conclusões acerca das vantagens e desvantagens na adoção de estruturas curvas apoiadas ao longo do intradorso ou extradorso, e perceber a viabilidade da sua aplicação.

Quer-se, ainda, analisar o comportamento estrutural de uma estrutura com geometria em “S”, de modo a entender as vantagens e desvantagem relativamente à geometria anteriormente analisada.

1.3 Organização do texto

A presente dissertação divide-se em seis capítulos. Ao longo do capítulo 1 faz-se um enquadramento geral onde se apresentam as motivações que conduziram ao seu estudo, assim como os principais objetivos que se esperam alcançar.

No início do capítulo 2 apresentam-se as equações gerais do problema que descrevem o equilíbrio de um elemento estrutural com desenvolvimento circular, conceitos que são importantes para entender o conseqüente desenvolvimento da dissertação. Uma vez que se pretende analisar a verificação em relação aos estados limites de serviço e último, enunciam-se, ainda neste capítulo, os conceitos necessários à verificação de segurança à limitação da abertura de fendas, deformação, vibração e à rotura por flexão.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo do problema prático que motivou o tema desta dissertação. Ao longo deste capítulo, descrevem-se os modelos de cálculo que foram desenvolvidos, as propriedades físicas e mecânicas dos materiais utilizados e as ações consideradas. Posteriormente é então analisada a verificação da segurança em relação aos estados limites descritos no capítulo 2.

Com o intuito de desenvolver o âmbito da análise deste tema, é feita ao longo do capítulo 4 um estudo paramétrico. Fazem-se variar alguns parâmetros geométricos que se consideram ser importantes no dimensionamento de uma estrutura deste tipo, e analisa-se a influência de cada um no comportamento estrutural.

No capítulo 5, analisa-se o comportamento de uma solução com geometria em “S” com diferentes tipos de apoios, e comparam-se os resultados com os obtidos nos capítulos 3 e 4.

Por fim, no capítulo 6, apresentam-se as principais conclusões obtidas relativamente a cada capítulo estudado e descrevem-se algumas propostas que se consideram interessantes de modo a dar continuidade à clarificação sobre as potencialidades da implementação deste tipo de solução.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Flexão simétrica de lajes circulares

2.1.1 Enquadramento

Na análise do comportamento de uma estrutura, é necessário satisfazer três condições fundamentais: o equilíbrio, a compatibilidade e as relações constitutivas dos materiais.

Na figura 4 representam-se esquematicamente as relações a satisfazer, **admitindo um comportamento elástico**, assim como as quantidades que as relacionam.

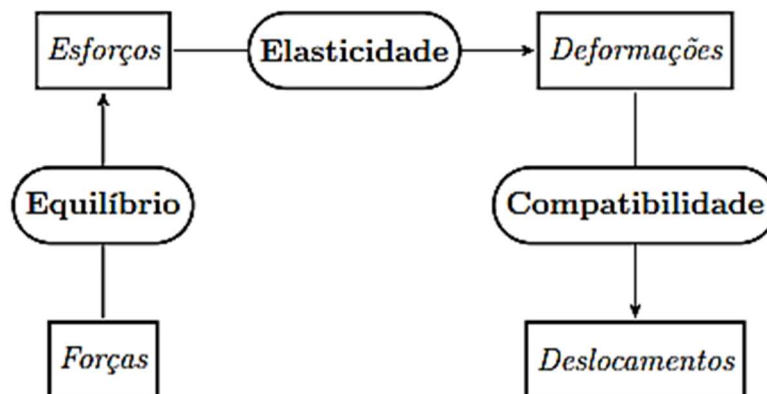


Figura 4 – Relações a satisfazer e grandezas que as relacionam. (Freitas, et al., 2018)

As grandezas estáticas, esforços e cargas aplicadas, relacionam-se tendo em conta as condições de equilíbrio da estrutura. As grandezas cinemáticas, deslocamentos e deformações, devem respeitar as condições de compatibilidade. Por fim, a relação entre esforços e curvaturas, é feita através das relações constitutivas, neste caso as da elasticidade.

No problema em questão, estuda-se o caso de uma laje com geometria anelar apoiada pelo seu bordo interior ou exterior. Ao longo deste sub-capítulo, serão estabelecidas as equações que definem este problema.

2.1.2 Condições de equilíbrio

Como anteriormente referido, as condições de equilíbrio relacionam o campo de esforços com a carga aplicada. Estas podem ser determinadas, estabelecendo o equilíbrio de um elemento infinitesimal da laje como se encontra representado na figura 5, submetido a cargas verticais uniformemente distribuídas (q).

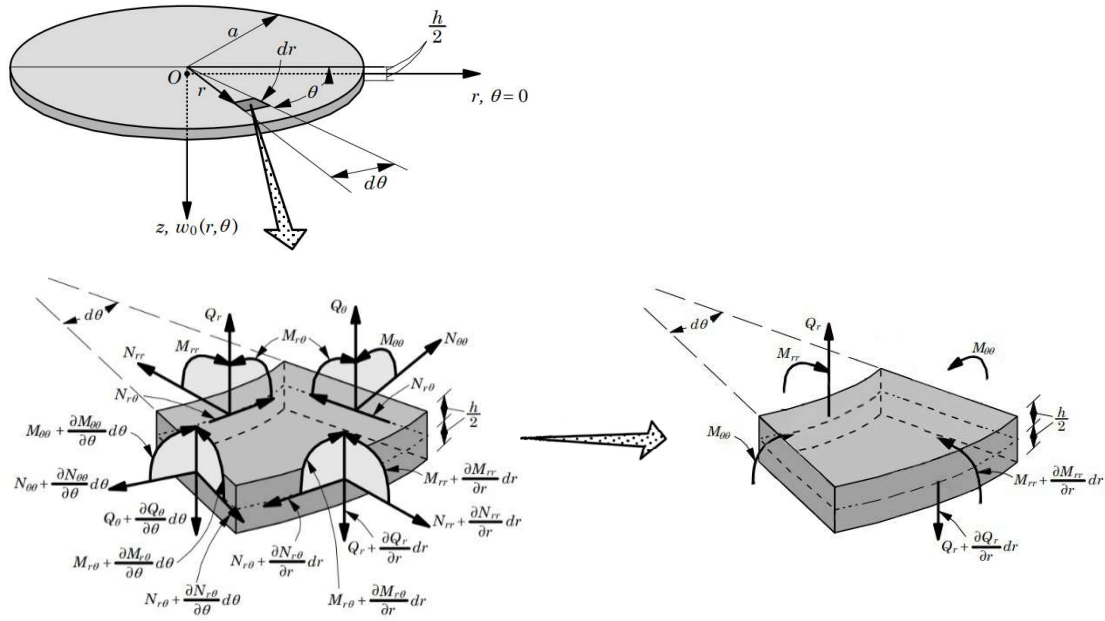


Figura 5 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal (adaptado de Reddy 2006).

Devido à axissimetria do problema, verifica-se que as variáveis em causa não dependem do ângulo ao centro e não existem momentos torsões associados, $M_{r\theta}$, e que atendendo ao tipo de cargas aplicadas na estrutura, não há esforços de membrana. Desta forma, existem algumas variáveis que serão nulas, e com isso, o equilíbrio de um elemento infinitesimal reduz-se às variáveis representadas no esquema mais à direita da figura 5.

De seguida e com base nos pressupostos anteriormente definidos, estabelece-se as equações do equilíbrio do elemento infinitesimal.

Realizando o somatório de forças na direção vertical, $\sum F_z = 0$, obtém-se a seguinte equação (Reddy, 2006):

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Leftrightarrow (Q_r + dQ_r)r + (r + dr)d\theta - Q_r r d\theta + q r dr d\theta = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dr}(Q_r r) + q r = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Obtém-se ainda, pelo somatório de momentos fletores, $\sum M_\theta = 0$, na direção perpendicular a r , a seguinte relação (Reddy, 2006):

$$\begin{aligned} M_{rr} r d\theta - (M_{\theta\theta} + dM_{rr})(r + dr)d\theta + M_{\theta\theta} dr \frac{d\theta}{2} + M_{\theta\theta} dr \frac{d\theta}{2} + Q_r r d\theta dr - q r dr d\theta \frac{dr}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_r r = \frac{d}{dr}(M_{rr} r) - M_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1), o equilíbrio pode ser descrito da seguinte forma:

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr}(r M_{rr}) - M_{\theta\theta} \right) + q r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \frac{d^2 M_{rr}}{dr^2} + 2 \frac{dM_{rr}}{dr} - \frac{dM_{\theta\theta}}{dr} + qr = 0 \quad (2.3)$$

2.1.3 Relações constitutivas

Os campos de momentos podem ser expressos em termos do campo de curvaturas caso se conheça o comportamento do material constituinte da laje. Assumido um comportamento elástico linear do material, as relações entre esforços e curvaturas são também lineares e dependem do coeficiente de Poisson, ν , do módulo de elasticidade, E , e da espessura da laje, h . Assim sendo, as relações constitutivas podem ser escritas da seguinte forma: (Leitão, et al., 2018)

$$\begin{bmatrix} M_{rr} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{rr} \\ \chi_{\theta\theta} \\ \chi_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.1.4 Condições de compatibilidade

As relações de compatibilidade relacionam o campo de curvaturas com o campo de deslocamentos. Para caracterizar o comportamento de uma laje, são necessárias duas curvaturas de flexão χ_{rr} e $\chi_{\theta\theta}$, e uma de torção, $\chi_{r\theta}$. No entanto como anteriormente referido, devido à axissimetria do problema, não existe torção e, portanto, o comportamento é definido pelas curvaturas de flexão. Assumindo a hipótese de Kirchhoff, estas podem ser escritas da seguinte forma: (Timoshenko, et al., 1959)

$$\begin{cases} \chi_{rr} = -\frac{dw_0^2}{dr^2} \\ \chi_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \\ \chi_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.5 Equação governativa

Substituindo as Eq. (2.5) em (2.4) obtêm-se as seguintes expressões para os momentos fletores:

$$M_{rr} = -D_f \left(\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_0}{dr} \right) \quad (2.6)$$

$$M_{\theta\theta} = -D_f \left(\frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} + \nu \frac{d^2 w_0}{dr^2} \right) \quad (2.7)$$

Substituindo as Eq. (2.6) e (2.7) em (2.2) obtêm-se a seguinte equação para o esforço transversal:

$$Q_r = -D_f \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) \right] \quad (2.8)$$

sendo D_f a rigidez de flexão da laje dada por: (Leitão, et al., 2018)

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.9)$$

Substituindo a Eq.(2.8) na Eq. de equilíbrio (2.3), obtém-se a equação governativa do problema, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{D_f}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) \right] \right\} = 0 \quad (2.10)$$

2.1.6 Condições de fronteira

No caso de uma laje com geometria anelar, exemplo ilustrado na figura 6, a colocação dos apoios pode ser efetuada pelo seu intradorso ou pelo extradorso. Assim sendo, é interessante efetuar o estudo para os dois casos possíveis.

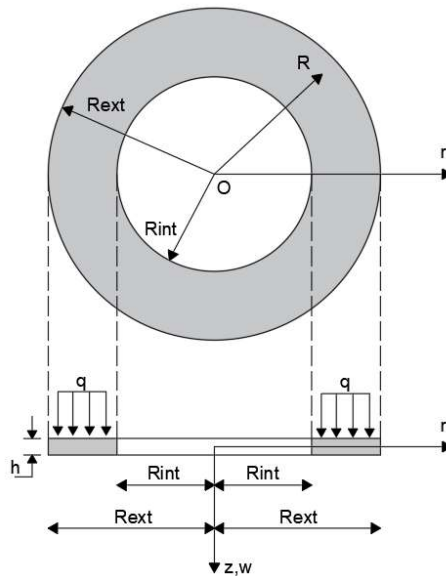


Figura 6 - Parametrização do problema.

A diferença entre os dois casos resulta na definição das condições de fronteira, pelo que se descreve na tabela 1 as condições para cada caso. Note-se que para além das condições descritas na tabela 1, os momentos radiais são também nulos em ambos os bordos e nas duas soluções, $M_{rr} = 0$.

Tabela 1 – Condições de fronteira.

	Apoio pelo exterior	Apoio pelo interior
$r = R_{int}$	$Q_r = 0$	$w_0 = 0$
$r = R_{ext}$	$w_0 = 0$	$Q_r = 0$

2.1.7 Campos de deslocamentos

Uma vez definidas as variáveis do problema, e recorrendo ao programa de cálculo simbólico, Wolfram Mathematica (Wolfram Research, 2018), é possível obter o campo de deslocamentos.

O campo de deslocamentos é obtido através da integração da equação de 4ª ordem (2.10), tendo-se obtido a seguinte expressão para a estrutura interiormente apoiada.

- **Laje simplesmente apoiada pelo intradorso**

$$\begin{aligned}
 w_0(r) = \frac{1}{64Df(\nu^2 - 1)(R_{ext} - R_{int})(R_{ext} + R_{int})} q & \left((\nu - 1)(r - R_{ext})(r + R_{ext})(R_{ext} \right. \\
 & - R_{int})(R_{ext} + R_{int}) \left((\nu + 1)r^2 - (\nu + 5)R_{ext}^2 + 2(\nu + 3)R_{int}^2 \right) \\
 & - 4(\nu \\
 & + 1)R_{int}^2 \left(R_{ext}^2 \log(R_{ext}) (-2(\nu - 1)r^2 + (\nu + 3)R_{ext}^2 \right. \\
 & - 4(\nu + 1)R_{int}^2 \log(R_{ext}) + (\nu - 5)R_{int}^2) \\
 & + \log(r) \left(4(\nu + 1)R_{ext}^2 R_{int}^2 (\log(R_{ext}) - \log(R_{int})) \right. \\
 & - (R_{ext} - R_{int})(R_{ext} + R_{int}) \left((\nu + 3)R_{ext}^2 - 2(\nu - 1)r^2 \right) \left. \right) \\
 & \left. \left. \left. + 2R_{int}^2 \log(R_{int}) \left((\nu - 1)(r - R_{ext})(r + R_{ext}) + 2(\nu + 1)R_{ext}^2 \log(R_{ext}) \right) \right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Verifica-se, pela análise da equação (2.11), que os deslocamentos são dependentes não só da altura da secção e do vão, como seria de esperar, mas também do raio da estrutura.

O resultado obtido para a laje simplesmente apoiada ao longo do extradorso encontra-se descrita no anexo A.

De modo a perceber a variação dos deslocamentos ao longo do raio traçou-se graficamente a expressão (2.11), para duas soluções possíveis distintas. Os gráficos obtidos encontram-se ilustrados na figura 7, tendo-se assumido os seguintes parâmetros para cada solução:

- $h = 0,4 \text{ m}$
- $E = 33 \text{ GPa}$
- $\nu = 0,20$
- $q = 3 \times 1,5 + 1,35 \times (1 + 25 \times 0,4) = 19,35 \text{ kN/m}^2$
- **Caso 1**
 - $R_{int} = 3,5 \text{ m}$
 - $R_{ext} = 6,5 \text{ m}$
- **Caso 2**
 - $R_{int} = 0,05 \text{ m}$
 - $R_{ext} = 3,05 \text{ m}$

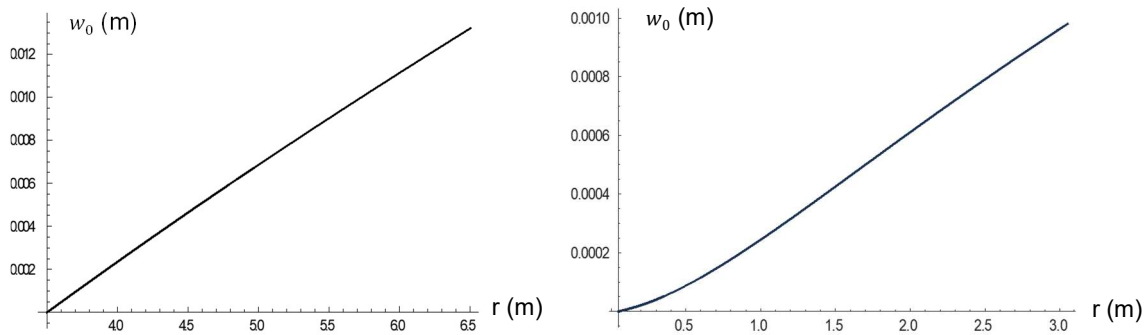


Figura 7 – Deformada teórica do caso 1 (esq.) e caso 2 (dir.).

Como anteriormente referido as soluções obtidas são referentes a dois casos distintos, onde se fez variar o raio exterior e interior mantendo-se inalterada a diferença $R_{ext} - R_{int}$.

Pela análise dos gráficos anteriores, observa-se que ao reduzir a abertura da laje, verificou-se uma redução no valor do deslocamento máximo e uma redução da rotação na zona do bordo interior. Para que se entenda o motivo desta variação, analise-se o limite da expressão da rotação para o caso em estudo, podendo este ser avaliado da seguinte forma:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{qr(-R_{ext}^2(-1 + \nu) + r^2(1 + \nu) + 4R_{ext}^2(1 + \nu)(-\text{Log}[r] + \text{Log}[R_{ext}]))}{16Df(1 + \nu)} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Desta forma, rapidamente se verifica que a deformada apresentará uma rotação menor junto ao bordo interior quanto menor for o raio interior da estrutura, tendendo no limite para zero e apresentando nesse caso tangente nula. O mesmo raciocínio pode ser realizado para o caso de uma estrutura exteriormente apoiada, conduzindo a conclusões semelhantes.

Conclui-se, portanto, que **o raio interior**, geometricamente associado à abertura central da laje, **tem uma importante influência na deformada da estrutura assim como nos valores dos deslocamentos**.

Timoshenko, et al., na sua obra “Theory of plates and shells”, apresentam de forma genérica a deformada de uma estrutura deste tipo, ver figura 8.



Figura 8 - Esquema de uma laje simplesmente apoiada pelo intradorso (esq.) e extradorso (dir.) (retirado de Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959).

Da mesma obra é possível retirar uma expressão onde se pode avaliar o deslocamento máximo para o tipo de estruturas em questão, sendo esta dada por:

$$w_{max} = k_1 \frac{qR_{ext}^4}{Eh^3} \quad (2.13)$$

onde:

k_1 - Coeficiente que depende do tipo de condições de apoio e da razão $\frac{R_{ext}}{R_{int}}$, que pode ser obtido na tabela 2.;

q – Carga aplicada uniformemente distribuída;

R_{ext} – Raio exterior;

E – Módulo de elasticidade do material;

h - Altura da laje.

Tabela 2 - Coeficientes k_1 para os casos estudados (Timoshenko, et al., 1959).

	$\frac{R_{ext}}{R_{int}} =$	1,25	1,50	2	3	4	5
Caso	Intradorso	0,202	0,491	0,902	1,220	1,300	1,310
	Extradorso	0,184	0,414	0,664	0,824	0,830	0,813

Ora esta expressão tem grande utilidade na medida em que, de uma forma expedita permite obter um valor bastante aproximado do deslocamento máximo expectável na estrutura. Por conseguinte, e de modo a validar esta expressão, compara-se o valor máximo obtido no gráfico ilustrado na figura 7 (esq) com este.

O cálculo do deslocamento máximo pode ser verificado de seguida:

$$w_{max} = 0,735 \frac{19,35 \cdot 6,5^4}{33 \cdot 10^6 \cdot 0,40^3} = 0,012 \text{ m}$$

Como se pode mostrar o valor obtido é bastante semelhante do representado no gráfico ilustrado na figura 7 (esq), pelo que se confirma a validade da expressão.

Outra análise possível com valores apresentados por Timoshenko é que os coeficientes para a estrutura apoiada pelo extradorso são inferiores, pelo que como o deslocamento é diretamente proporcional a estes, esperam-se deslocamentos máximos inferiores. Com isto conclui-se que a estrutura apoiada pelo exterior será mais rígida.

De seguida na figura 9 apresentam-se os diagramas de momentos fletores radiais e circunferenciais relativos ao caso 1.

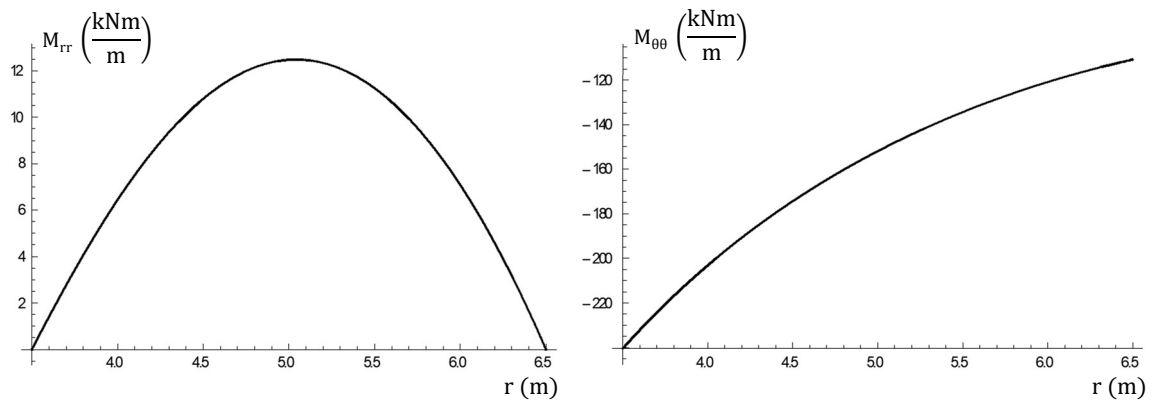


Figura 9 - Momento fletor radial (esq.) e circunferencial (dir.) relativo ao caso1.

Analisando os momentos segundo a direção radial verifica-se que estes são positivos ao longo do raio e nulos na zona do apoio e do bordo livre, como consequência das condições de fronteira estáticas.

Os momentos na direção circunferencial são negativos em toda a laje apresentando um valor máximo na zona do bordo interior.

Comparando os momentos em ambas as direções verifica-se que os momentos na direção circunferencial apresentam valores em muito superiores aos da direção radial.

Interessa referir que os deslocamentos assim como os respetivos diagramas de momentos serão analisados mais em pormenor ao longo do capítulo 3, para um caso de estudo prático.

O código utilizado assim como, todos gráficos relativos à solução exata para esta estrutura interiormente apoiada, assim como para o caso de apoio exterior, encontram-se no Anexo A.

2.2 Método estático

Os resultados obtidos no ponto anterior, são baseados numa análise elástica linear. Por outro lado, e mais especificamente no dimensionamento de estruturas de betão, é possível recorrer a uma **análise baseada só no equilíbrio**, ou seja, no método estático da teoria da plasticidade.

Esta análise pode ser utilizada no dimensionamento das armaduras de flexão, sempre que seja garantida ductilidade no comportamento da peça, verificando se a posição da linha neutra no ELU é tal que: $\frac{x}{d} \leq 0.25$ (Câmara, et al., 2016).

O dimensionamento, recorrendo à **teoria da plasticidade** pode ser efetuado de duas formas distintas:

- **Método cinemático:** O valor da carga última é obtido impondo as condições de compatibilidade, obtendo-se consequentemente um **majorante da carga de rotura**;
- **Método estático:** O valor da carga última é obtido impondo as condições de equilíbrio obtendo-se consequentemente um **minorante da carga de rotura**.

Com a utilização do método estático é possível obter um minorante da carga de rotura estando-se desta forma do lado da segurança em relação à carga última de rotura, facto que não sucede com a utilização do método cinemático. Ilustra-se este conceito com a figura 10, onde se comparam os dois métodos, relativamente à carga última de rotura. (Câmara, et al., 2016)

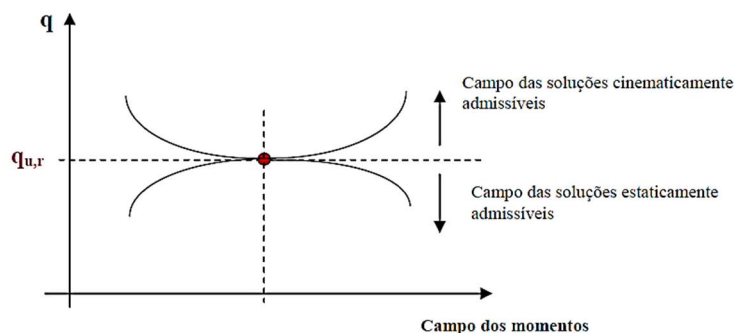


Figura 10- Método estático vs método cinemático. (Câmara, et al., 2016)

Como é sabido, para que uma dada distribuição de esforços seja equilibrada é necessário que tanto as condições de equilíbrio no domínio (2.3) como as condições de fronteira estáticas (tabela 1) sejam satisfeitas. (Freitas, et al., 2018)

Desta forma, é possível obter diversas soluções possíveis para o campo de momentos e estaticamente admissíveis, desde que respeitem as condições referidas. Soluções equilibradas podem ser obtidas, e.g., prescrevendo uma dada componente do tensor de momentos e resolvendo a equação de equilíbrio para a componente remanescente.

No seguimento do que foi afirmado anteriormente e com o intuito de obter uma solução equilibrada, imponha-se na equação (2.3) que os momentos radiais, M_{rr} , são nulos. Desta forma obtém-se:

$$\frac{dM_{\theta\theta}}{dr} = qr \quad (2.14)$$

Integrando ambos os membros da equação anterior e impondo, $Q_r|_{R_{ext}} = 0$, obtém-se a seguinte expressão para os momentos circunferenciais:

$$M_{\theta\theta} = \frac{q}{2}(r^2 - R_{ext}^2) \quad (2.15)$$

Obtida a equação que traduz o campo de momentos, de uma solução equilibrada, importa agora compará-la com a solução exata (**relativa a uma análise elástica linear**), pelo que se traçam ambas as equações no gráfico da figura 11, para os parâmetros associados ao caso 1 definidos na subsecção anterior.

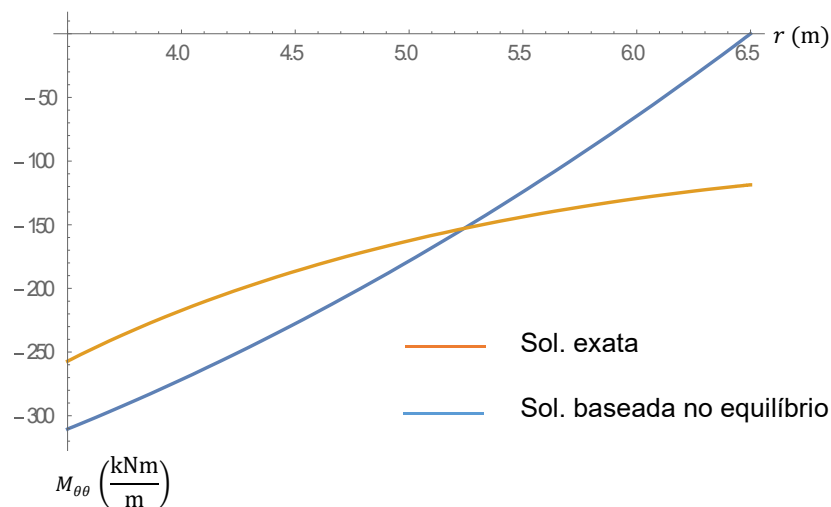


Figura 11 – Comparação dos momentos circunferenciais da solução só estaticamente admissível com os da solução exata.

Antes de mais refira-se que ambas as equações traçadas conduzem a soluções equilibradas, podendo desta forma ser usadas no dimensionamento de uma estrutura.

Ambas as soluções apresentam valores negativos para os momentos, como seria esperado. Verifica-se ainda que valores máximos apresentam uma diferença de 50 kNm/m no entanto, no bordo exterior esta diferença já é cerca de 125 kNm/m.

De modo a entender se as quantidades de armadura envolvidas são semelhantes, fez-se o integral entre o raio interior e o raio exterior de ambas as curvas. Os cálculos efetuados revelaram que a área por baixo das curvas é exatamente a mesma nas duas soluções (512,226 kNm). Os cálculos relativos aos valores obtidos estão descritos no Anexo A, pelo que se aconselha a sua consulta.

Revela-se desta forma que na direção circunferencial esta solução é semelhante à exata em termos de quantidades de armadura, no entanto não esquecer que a solução exata necessita ainda que se equilibrem os momentos na direção radial, o que não é o caso na solução estaticamente admissível pois assumiram-se que estes eram nulos.

Analogamente ao anteriormente descrito, é também possível obter um campo de deslocamento estaticamente admissível, impondo agora como zero os momentos circunferenciais.

Desta forma, da equação (2.3) vem:

$$r \frac{d^2 M_{rr}}{dr^2} + 2 \frac{dM_{rr}}{dr} = -qr \quad (2.16)$$

Realizando a integração de ambos os termos e impondo as condições de fronteira estáticas, obtém-se a equação dos momentos, sendo esta dada por:

$$M_{rr} = \frac{1}{6r} (-qr^3 + qrR_{ext}^2 + qrR_{ext}R_{int} - qR_{ext}^2R_{int} + qrR_{int}^2 - qR_{ext}R_{int}^2) \quad (2.17)$$

Obtido o campo de momentos para uma solução estaticamente admissível compara-se na figura 12, o diagrama de momentos desta com a solução exata.

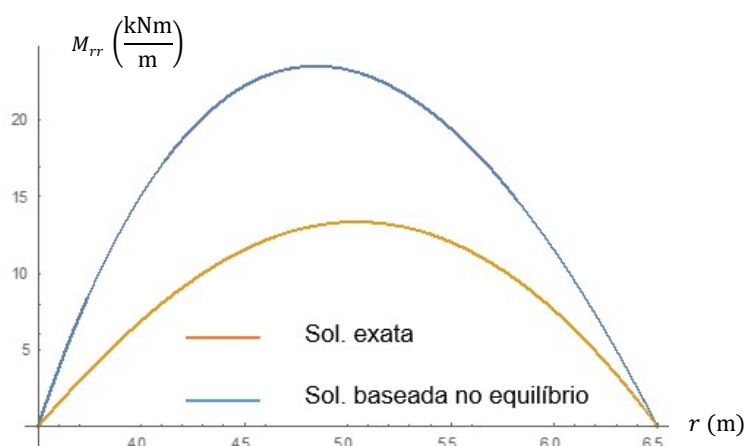


Figura 12 - Comparação dos momentos radiais da solução só estaticamente admissível com a solução exata.

Antes de mais, verifica-se ser possível obter uma solução equilibrada só com recurso aos momentos radiais, o que poderia não ser intuitivo. O diagrama de momentos radiais entre esta solução equilibrada e a solução exata não é muito distinto. Verificou-se apenas um aumento do pico máximo de momentos e uma ligeira alteração no andamento dos momentos ao longo do raio.

Esta solução permite equilibrar a estrutura com recurso a quantidades de armadura muito mais reduzidas do que as da solução exata, uma vez que os momentos nesta direção são reduzidos e os momentos na direção circunferencial são nulos.

É no entanto necessário alertar, que apesar da solução ser estaticamente equilibrada, esta afasta-se muito da solução exata, pois os momentos com mais expressão são aqui nulos. O facto de não se respeitar a compatibilidade e as relações constitutivas elásticas lineares fará com que, caso se dimensione a estrutura somente com base nos momentos radiais, esta apresentará graves problemas em serviço (deslocamentos elevados, fendilhação excessiva, entre outros), tanto mais quanto mais distinto for o campo de momentos obtido relativamente ao exato.

Conclui-se portanto que é aceitável dimensionar uma estrutura deste tipo admitindo que os momentos radiais são nulos. No entanto, não é prudente dimensionar admitindo que os momentos circunferenciais assim o são, uma vez que tal não garantirá a qualidade da estrutura em serviço.

2.3 Estado limite último

A verificação de segurança relativa aos estados limites últimos tem por fundamento garantir um nível adequado de segurança, relativamente a determinadas situações de rotura. A capacidade máxima resistente pode atingir-se localmente, numa determinada peça, (Câmara, et al., 2016) por:

- Tração ou compressão;
- Flexão;
- Esforço transversal;
- Torção;
- Zonas particulares de apoios;

Existe ainda a possibilidade de a rotura ocorrer por perda do equilíbrio global da estrutura, como é o caso dos seguintes modos (Câmara, et al., 2016):

- Deslizamento;
- Derrubamento.

É então fundamental que no dimensionamento de estruturas seja verificada, com um grau de confiança elevado, a segurança relativamente aos modos acima descritos, garantindo, mais especificamente, uma probabilidade de rotura de 1×10^{-5} . Simplificadamente, este nível de segurança é obtido, majorando as ações e minorando as resistências dos materiais, através da introdução de coeficientes de segurança.

Na presente dissertação a análise em relação ao estado limite último assenta, exclusivamente, sobre a rotura à flexão, pelo que se resume seguidamente alguns aspetos desse comportamento (Câmara, et al., 2016).

2.3.1 Dimensionamento à flexão simples

A verificação da segurança ao estado limite de flexão simples consiste em averiguar se a capacidade resistente das diferentes seções de uma peça é superior à distribuição considerada dos esforços atuantes. No cálculo da capacidade resistente de uma secção, e relativamente às zonas tracionadas, admite-se que a resistência do betão à tração é desprezável, pelo que se considera unicamente a das armaduras. (Appleton, 2013)

A verificação da segurança pode ser feita com base no cálculo dos parâmetros adimensionais, μ e ω , sendo eles denominados por momento fletor reduzido e percentagem mecânica de armadura, respetivamente. Assim tem-se:

$$\mu = \frac{M_{sd}}{bd^2f_{cd}} \quad (2.18)$$

$$\omega = \frac{1 - \sqrt{1 - 2,42\mu}}{1,21} \quad (2.19)$$

$$A_s = \omega bd \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.20)$$

Como é sabido, é importante que em caso de rotura, esta seja dúctil, ou seja, é necessário garantir que a estrutura tenha capacidade de deformação plástica antes da rotura. Deste modo, no dimensionamento de estruturas de betão armado Deve-se ter em atenção o nível de esforços atuantes numa secção, assim como o seu potencial de ductilidade. Esta análise pode ser efetuada indiretamente através do valor do parâmetro adimensional, μ , ou, mais especificamente, por $k=x/d$. Verifica-se que, em lajes, um adequado dimensionamento está associado a valores de **momento fletor reduzido** que não serão superiores a um **valor da ordem de 0,12 a 0,15** (Câmara, et al., 2016).

2.4 Estados limite de utilização

A verificação de segurança aos estados limites de utilização têm como objetivo garantir um adequado comportamento da estrutura em serviço. Enquanto na verificação ao estado limite último são adotadas ações majoradas com probabilidade de ocorrência reduzida, aqui são adotadas ações com probabilidade de ocorrerem com maior frequência durante a vida da estrutura. Relativamente aos valores característicos dos materiais são adotados valores médios e não valores minorados como sucede na verificação ao estado limite último. (Câmara, et al., 2016)

As verificações de segurança em relação a este estado, que se enquadram no âmbito desta dissertação são as seguintes:

- Estado limite de abertura de fendas;
- Estado limite de deformação;
- Estado limite de vibração.

Deste modo, resumem-se nos pontos seguintes os vários estados e de que forma a sua verificação é assegurada.

2.4.1 Estado limite de fendilhação

Como é conhecido ocorre naturalmente fendilhação no betão armado, sendo esta praticamente inevitável, pelo que é necessário adotar medidas de modo a que a abertura de fendas seja controlada. A fendilhação nas estruturas de betão pode ser causada pelo efeito de cargas aplicadas ou deformações impostas, sendo estas últimas, em geral, as mais críticas para o comportamento estrutural (Appleton, 2013).

Verifica-se que a fendilhação ocorre quando a máxima tração supera a capacidade resistente do betão à tração, o que se verifica na flexão simples da seguinte forma:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{cr}}{W_c} \leq f_{ct} \quad (2.21)$$

onde W_c corresponde ao módulo de flexão da seção.

Para uma seção retangular, o momento de fendilhação pode ser simplificada obtido por:

$$M_{cr} = \frac{bh^2}{6} f_{ct} \quad (2.22)$$

As fendas ocorrem perpendicularmente à orientação das tensões de tração principais, como se ilustra na figura 13, sendo que, posteriormente a sua propagação dependerá também da pormenorização das armaduras.

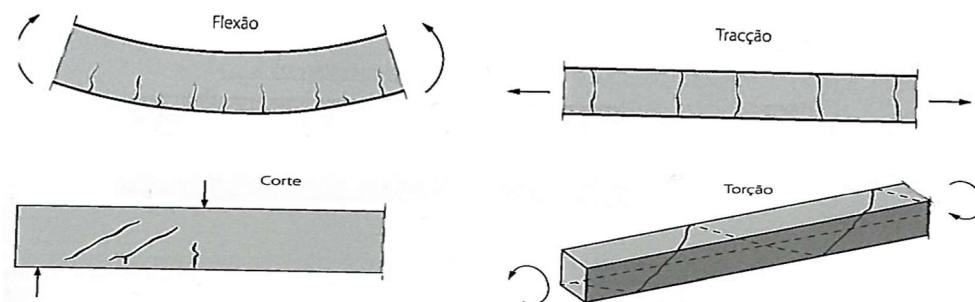


Figura 13 - Tipos de fendilhação provocados por diferentes tipos de esforços (Appleton, 2013).

Por outro lado, devido a deformações impostas impedidas ou pelo menos restringidas (variações de temperatura ou retração do betão) o risco de formação de fendas com maiores aberturas é superior.

Portanto, e de acordo com cada situação, há que garantir a limitação da abertura das fendas a um nível esteticamente aceitável e sem pôr em risco a durabilidade estrutural.

2.4.1.1 Valores admissíveis de abertura de fendas

A necessidade de garantir uma boa qualidade estética assim como uma adequada durabilidade da estrutura leva a que seja necessário um controlo da abertura de fendas no betão estrutural. Deste modo, deve ser definido um valor limite da abertura de fendas, tal que:

$$w_{max} \leq w_{admissivel} \quad (2.23)$$

Caso não sejam necessários requisitos específicos de estanquidade, a NP EN 1992-3 estabelece os seguintes valores limites para abertura de fendas, definidos na tabela 3, em função da classe de exposição.

Tabela 3 - Valores recomendados de w_{\max} .

Classe de exposição	Valores recomendados de w_{\max} [mm]
X0, XC1	0,4
XC2, XC3, XC4 XD1, XD2, XS1, XS2, XS3	0,3

O limite menos exigente, referente às classes de exposição X0 e XC1, tem apenas o objetivo de garantir um aspeto aceitável do elemento. (Câmara, et al., 2016)

2.4.1.2 Armaduras mínimas

Entretanto devem definir-se quantidades mínimas de armadura, distribuídas em todas as zonas da estrutura passíveis de fendilharem, para que no caso de haver a formação de fendas, devido ao efeito das cargas ou por deformações impostas na estrutura, estas sejam controladas. (Câmara, et al., 2016)

A armadura mínima deve ser tal que, após a fendilhação do betão, garanta a não cedência da armadura desprezando o betão à tração. A EN-1992-1-1 define a seguinte expressão para o cálculo da quantidade de armadura à tração ou à flexão, devido a deformações impostas: (Appleton, 2013)

$$A_s = k_c k_r A_{ct} \frac{f_{ct,ef}}{\sigma_s} \quad (2.24)$$

onde:

A_{ct} – Área de betão tracionado;

σ_s – Nível de tensão máximo no aço que se pretende admitir, considerando-se para a armadura mínima o valor de f_{yk} ;

$f_{ct,ef}$ – Valor médio da resistência do betão à tração na idade em que se espera que ocorram as primeiras fendas;

k_r – Coeficiente que considera o efeito de tensões auto-equilibradas não uniformes que resulta de uma diminuição dos esforços de tração, cujo valor varia com a espessura (ou altura) do elemento, de acordo com a figura 14;

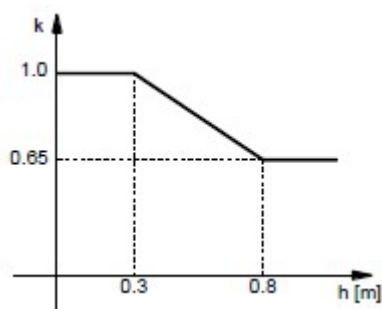


Figura 14 - variação do parâmetro k com a espessura do elemento.

k_c - é um coeficiente que tem em conta quer a forma da distribuição de tensões na secção, imediatamente antes da fendilhação, quer a alteração da altura útil. Sendo igual ao valor de 1,0 para tração simples e de 0,4 para flexão simples.

2.4.1.3 Controlo indireto de abertura de fendas

De acordo com o EC2 (EN-1992-1-1) é possível limitar a abertura de fendas aos valores anteriormente definidos, desde que se utilizem disposições e as quantidades mínimas de armaduras necessárias, e ainda que:

- Para fendilhação provocada por **deformações impostas**, se limitem o **diâmetro dos varões** utilizados em função da tensão na armadura no instante após a fendilhação de acordo com a tabela 4;
- Para fendilhação causada por **cargas aplicadas** se limitem também os diâmetros dos varões ou só o **espaçamento** entre estes de acordo com a tabela 5. (Câmara, et al., 2016)

Tabela 4 - Diâmetros máximos dos varões σ_s^* para controlo de fendilhação.

Tensão no aço [MPa]	Diâmetros máximos dos varões [mm]	
	$w_k = 0,4$ mm	$w_k = 0,3$ mm
160	40	32
200	32	25
240	20	16
280	16	12
320	12	10
360	10	8
400	8	6
450	6	5

Tabela 5 - Espaçamento máximo dos varões para controlo de fendilhação.

Tensão no aço [MPa]	Espaçamento máximo dos varões [mm]	
	$w_k = 0,4 \text{ mm}$	$w_k = 0,3 \text{ mm}$
160	300	300
200	300	250
240	250	200
280	200	150
320	150	100
260	100	50

O diâmetro máximo dos varões deverá ser alterado, para tração pura, como se indica pela seguinte expressão:

$$\phi_s = \phi_s^* \frac{f_{ct,ef}}{2,9} \frac{h}{8(h-d)} \quad (2.25)$$

onde:

ϕ_s – diâmetro modificado máximo dos varões;

ϕ_s^* – diâmetro máximo dos varões indicado na tabela 4;

h – altura total da secção;

d – altura útil ao centro de gravidade da camada exterior de armaduras.

2.4.2 Estado limite de deformação

Devido às solicitações a que as estruturas se encontram sujeitas, estas deformam-se, existindo a necessidade de controlar essa deformação por questões da funcionalidade, do aspeto e de controlo de danos em elementos não estruturais.

Em obras com elevados níveis de exigência, a aparência é uma questão relevante, uma vez que, deformações excessivas na estrutura podem incutir no utilizador um sentimento de insegurança. No entanto, a questão da aparência está relacionada com o enquadramento do local, pois as deformações serão mais perceptíveis se existirem linhas de referência que não estejam deformadas e/ou boas condições de luminosidade do local.

A questão da funcionalidade está relacionada com casos onde deformações excessivas da estrutura ponham em causa o seu propósito. Este problema verifica-se por vezes em sistemas de drenagem das coberturas dos edifícios, onde as flechas prejudicam ou inviabilizam a sua função.

Por último, mas não menos importante, existe a questão relativa ao controlo de danos em elementos não estruturais. Observa-se que, quando ocorrem deformações excessivas na estrutura, estas podem provocar danos em outros elementos não estruturais, como por exemplo fendas em alvenarias de fachada ou de interiores. (ISO 4356:1997)

2.4.2.1 Valores admissíveis de deformação

A definição dos valores limites de deformação admissível em estruturas não é absoluta, uma vez que, estes valores resultam em muito do que se tem observado ao longo dos anos em estruturas com bom e mau comportamento. (Câmara, et al., 2016)

Consequentemente os valores definidos para a deformação máxima admissível servirão como ordem de grandeza e não como limite absoluto, cabendo ao projetista avaliar cada situação isoladamente tendo como termo de comparação as indicações referidas. Para além do mais, os deslocamentos reais na estrutura a longo prazo poderão diferir dos estimados, devido a incertezas como as condições ambientais, condições de carga, rigidez dos apoios, entre outros. (EC2)

A NP EN 1992-1-1 define que, a **deformação total** não deverá ser superior ao limite **vão/250**, para uma combinação de ações quase-permanente. O documento sugere ainda que, o **incremento de deformação** após a construção da estrutura não deverá ser superior ao limite de **vão/500**, para uma combinação quase-permanente de ações. Este último limite pode ser adaptado consoante a sensibilidade dos elementos suportados.

Repare-se que os limites são definidos em função da dimensão do vão, limitando-se assim a inclinação da deformada da estrutura. (Câmara, et al., 2016)

O estado limite de deformação poderá ser verificado comparando a flecha calculada com os valores limites acima referidos.

2.4.2.2 Cálculo das deformações

Na avaliação da deformação em estruturas de betão armado deve ter-se em consideração os efeitos da fendilhação e os efeitos do comportamento diferido no tempo do betão. (Câmara, et al.)

O método dos coeficientes globais é um método expedito, que de forma simples permite estimar a flecha a longo prazo a partir da flecha determinada elasticamente, através de coeficientes globais de correção que têm em consideração os efeitos anteriormente enunciados. De uma forma genérica a deformação a curto prazo é dada pela seguinte expressão:

$$a_0 = k_0 \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot a_c = K_0 \cdot a_c \quad (2.26)$$

e a longo prazo por:

$$a_t = k_t \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot a_c = K_t \cdot a_c \quad (2.27)$$

em que:

- a_c – Flecha elástica;
- k_0 – Coeficiente global de correção que tem em consideração o nível de fendilhação e a quantidade de armadura (função de h/d , $\alpha\rho$, M_c/M_D);

- k_t – Coeficiente global de correção que tem em consideração o nível de fendilhação e a quantidade de armadura (função de φ , h/d , $\alpha\rho$, M_{cr}/M_D);
- η – coeficiente que tem em consideração a influência da armadura de compressão (função de ρ'/ρ , $\alpha\rho$, φ).

Os coeficientes K maiúsculos correspondem ao produto dos, k , minúsculos com os fatores $(h/d)^3$ e η , quando pertinente.

É proposto para elementos estruturais com continuidade que K seja dado por:

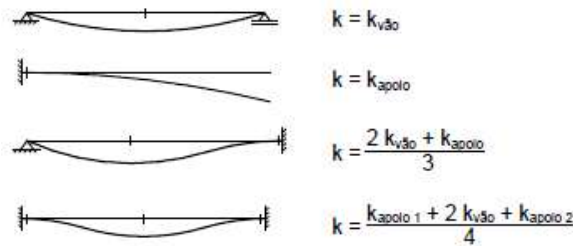


Figura 15 – Secções determinantes na determinação do coeficiente K . (Câmara, et al., 2016)

Através desta ponderação, é possível ter em consideração de forma realista, quer o comportamento na zona do vão quer na zona dos apoios.

2.4.3 Estado limite de vibração

Ao movimentarem-se, as pessoas podem gerar vibrações excessivas nas estruturas afetando as características do comportamento e induzindo, eventualmente, acelerações inaceitáveis para os utilizadores. Este tipo de problema é mais usual em estruturas de baixa rigidez, como é o caso de passerelles para peões e/ou escadas.

Tratando-se essencialmente de um problema em serviço, torna-se necessário controlar o nível das vibrações da estrutura de modo a não causar perturbações aos utilizadores. Caso o problema exista e os utilizadores sintam desconforto podem ficar apreensivos em relação à segurança da estrutura, podendo mesmo recusar-se em usá-la. (Bachmann, et al., 1995)

Os limites de vibrações baseados no conforto humano são um problema subjetivo que depende da perceção da vibração sentida por um indivíduo e da sua aceitação à vibração. Desde modo, a norma ISO 2631 considera diversos fatores a ter em conta relativamente à perceção humana das vibrações, de entre as quais se destacam as seguintes:

- Posição do corpo humano
- Características do pavimento
- Características da fonte de excitação
- Nível de expectativa
- Tipo de atividade

O problema associado a vibrações excessivas na estrutura sucede quando a frequência de excitação provocada pelo andamento dos peões é suficientemente próxima de uma frequência natural da estrutura, podendo esta entrar em ressonância. De modo a entender melhor este conceito, apresenta-se o caso de um oscilador de um grau de liberdade no seguinte ponto.

2.4.3.1 Oscilador de um grau de liberdade em regime forçado

Considere-se um sistema genérico reduzido a uma massa concentrada num único ponto e permitindo que esta se desloque apenas numa direção. Se assim for, diz-se que estamos perante um oscilador de um grau de liberdade. Tal pode ser representado por um modelo como o indicado na figura 16.

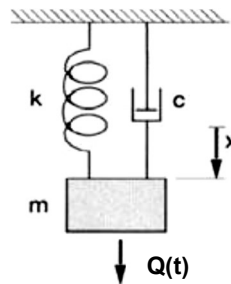


Figura 16 - Modelo de um oscilador com um grau de liberdade. (Bachmann, et al., 1995)

Suponha-se agora que, a estrutura é sujeita uma ação harmónica aplicada ao nível do grau de liberdade da forma:

$$Q(t) = \bar{Q} \cos(\omega t) \quad (2.28)$$

A equação do movimento do sistema pode ser traduzida por:

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = \bar{Q} \cos(\omega t) \quad (2.29)$$

em que:

- m – massa do sistema;
- c – amortecimento do sistema;
- k – rigidez do sistema;
- \bar{Q} – amplitude da força;
- ω – frequência angular da excitação.

Após alguma manipulação matemática, o deslocamento relativo do sistema pode ser descrito da seguinte forma:

$$w(t) = \frac{\bar{Q}}{k} \beta_1 \bar{Q} \cos(\omega t - \phi) \quad (2.30)$$

onde, β_1 , é designado por fator de amplificação dinâmica que representa o acréscimo do deslocamento por uma ação dinâmica, em relação a um deslocamento devido a uma ação estática, de valor, \bar{Q} . Este vem em função do cociente, $\bar{\omega}$, e do coeficiente de amortecimento, ξ , e pode ser avaliado da seguinte forma:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega})^2 + (2\zeta\bar{\omega})^2}} \quad (2.31)$$

onde:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{p} \quad (2.32)$$

sendo, p , a frequência própria da estrutura, que para o modelo de um grau de liberdade pode ser obtida por:

$$p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.33)$$

de onde se verifica que esta depende não só da rigidez da estrutura, mas também da massa do sistema.

Por forma a entender melhor o conceito de ressonância representa-se figura 17 o coeficiente β_1 para diferentes valores de amortecimento.

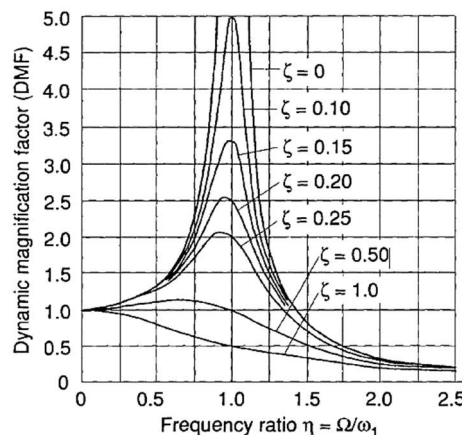


Figura 17 - Fator de amplificação dinâmica - β_1 . (Azevedo, et al., 1991)

Pela análise da figura 17 verifica-se que o fator de amplificação dinâmica, β_1 , é máximo para valores de $\bar{\omega}$ aproximadamente iguais a 1. Consequentemente, constata-se através da equação (2.32), que obtêm-se valores unitários de $\bar{\omega}$ quando a frequência de excitação, ω , iguala a frequência própria da estrutura, p . Por fim, constata-se pela equação (2.30), que valores unitários do fator de amplificação dinâmica resultam consequentemente em valores de deslocamentos superiores. Assim, denomina-se por ressonância o fenómeno onde a frequência de excitação é próxima da frequência própria da estrutura, resultando numa amplificação dos deslocamentos.

Por fim, refere-se que uma estrutura real não pode ser representada por um modelo de um grau de liberdade, nem as forças dinâmicas aplicadas na estrutura podem ser descritas como a equação (2.28). No entanto, o estudo de um modelo simples como este é interessante pois permite entender os conceitos e as variáveis intervenientes. (Azevedo, et al., 1991)

2.4.3.2 Valores críticos de frequências e acelerações

Como visto anteriormente, uma estrutura sob a ação de uma carga dinâmica pode entrar em ressonância caso a sua frequência própria seja semelhante à frequência de excitação. As cargas dinâmicas podem ter diferentes origens, entre as quais, o deslocamento das pessoas ao longo das estruturas.

Os utilizadores ao se movimentarem introduzem nas estruturas uma carga dinâmica com frequência proporcional às suas passadas. Segundo (Sétra/AFGC, 2006) as frequências relacionadas com a normal movimentação dos peões situam-se na ordem dos 2 Hz com uma variância de 0,175 Hz. Isto significa que 95% dos utilizadores tem uma frequência de andamento entre 1,65 e 2,35 Hz. No entanto, estas frequências dependem do tipo de atividade que os peões exerçam sob a estrutura. (Bachmann, et al., 1995) definem vários intervalos de frequências relacionados com os diferentes tipos de atividades que podem ser exercidas nas estruturas, pelo que se resumem na tabela 6, os mais importantes.

A definição dos intervalos referidos anteriormente é importante na medida em que permite ter uma ideia das frequências que podem produzir vibrações excessivas na estrutura, levando a um consequente mau comportamento em serviço.

Tabela 6 – Frequências por tipo de atividade.

Tipos de atividades	Frequência introduzida na estrutura (Hz)	Tipologia da estrutura
Andar	1,6 até 2,4	Estruturas pedonais, edifícios de escritórios
Correr	2,0 até 3,5	Pontes pedonais
Saltar	1,8 até 3,4	Ginásios, salas de desporto
Dançar	1,5 até 3,0	Salas de dança, salas de concerto

Relativamente ao EC2 (EN-1992-2) este também define um intervalo de frequências de risco de onde as frequências próprias das estruturas se devem afastar. Deve-se, portanto, evitar que as frequências naturais da estrutura se situem dentro do intervalo de 1,6 Hz a 2,4 Hz. O EC2 define ainda que, se a frequência fundamental da estrutura for superior a 5 Hz, a verificação ao estado limite de vibração fica imediatamente satisfeita. Se a frequência própria da estrutura for inferior àquele limite, é necessário avaliar a aceleração de pico da estrutura e verificar se é aceitável em termos do conforto dos utilizadores.

De modo a garantir um nível adequado de conforto aos utilizadores da estrutura, o EC0 (EN-1990) define valores limites para as acelerações. No caso das acelerações verticais, o valor de pico não deve ultrapassar 7% da aceleração da gravidade, ou seja, 0,7 m/s². Para acelerações horizontais o limite

será mais reduzido, uma vez que as pessoas são mais sensíveis a movimentos nesta direção, pelo que o EC0 define que a aceleração de pico não deve ultrapassar o valor de 2% da aceleração gravítica ou seja, $0,2 \text{ m/s}^2$.

Por outro lado, o guia prático “American Institute of Steel Construction” (AISC) – Floor Vibrations Due To Human Activity (Steel Design Guide Series of AISC), apresenta um gráfico de acelerações máximas permitidas na estrutura (ver figura 18).

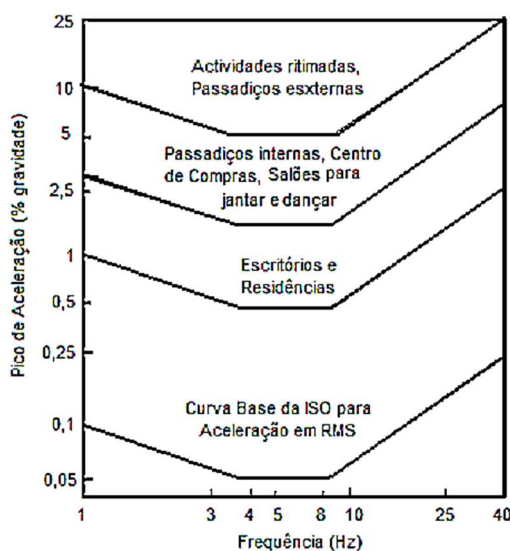


Figura 18 - Valores aceitáveis de acelerações de pico. (ISO 2631-2:1989)

À semelhança do EC0, as acelerações máximas permitidas são dadas em função da aceleração gravítica. No entanto, neste caso, varia consoante o tipo de utilização da estrutura e da sua frequência fundamental.

O gráfico apresenta uma curva base que representa o limite para o qual as acelerações verticais começam a ser perceptíveis, e outras que definem os intervalos de acelerações máximas permitidas na estrutura consoante a sua tipologia.

Refira-se que para a estrutura em questão, este regulamento limita a aceleração a $\pm 2,50\%$ da aceleração gravítica, sendo, portanto, bem mais condicionante que o EC0 que, como visto anteriormente, define um valor máximo de 7% da aceleração gravítica.

2.4.3.3 Procedimento de verificação

A verificação ao estado limite de vibração tem por objetivo garantir um comportamento em serviço da estrutura de modo assegurar aos utilizadores um nível de conforto apropriado. Em suma, a verificação ao estado limite de vibração deve ser efetuada como se apresenta no esquema ilustrado na figura 19.

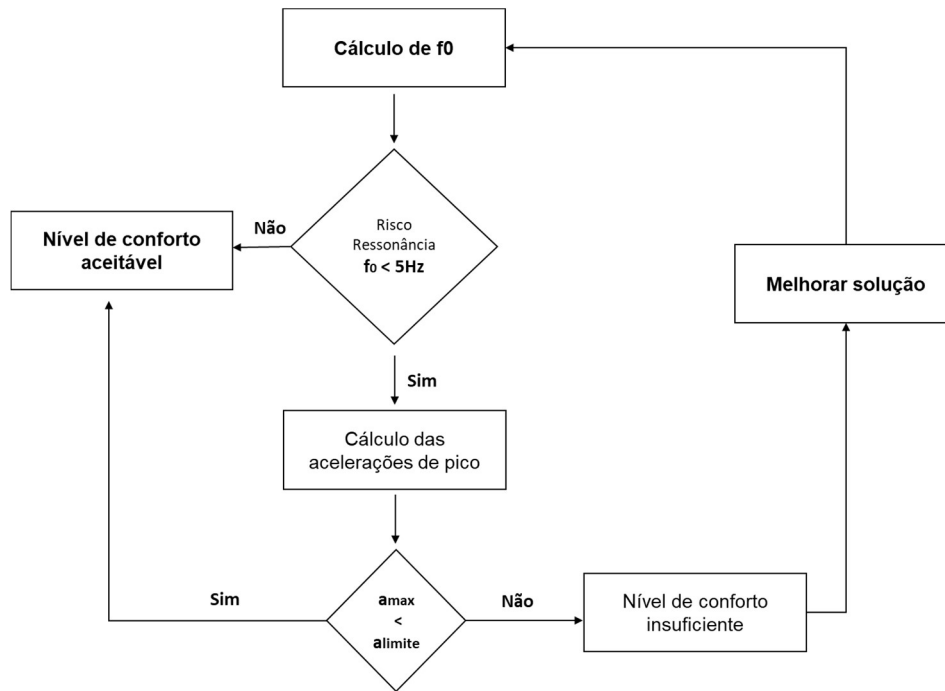


Figura 19 – Procedimento de verificação ao estado limite de vibração.

Para uma estrutura deve-se inicialmente calcular a sua frequência fundamental. Caso esta seja superior a 5Hz assume-se que não existe risco de ressonância e o nível de conforto é garantido sem que sejam necessários cálculos posteriores. Se a frequência fundamental for inferior a 5Hz pode existir risco de se ultrapassar o nível de acelerações que garante o conforto aos seus utilizadores. Se se verificarem acelerações de pico na estrutura superiores às máximas aceitáveis, significa que o nível de conforto não será adequado e devem fazer-se alterações na estrutura com o intuito de diminuir o efeito das vibrações.

A diminuição das vibrações na estrutura pode ser efetuada de diversas formas, entre as quais:

a) Aumentar a frequência própria

Uma vez que a frequência da estrutura depende da relação (2.33), é possível afastar a frequência própria da estrutura das frequências de risco anteriormente descritas, variando quer a rigidez ou a massa da estrutura;

b) Aumentar o amortecimento

Como se verifica na figura 17, é possível reduzir o fator de amplificação dinâmica aumentando o amortecimento do sistema. Deste modo é possível obter uma consequente diminuição dos deslocamentos e acelerações da estrutura.

3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO GLOBAL DA ESTRUTURA BASE

O caso prático que motivou o tema desta dissertação foi a escadaria do hall de entrada do hotel Savoy Palace situado na ilha da Madeira e assim sendo, toma-se este exemplo como o caso de estudo base.

No dimensionamento de estruturas, existem dois objetivos fundamentais que se têm de considerar de modo a assegurar às estruturas níveis de segurança adequados. Deve-se, por um lado, assegurar que não existe qualquer possibilidade de rotura da estrutura garantindo assim a segurança em relação aos denominados estados limites últimos e, por outro lado, garantir que a estrutura apresenta um bom comportamento em serviço. Tendo por base estes dois objetivos fundamentais, analisa-se a estrutura e compara-se com o que foi projetado.

3.1 Caracterização e modelação

A estrutura, ilustrada na figura 20, refere-se a uma escada circular que faz a ligação do piso -2 ao rés-do-chão, vencendo assim dois pisos. Não se encontra ligada aos pilares que estão próximos, pelo que o seu apoio faz-se através de 5 tirantes metálicos ancorados à laje do piso 4. Os tirantes encontram-se colocados ao longo do bordo interior do patamar intermédio, dando uma valência estética e estrutural à obra extremamente interessante. Assim sendo, verifica-se que é no patamar intermédio onde a estrutura apresenta os maiores desafios a nível estrutural, uma vez que é ao longo desse vão que a estrutura é apoiada por tirantes pelo seu bordo interior. Desta forma, o estudo incidirá sobre o patamar intermédio das escadas uma vez que é nessa zona que o funcionamento estrutural tem relevância para o tema em questão.



Figura 20 - Modelo tridimensional das escadas (esq.) e estrutura finalizada (dir.) (JSJ).

O projeto da solução adotada foi cedido pela empresa JSJ e representam-se na figura 21 as características geométricas da solução.

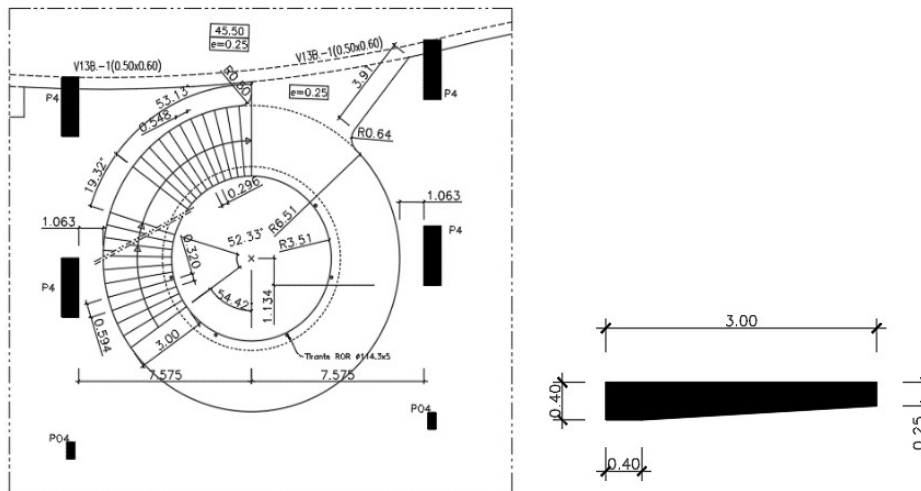


Figura 21 – Definição geométrica da solução estrutural, dimensões em [m] (JSJ).

A estrutura adotada tem um raio interior de 3.5 m, por onde é apoiada através de tirantes circulares metálicos igualmente espaçados, cada 51°. A largura da plataforma é de 3,0 m e a secção transversal é constante numa zona junto aos apoios variando depois a sua espessura ao longo do vão como se indica na figura 21.

- **Descrição da modelação**

Com o objetivo de estudar o comportamento estático e dinâmico da estrutura acima referida elaborou-se uma análise numérica com recurso ao programa de Método dos Elementos Finitos (MEF), SAP2000 (Computers & Structures, 2017).

Como anteriormente referido, o patim intermédio é a zona da escada que interessa estudar no contexto deste trabalho, devido à sua geometria. Assim, resolveu-se modelar apenas essa parcela da estrutura assumindo, como simplificação, que a restante parte não influencia significativamente o comportamento estrutural do patim. A geometria assumida na modelação está ilustrada na figura 22.

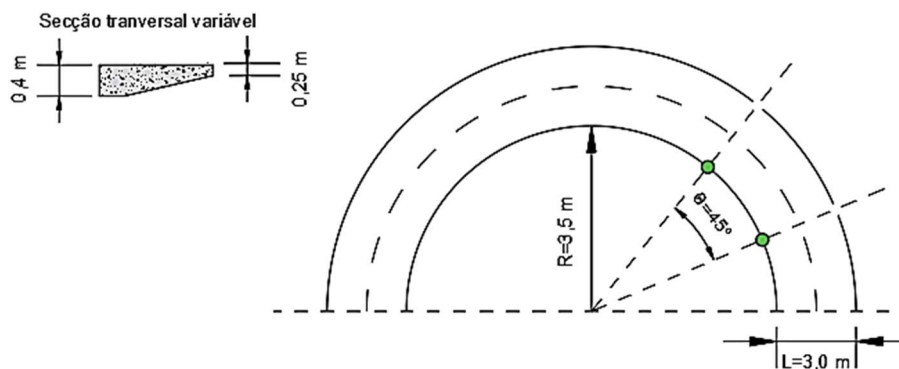


Figura 22 - Modelo da estrutura base.

A laje foi modelada com recurso a elementos de laje quadrilaterais de 4 nós com dimensões variáveis devido a se tratar de uma laje circular.

Os tirantes foram modelados com recurso a apoios simples, os quais bloqueiam as translações na direção vertical. No entanto, com o intuito de acelerar o tempo de processamento, tirou-se partido da simetria do problema, pelo que se analisou apenas metade da coroa circular. Para que isso fosse possível adotaram-se encastramentos deslizantes na zona do meio círculo, apoios estes que bloqueiam a rotação circunferencial, definida através de $u_\theta = z \theta_\theta$, como ilustra a figura 23.

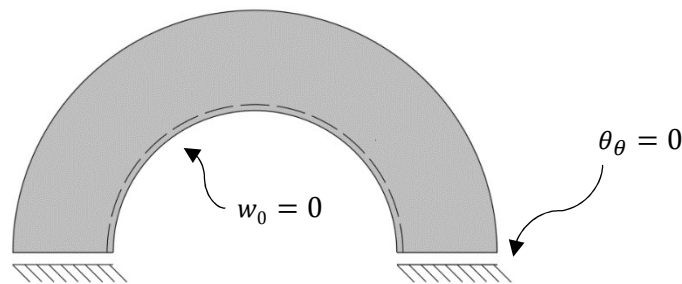


Figura 23 – Condições de apoio do modelo de MEF utilizado.

Para a definição da malha foi definido um espaçamento circunferencial de $2,5^\circ$ e de $0,25\text{m}$ ao longo do raio, tendo sido os valores dos espaçamentos da malha obtidos após um processo de refinamento adequado.

Outra simplificação adotada que é importante referir está relacionada com a modelação da secção de espessura variável. A secção real apresenta uma geometria como se ilustra na figura 24 (1). Seria possível utilizar elementos de laje com espessura variável que modelariam exatamente esta geometria da laje. No entanto, por uma questão relacionada com facilidade de modelação, assumiu-se uma geometria onde a seção varia em três troços de espessuras constantes, ver figura 24 (2). Desta forma o programa efetua os cálculos com base nas linhas médias das diferentes seções e portanto como exemplificado na figura 24 (3).

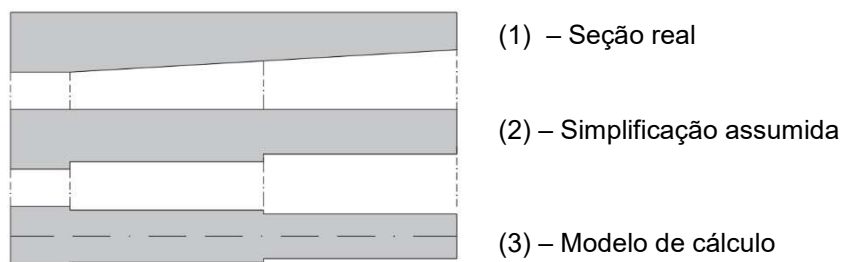


Figura 24 – Simplificação adotada na modelação da espessura.

- **Propriedades mecânicas dos materiais**

Sendo uma estrutura em betão armado, interessa na sua modelação definir as propriedades mecânicas dos materiais utilizados. O betão utilizado foi da classe de resistência C30/37 e o aço utilizado nas armaduras ordinárias foi da classe A500. Definem-se na tabela 7 as propriedades mecânicas dos referidos materiais.

Tabela 7 – Propriedades mecânicas do betão C30/37 e um aço A500.

Betão C30/37		Aço A500	
pp (kN/m ³)	25,0	f _{syk} (MPa)	500
f _{ck} (MPa)	30,0	f _{syd} (MPa)	435
f _{cd} (MPa)	20,0	E _s (GPa)	210
f _{ctm} (MPa)	2,9		
E _{c,28} (GPa)	33,0		
f _{ctk0.05} (MPa)	2,0		

- **Definição e combinação de ações**

A definição e combinação das ações foi efetuada com base nos regulamentos EN1991 e EN1990 respetivamente. Como ações permanentes considerou-se o peso próprio do betão e restantes cargas permanentes, estas associadas ao tipo de revestimentos utilizados. As ações que apresentem variação significativa durante a vida da construção são as sobrecargas.

Resume-se na tabela 8 os valores adotados para cada tipo de ação.

Tabela 8 - Caraterização das ações.

Cargas Permanente	kN/m³
Peso Próprio Betão	25
Restantes Cargas Permanente	kN/m²
Revestimentos	1,0
Sobrecargas de Utilização	kN/m²
Escadas	3

Quanto à verificação de segurança aos estados limite últimos e de serviço utilizou-se a combinação fundamental e a combinação quase-permanente, respetivamente, como previsto na EN1990. Para a combinação fundamental majoraram-se as ações de carácter permanente por um fator parcial de segurança, γ , de 1,35 e as ações de carácter variável por um fator de 1,5. Relativamente à combinação quase permanente, adotou-se um $\psi_2=0,3$ conforme a classificação definida na NP EN 1991-1-1 para edifícios de categoria B.

3.2 Análise dos estados limite de utilização

Neste subcapítulo procede-se à análise da estrutura em relação aos estados limite de utilização, avaliando-se o comportamento em serviço para as combinações de ações pertinentes. Os estados limite de utilização a verificar serão os de abertura de fendas, deformação e vibração.

3.2.1 Estado limite de abertura de fendas

A verificação do estado limite de abertura de fendas consiste, desde logo, na comparação entre os momentos fletores atuantes, devidos a uma combinação de ações frequentes, e o momento fletor de fendilhação avaliando se são de prever fendas. Deste modo, calcularam-se 3 valores de momento de fendilhação, assumindo, como na modelação estrutural, que a secção é formada por 3 zonas de altura constante.

Na Figura 25, comparam-se os dois momentos anteriormente descritos, ao longo da largura da laje.

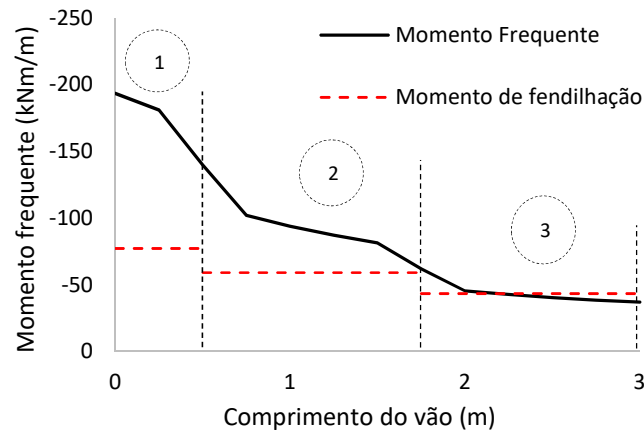


Figura 25 – Comparação do momento fletor atuante com o momento de fendilhação.

Através da análise do gráfico verifica-se que o momento atuante ultrapassa em quase todo o comprimento do vão, o momento de fendilhação, confirmando assim a provável ocorrência de fendas na laje. De acordo com o EC2 (EN-1992-1-1) é possível fazer o controlo indireto de fendilhação sem ser necessário fazer o cálculo explícito das aberturas de fendas. Para isso, é necessário adotar quantidades de armaduras e disposições construtivas adequadas.

Quanto à área de armadura mínima verifica-se ser necessário pelo menos $4,64 \text{ cm}^2/\text{m}$, ao que corresponderia, por exemplo, uma armadura de $\varnothing 16//30$. Como se pode constatar pelo anexo B, a área de armadura adotada é, em toda a laje, superior a esse valor.

Com recurso à tabela 4 e tabela 5, conclui-se que o espaçamento máximo para limitar a abertura de fendas a 0,3 mm, utilizando varões com diâmetro de 16 mm, é de 20 mm. Verifica-se portanto, com recurso ao anexo B, que os espaçamentos utilizados são inferiores a 20 mm, pelo que o estado limite de abertura de fendas é verificado.

3.2.2 Estado limite de deformação

Como descrito em 2.1.7 o estado limite de deformação é verificado caso os valores das deformações a longo prazo na estrutura sejam iguais ou inferiores ao limite máximo estabelecido.

Através da análise numérica efetuada, foi possível obter a deformada da estrutura para uma combinação de ações quase-permanente. Esta encontra-se ilustrada na figura 26.

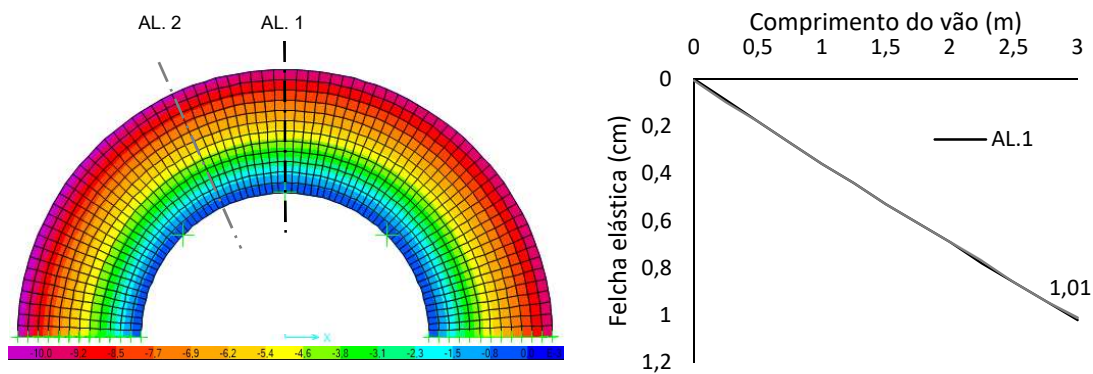


Figura 26 – Deslocamentos da estrutura base.

Quando se analisa a deformada da estrutura, verifica-se que esta se deforma quase como um corpo rígido. Apesar de a laje não ser continuamente apoiada ao longo do bordo interior, os valores de deslocamentos para os alinhamento 1 e 2 não apresentam grande variação, pelo que se verifica que os deslocamentos são praticamente axissimétricos em relação ao eixo normal à laje.

O valor máximo da flecha obtido é cerca de 1 cm, como se pode verificar na figura 26, valor que é bastante próximo do resultado obtido analiticamente no capítulo 2 ($\approx 1,2$ cm). Prova-se desta forma, que o modelo está suficientemente bem calibrado e que as equações obtidas no capítulo 2 traduzem verdadeiramente o comportamento de uma estrutura deste tipo. No entanto, refira-se que apesar do valor máximo obtido ser bastante semelhante, as condições de fronteira são distintas das do caso analisado no capítulo 2.

De modo a ajudar a contabilizar a ordem de grandeza dos valores anteriores, compara-se os deslocamentos obtidos com o exemplo de uma banda de laje reta encastrada, com as mesmas condições de carga, o mesmo vão e a mesma seção transversal, como ilustra no modelo de cálculo na figura 27.

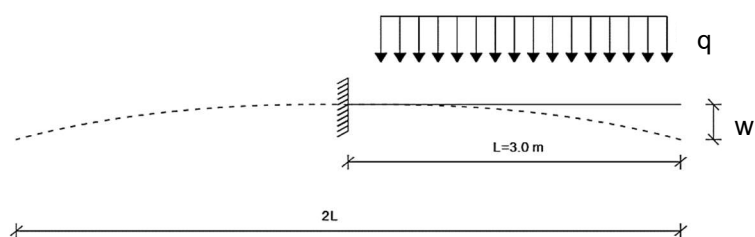


Figura 27 - Flecha de uma consola.

Neste caso, a flecha máxima será de 0.07 cm, ou seja, 14 vezes inferior à obtida para a estrutura base. Esta diferença é explicada pela não rotação do apoio neste caso. Assim, conclui-se que a solução em estudo será uma estrutura bem mais deformável do que uma consola encastrada, pelo que o controlo da deformação deverá ser analisado com particular diligência.

Conhecidos os deslocamentos elásticos previstos na estrutura é então possível avaliar as deformações a longo prazo devidas aos efeitos diferidos no betão. No cálculo das deformações a longo prazo foi utilizado o método dos coeficientes globais, como descrito em 2.4.2.2.

Na aplicação do método, verificou-se que seria necessário a consideração de apenas um alinhamento ao longo do raio. O alinhamento utilizado para o cálculo está indicado na figura 26 como sendo o AL.1. Para esse alinhamento calcularam-se os coeficientes globais de uma secção junto ao apoio e outra junto do bordo livre.

Demonstra-se na tabela 9 a aplicação do método.

Tabela 9 - Método dos coeficientes globais.

	Apoio	Extremidade
M_{cr} (kNm/m)	77,33	43,5
M_D (kNm/m)	193,5	37
M_{cr}/M_D	0,4	1,2
$\alpha\rho$	0,04	0,02
kt	4,00	3,00
h	0,93	0,92
$(h/d)^3$	1,37	1,44
KT	5,10	4,10
KT ponderado		4,6

Quanto à ordem de grandeza do valor obtido do coeficiente global, verifica-se que pode ser considerado como um valor corrente para estruturas de betão armado. Assim, os deslocamentos a longo prazo serão aproximadamente 5 vezes superiores aos deslocamentos obtidos de uma análise elástica a que corresponde a uma inclinação da estrutura de 1,6%.

Para a verificação ao estado limite de deformação é então necessário comparar este valor com o limite máximo aceitável.

O EC2 define que a flecha máxima aceitável não deve ser superior ao valor de vão/250. No entanto, ao definir-se o limite de deformação desta forma estamos a assumir que a deformada da estrutura se assemelha à deformada de uma consola como ilustra a figura 27, o que é discutível.

Assim, calculando com se de uma consola se tratasse, obtém-se um valor máximo para a flecha a longo prazo de:

$$\delta_{\text{serviço}} \leq \frac{2L}{250} = \frac{6}{250} = 0,0024 \text{ m} = 2,4 \text{ cm} \quad (3.1)$$

Este valor corresponderia a uma inclinação da deformada a um valor máximo de 0,8%.

Para contrariar este efeito duas possibilidades se podem colocar: ou na fase de execução se introduz uma contra flecha ao longo da linha do extradorso a que se devem somar a deformabilidade dos pendurais ou na fase de acabamentos se compensa este provável incremento de rotação da secção com um diferencial na espessura do acabamento do extradorso e intradorso. Assim, considerando um diferencial entre 2 a 2,5 cm, em qualquer das hipóteses anteriores, entre a face superior da secção do extradorso e o intradorso, a inclinação máxima ao longo da vida útil da estrutura ficaria limitada entre - 0,8% e 0,8%.

De qualquer forma a deformação transversal não afeta elementos não estruturais e da forma atrás descrita controla-se qualquer inconveniente de eventual menor conforto dos utilizadores que pudesse advir da inclinação transversal na circulação dos peões.

3.2.3 Estado limite de vibração

Em estruturas mais flexíveis, como é o caso de escadas ou passareles, poderão ser notadas vibrações excessivas na estrutura que causam desconforto aos utilizadores. Seguindo a metodologia ilustrada na figura 19 e os limites definidos pelo EC2, avaliam-se as frequências próprias da estrutura, assim como, os seus modos de vibração com o intuito de avaliar as características dinâmicas da estrutura.

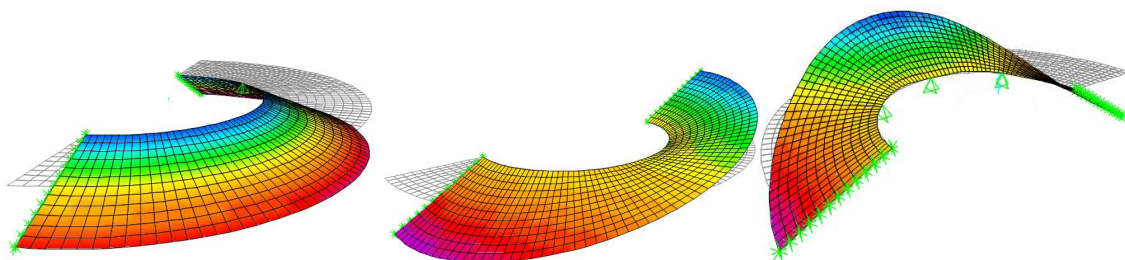


Figura 28 – 1º, 2º e 3º modo de vibração da estrutura base.

As frequências e períodos associados a cada modo, ilustrado em cima, estão descritas na tabela 10.

Tabela 10 - Informação modal da estrutura base.

Modo	Período (seg)	Frequência (Hz)
1º Modo	0,19	5,34
2º Modo	0,14	6,91
3º Modo	0,09	11,03

A frequência mais baixa, designada por frequência fundamental (5,34 Hz) é referente ao primeiro modo de vibração. Este modo será o que ocorrerá com mais facilidade, uma vez que é o que necessita de menor energia de deformação. A sua configuração corresponde a uma deformada sem qualquer ponto de inflexão.

O segundo modo de vibração apresenta uma frequência de 6,91 Hz, apresentando a deformada um ponto de inflexão.

O terceiro modo de vibração analisado está associado a uma deformada com dois pontos de inflexão. A sua frequência é de 11,03 Hz sendo esta superior aos modos anteriores uma vez que, é um modo com maior energia de deformação.

Pela análise da tabela 10 conclui-se que sendo as frequências superiores a 5 Hz, segundo o EC2 o estado limite fica verificado, mostrando também que este sistema estrutural é pouco sensível à vibração.

3.3 Análise do estado limite último

A garantia de não rotura do elemento estrutural é um ponto fundamental no dimensionamento de estruturas. Neste sub-capítulo analisam-se as distribuições de momentos e verifica-se a segurança em relação ao estado limite último de flexão.

Através do modelo numérico desenvolvido, foi possível determinar as distribuições de momentos nas duas direções principais da laje, circunferencial e radial e ainda a distribuição relativa aos momentos torsores. Todos os diagramas de esforços apresentados ao longo deste trabalho foram obtidos a partir da interpolação da média do respetivo valor nodal. De seguida representam-se na figura 29 à esquerda a distribuição de momentos radiais, M_{rr} , e à direita a distribuição de momentos torsores, $M_{r\theta}$.

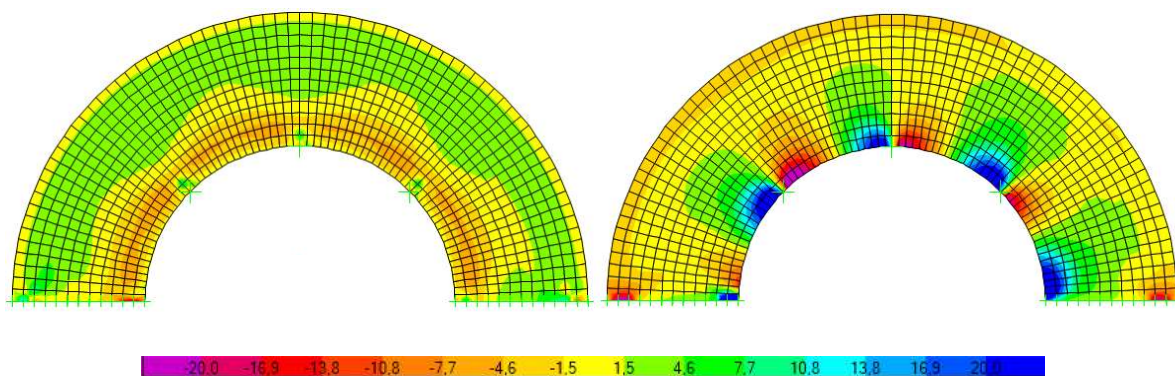


Figura 29 – Distribuição de momentos radiais (esq.) e torsores (dir.) (kNm/m).

Relativamente aos momentos radiais verifica-se que estes apresentam valores reduzidos, no máximo da ordem dos 10 kNm/m, pelo que não são condicionantes na verificação de segurança da laje à flexão. Os momentos torsores, $M_{r\theta}$, que para o caso estudado no capítulo 2.1 eram nulos devido à axissimetria do problema aqui não o são, uma vez que, o bordo não é continuamente apoiado. Deste modo, surgem momentos torsores superiores a 10 kNm/m no intradorso, junto e entre apoios, sendo praticamente nulos nas outras zonas da laje.

Devido a este aparecimento de momentos torsores e uma vez que, as armaduras estão dimensionadas para a flexão, deve-se, de forma simplificada, somar em módulo o valor do momento torsor ao valor do momento flector nessa direção, como indica a seguinte expressão:

$$M_{sd,rr}^* = M_{sd,rr} + |M_{sd,r\theta}| \quad (3.2)$$

Desta forma, verifica-se na tabela 11 o estado limite último para a direção radial.

Tabela 11 - Verificação de segurança ao ELU na direção radial.

Secção	$M_{sd,rr}^*$ [kNm/m]	Área de armadura necessária As/s [cm ² /m]	Área de armadura adotada As/s [cm ² /m]	Verifica
Apoio	30	6,24	7,54	Sim
Bordo livre	≈ 0	3,64	4,18	Sim

Interessa referir que as quantidades de armadura necessárias à verificação do ELU nesta direção, são as mínimas, uma vez que os momentos apresentam valores reduzidos.

Desta forma, verifica-se que a verificação de segurança da laje na direção radial é pouco condicionante em termos de quantidades de armadura, uma vez que estas são reduzidas.

Por conseguinte, interessa analisar a distribuição de momentos na direção circunferencial, estando esta representada na figura 30.

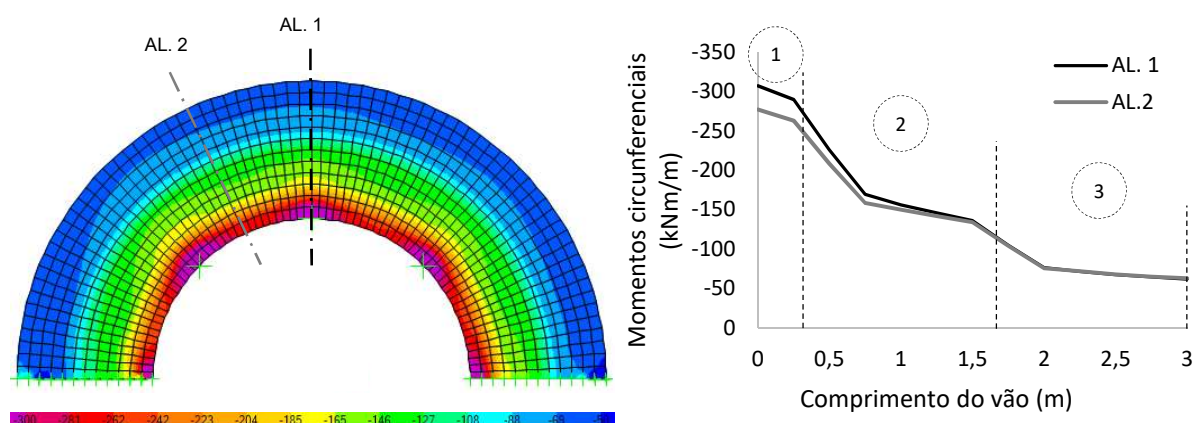


Figura 30 - Distribuição de momentos na direção circunferencial.

Numa primeira análise é possível observar que comparativamente ao que sucede numa estrutura em consola, geram-se momentos negativos significativos, tendo um valor máximo junto da zona do apoio e diminuindo ao longo da largura. No entanto, sublinha-se que ao longo do bordo exterior, os momentos não são nulos, apresentando valores ainda consideráveis.

Refira-se que na distribuição de momentos, representada no corte à direita, indicam-se a tracejado as zonas da secção onde se considerou como simplificação altura constante. Devido a esta simplificação, observa-se que a distribuição de momentos é praticamente constante nas secções fictícias um, dois e três, variando consideravelmente entre estas. Consequentemente a distribuição de momentos obtida tem um andamento um pouco afetado por aquela hipótese de modelação.

Atendendo ao valor dos momentos obtidos nesta direção e sobrepondo o efeito dos momentos torsores como referido na expressão (3.2), verifica-se a segurança ao estado limite último. Na tabela 12, comparam-se os valores obtidos de armaduras com as adotadas e referenciadas no Anexo B.

Tabela 12 - Verificação de segurança ao ELU na direção circunferencial.

Secção	$M_{sd,\theta\theta}^*$ [KNm/m]	d (m)	μ	Área de armadura necessária As/s [cm ² /m]	Área de armadura adotada As/s [cm ² /m]	Verifica
1	-290	0,40	0,11	20,0	28,25	Sim
2	-146	0,30	0,07	11,0	14,13	Sim
3	-68	0,25	0,06	6,8	11,31	Sim

Verifica-se também que o nível de ductilidade da laje é adequado uma vez que o momento fletor reduzido, μ , apresenta valores correntes e limitados.

Quanto aos momentos na direção radial, verifica-se que são praticamente nulos, pelo que, a quantidade de armadura necessária será a mínima.

Importa ainda referir que a equação (2.1) só admite uma solução para o esforço transversal. Este esforço será naturalmente “isostático” e por isso a solução obtida corresponde à exata.

Nota: Recomenda-se a consulta do anexo C, onde se podem visualizar fotos relacionadas com a fase construtiva da obra, nomeadamente o posicionamento das armaduras e dos tirantes.

4. ANÁLISE PARAMÉTRICA

De modo a obter um leque de resultados que permitam entender o campo de aplicabilidades deste tipo de soluções, efetuam-se, neste capítulo, variações à geometria do problema base.

Numa primeira instância, verifica-se se a adoção de uma seção transversal variável, é de facto, globalmente mais vantajosa, comparativamente a **uma laje de espessura constante**.

Num segundo ponto, analisa-se a possibilidade e viabilidade de efetuar uma estrutura deste tipo, no entanto, **apoiada ao longo do bordo exterior**.

Por fim, avalia-se de que modo outras características geométricas, como o **raio** adotado, o **comprimento da consola** e o **ângulo entre apoios**, influenciam o comportamento da estrutura.

Note-se que, todas estas variantes ao problema base foram efetuadas considerando uma estrutura com espessura constante.

Assim, as variáveis do problema que se pretendem avaliar estão ilustradas na figura 31, sendo as seguintes:

- Secção transversal
- Apoio pelo extradorso
- Ângulo entre apoios
- Raio médio da estrutura
- Comprimento da consola

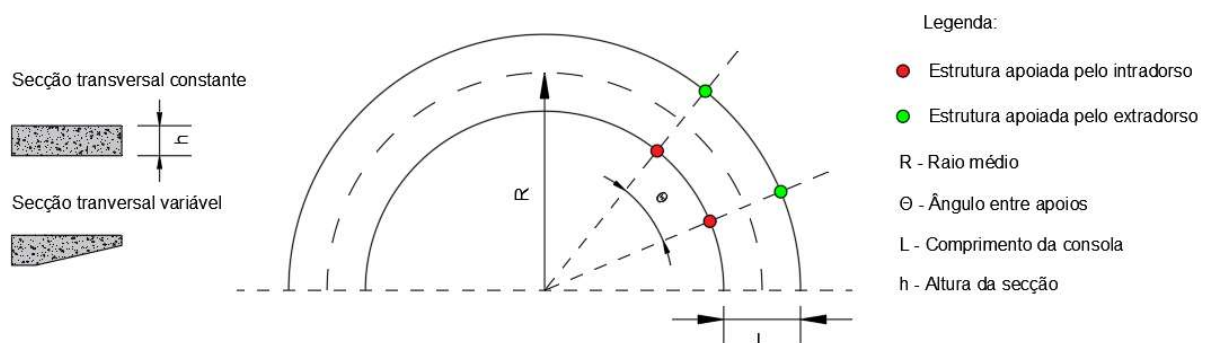


Figura 31 - Parametrização do problema.

Refira-se que, o comportamento da estrutura é sempre dependente de todos os parâmetros acima referidos. Assim, para que seja possível avaliar a influência de cada um, efetuaram-se várias análises variando um e mantendo todos os outros inalterados. Deste modo, é possível avaliar adequadamente a influência desse parâmetro no comportamento da estrutura.

Na análise da estrutura efetuaram-se diversos modelos numéricos, com malhas, materiais e combinações de ações semelhantes aos descritos para o ponto 3.1.

A avaliação do comportamento das estruturas será efetuada com base nos valores obtidos de deslocamentos, frequências próprias e momentos fletores.

4.1 Laje de espessura constante

A adoção de uma laje com secção transversal variável pode ser do ponto de vista estrutural interessante uma vez que, permite adaptar a secção transversal aos respetivos esforços atuantes, possibilitando uma melhor eficiência da estrutura. Com a redução das dimensões das secções tem-se uma diminuição das cargas associadas ao peso próprio da estrutura, resultando em estruturas mais leves e mais económicas. Foi com base nestes princípios e de algum ganho estético que se adotou uma secção transversal variável em detrimento de uma secção constante.

É no entanto, interessante avaliar se estes princípios se confirmam para o caso de estudo em questão. Deste modo, compara-se o funcionamento estrutural de uma solução com secção transversal constante com o da estrutura base. A estrutura utilizada é, portanto, em tudo semelhante à estrutura base descrita em 3.1, porém com uma **secção transversal constante de altura igual a 0,4 m**. Refira-se no entanto, que o volume de betão adotado nesta solução será superior ao do caso estudado anteriormente,

4.1.1 Análise dos deslocamentos

Neste ponto avaliam-se os deslocamentos obtidos para a estrutura com secção constante e comparam-se com os obtidos anteriormente.

Ilustra-se na figura 32 os deslocamentos elásticos, para a estrutura em questão e para a estrutura base. Considerou-se apenas um alinhamento, uma vez que, à semelhança do que se verificou na figura 26 os deslocamentos praticamente não variam com o ângulo.

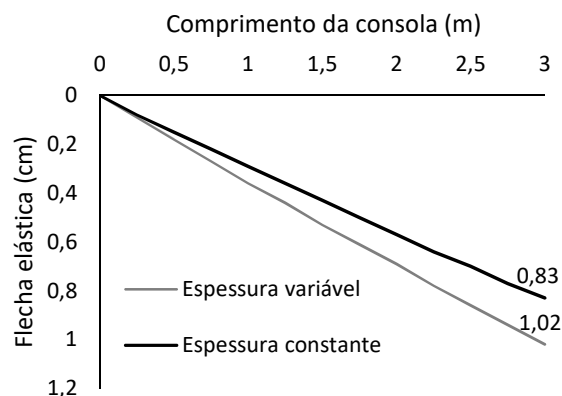


Figura 32 - Deslocamentos da estrutura com secção transversal constante e variável.

A deformada da estrutura não sofreu alteração significativa quando comparada com a deformada da estrutura base.

O valor obtido para a flecha elástica é de 0,83 cm, pelo que se verifica uma redução em 18% relativamente á flecha da estrutura base. Desta forma, verifica-se que a estrutura é um pouco mais rígida do que a anterior, conduzindo a valores de deslocamentos mais reduzidos, mas à custa de um maior consumo de materiais e de uma menor valia estética.

4.1.2 Análise das vibrações

Como referido anteriormente, numa estrutura deste tipo o controlo de vibrações na estrutura deve ser tido em conta. Deste modo, interessa avaliar os modos de vibração e as frequências, resultantes da alteração efetuada na geometria da laje.

Os períodos associados aos três primeiros modos de vibração assim como as frequências correspondentes encontram-se descritas na tabela 13.

Tabela 13 – Informação modal da estrutura (esp. constante, apoiada pelo intradorso).

Modo	Período (seg)	Frequência (Hz)
1º Modo	0,17	5,95
2º Modo	0,14	7,32
3º Modo	0,08	11,88

Os modos de vibração permanecem os mesmos dos verificados e ilustrados na figura 28, no entanto, como houve um aumento de rigidez da estrutura devido a alteração da secção transversal e um correspondente aumento de massa, as frequências associadas a cada modo aumentaram comparativamente às obtidas para o caso anterior.

4.1.3 Análise dos esforços

Outra questão importante a analisar, será a forma de como a secção transversal influencia a distribuição de momentos, comparativamente à solução base. De modo a avaliar esta questão, traçaram-se na figura 33 os diagramas de momentos das duas soluções. Refira-se que os diagramas representados estão associados a alinhamentos coincidentes com os apoios como descrito na figura 30 como AL.1, uma vez que serão os mais condicionantes.

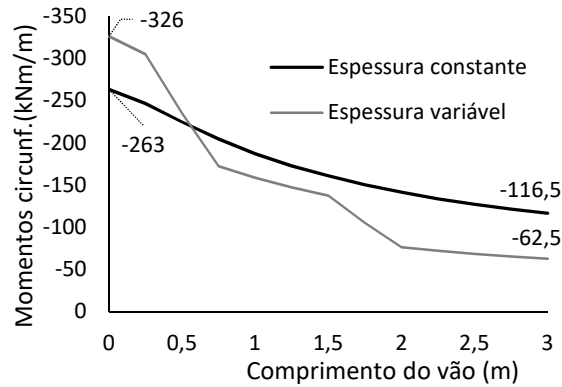


Figura 33 - Diagrama de momentos da estrutura com secção transversal constante e variável

Pela comparação do diagrama de momentos fletores de ambas as soluções, verifica-se que com a adoção de uma secção transversal de espessura constante existe uma redução dos momentos junto do bordo interior em cerca de 20% e um aumento de quase 50% ao longo do bordo exterior. Pode-se assim dizer que, existe uma redistribuição de momentos do intradorso para o extradorso, correspondente ao aumento da rigidez da laje nesta zona.

Se se comparar o momento fletor reduzido numa secção junto aos apoios, obtêm-se valores de, μ , iguais a 0,08 e para a secção do bordo livre de 0,036, verificando-se que baixaram consideravelmente.

Assim se a opção fosse por uma altura constante seria razoável considerar um valor inferior aos 40 cm.

4.2 Secção apoiada pelo extradorso

Até este subcapítulo, estudou-se o comportamento estrutural de soluções apoiadas ao longo do bordo interior. Consequentemente surgiu o interesse em se verificar as características do comportamento apoiando a estrutura ao longo do bordo exterior.

Os deslocamentos, assim como, as frequências próprias e momentos para este tipo de estruturas são analisados neste ponto e comparados com as soluções anteriormente obtidas.

4.2.1 Análise dos deslocamentos

À semelhança dos casos anteriores, verifica-se que os deslocamentos têm uma variação muito reduzida em função do ângulo. Deste modo, mostra-se na figura 34 os deslocamentos na estrutura considerando um alinhamento ao longo do raio e comparam-se com os obtidos para o caso anterior.

Refira-se que, no gráfico, os alinhamentos têm ambos como ponto de deslocamento zero a zona junto aos apoios (num caso o intradorso no outro o extradorso), para que deste modo, se possa comparar melhor a amplitude das flechas.

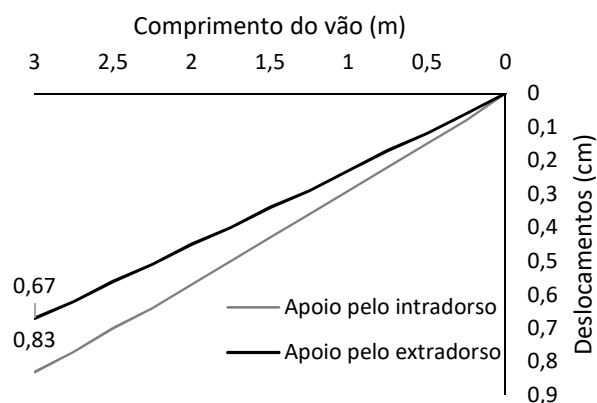


Figura 34 – Deslocamentos nas estruturas com secção transversal de espessura constante.

Os deslocamentos máximos ocorrem agora ao longo do bordo interior, uma vez que é a zona mais distante dos apoios.

A forma da deformada não apresenta alterações relativamente aos casos anteriormente estudados. No entanto, pela observação do gráfico, verifica-se uma diminuição da flecha elástica em 1,6 mm (da ordem de 20%) comparativamente à flecha obtida para a estrutura apoiada ao longo do bordo interior. Consequentemente, conclui-se que a colocação dos apoios pelo bordo exterior resulta numa estrutura mais rígida.

4.2.2 Análise das vibrações

Dada a alteração do posicionamento dos apoios, espera-se que haja uma variação das frequências próprias da estrutura, sendo de esperar, em princípio, frequências superiores devido à maior rigidez vertical, constatada no parágrafo anterior.

Através de uma análise modal, obtiveram-se os modos de vibração, estando estes ilustrados na figura 35.

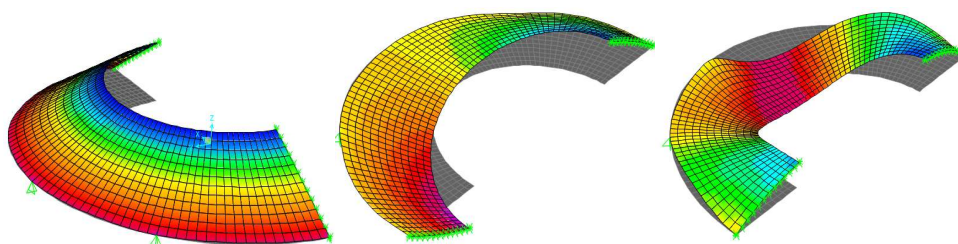


Figura 35 - 1º, 2º e 3º modo de vibração da estrutura (esp. constante, apoiada pelo extradorso).

Pela análise das deformadas, verifica-se que o primeiro modo de vibração corresponde a uma translação vertical da estrutura sem qualquer ponto de inflexão. A diferença deste caso para o da estrutura base é que aqui os deslocamentos ocorrem ao longo do bordo interior. O segundo e terceiros modo de vibração correspondem a translações verticais com um e dois pontos de inflexão respetivamente.

Os períodos e frequências relativas a cada modo de vibração estão descritas na tabela 14.

Tabela 14 - Informação modal da estrutura (esp. constante, apoiada pelo extradorso).

Modo	Período (seg)	Frequência (Hz)
1º Modo	0,14	7,02
2º Modo	0,06	15,5
3º Modo	0,04	25,75

Verifica-se que houve, como esperado, aumento das frequências, em especial as relativas aos segundo e terceiro, quando comparadas com o apoio pelo intradorso, devido à maior rigidez da estrutura, como já se havia verificado no ponto anterior.

4.2.3 Análise dos esforços

Há que referir, em primeiro lugar, que os momentos circunferenciais são positivos, contrariamente ao que se verificava nos casos anteriores. Deste modo as trações ocorrem nas fibras inferiores da laje, pelo que a colocação das **armaduras principais de flexão devem ser colocadas na face contrária**.

No gráfico, apresentam-se os diagramas comparativos dos momentos em módulo, relativos à direção circunferencial, das estruturas interior e exteriormente apoiadas, tendo em conta um alinhamento ao longo do raio e em que se considera, na figura 36, à esquerda ambos os bordos do intradorso e à direita os do extradorso.

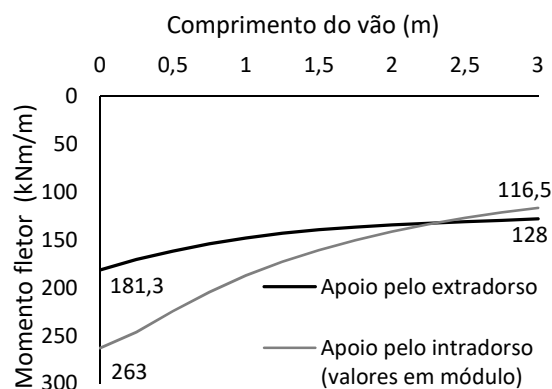


Figura 36 - Diagrama de momentos circunferenciais da estrutura com secção transversal constante.

Observa-se assim que, os momentos máximos no caso do apoio pelo extradorso não ocorrem deste lado, mas sim ao longo do bordo interior e, por outro lado, os momentos, no geral baixam e têm uma distribuição mais uniforme ao longo do raio. Existe, assim, uma redução do momento fletor máximo e, em geral, as quantidades de armadura totais têm tendência a ser reduzidas em relação à situação de apoio pelo intradorso.

Verifica-se que os momentos, em módulo, nas zonas dos apoios são cerca de 50% inferiores aos obtidos na solução apoiada ao longo do bordo interior (263 kNm/m para 128 kNm/m), sendo que no bordo livre são um pouco superiores (181,6 kNm/m para 116,5 kNm/m).

Por fim, de modo a obter uma comparação direta entre as três soluções anteriormente estudadas, resumem-se na tabela 15, os valores de deslocamentos, frequência e momentos fletores reduzidos.

Tabela 15 – Tabela comparativa de soluções.

Secção	Apoiada pelo intradorso		Apoiada pelo extradorso	
	Variável	Constante	Constante	
Deslocamento máximo (cm)	1,02	0,83 ↓	0,67 ↓	
Frequência própria (Hz)	5,34	5,95 ↑	7,02 ↑	
Momento fletor reduzido máximo	0,11	0,08 ↓	0,06 ↓	

Pelos valores obtidos, verifica-se que a adoção de uma secção transversal variável em detrimento de uma secção constante, não traz benefícios ao comportamento estrutural, pois há um aumento nos deslocamentos (limitado embora) e uma diminuição da frequência própria devido à diminuição da rigidez da estrutura. No entanto à que ter em conta que as estruturas tem diferentes quantidades de betão associadas.

Quanto à colocação dos apoios, observa-se que efetuar apoio ao longo do extradorso, confere mais rigidez à estrutura e conseqüentemente menores valores de deslocamentos e maiores frequências próprias. Verificou-se também uma diminuição dos momentos e uma conseqüente eficiência nas quantidades de armaduras.

4.3 Variação da espessura da laje

Anteriormente, estudou-se e comparou-se a diferença no comportamento da laje caso se adotasse uma espessura variável ou constante. Constatou-se que a forma da secção transversal influencia o comportamento da estrutura, pelo que neste ponto analisa-se a variação da altura da secção.

De modo a analisar o comportamento da estrutura para uma secção deste tipo, fez-se variar a sua altura mantendo os outros parâmetros inalterados.

Na Figura 37 representa-se a variação dos deslocamentos máximos na estrutura e os valores da primeira frequência de vibração para diferentes alturas da laje.

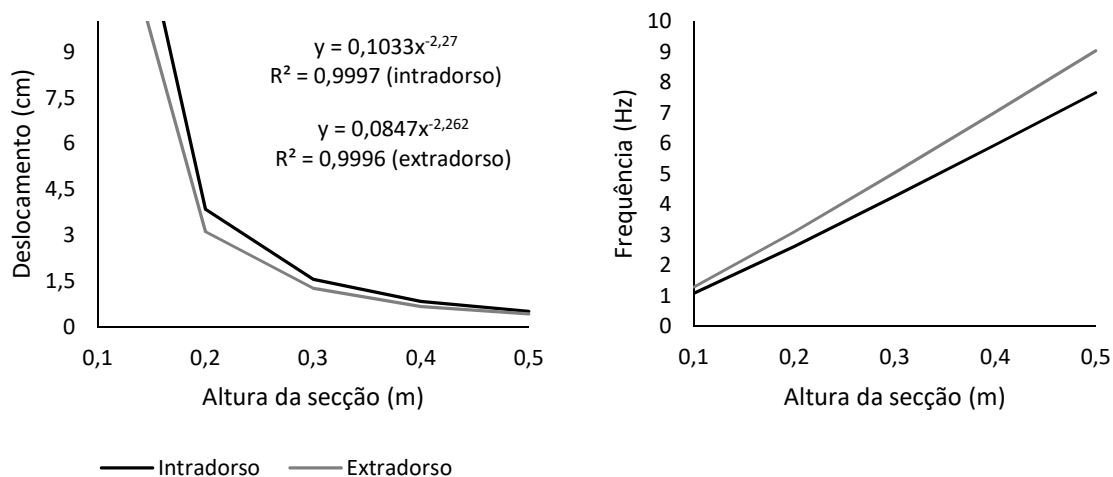


Figura 37 - Variação do deslocamento das estruturas para diferentes alturas da secção.

De acordo com a análise do gráfico dos deslocamentos verifica-se que estes diminuem com o aumento da altura da secção transversal, à semelhança do que sucede na generalidade das lajes, apesar de que com espessuras maiores essa eficiência diminui, pois o aumento de peso acaba por passar a ter influência contrária. Ambas as retas de variação dos deslocamentos têm variações semelhantes podendo-se, desta forma, concluir que o aumento da secção transversal afeta de igual modo a rigidez para ambas as condições de apoio.

Verifica-se, analisando os dois gráficos que a altura da secção deveria estar na gama 0,35 a 0,4 m de modo a controlar os deslocamentos a valores aceitáveis e evitar entrar na gama mais desfavorável de frequências. Enquanto a variação dos deslocamentos é exponencial com a espessura, para as frequências é linear. Refira-se que para espessuras inferiores a 0,3 m as frequências próprias apresentam valores a evitar pois estão dentro do intervalo de frequências de risco em termos do conforto dos utilizadores.

Resta avaliar o dimensionamento da estrutura ao estado limite último. Para isso traçou-se na figura 38 a variação do momento fletor circunferencial reduzido máximo para as diferentes alturas de secção adotadas.

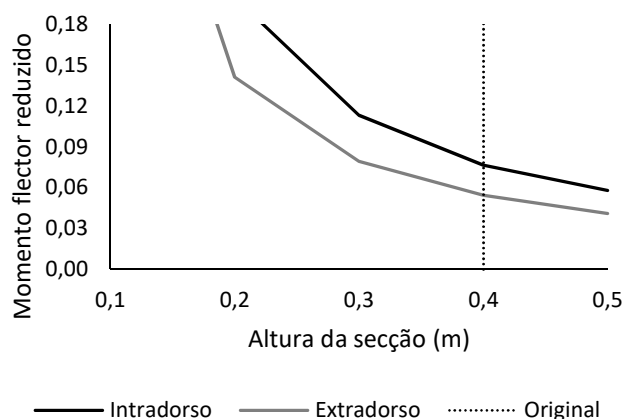


Figura 38 - Variação do momento fletor circunferencial reduzido das estruturas para diferentes alturas de seção.

Pela análise da Figura 38 verifica-se que o espessamento da seção transversal conduz a uma diminuição dos momentos fletores reduzidos. Isto é facilmente explicado, uma vez que, com o espessamento da seção existe um aumento da altura útil e uma consequente redução dos momentos fletores reduzidos, apesar do aumento dos esforços devido ao peso próprio.

Confirma-se que a escolha da altura da seção transversal é sobretudo condicionada pelo estado limite de serviço, uma vez que, mesmo para valores de espessura da ordem de grandeza de 0,3m e inferiores, ainda se obtêm condições de ductilidade e quantidades de armaduras aceitáveis. Refira-se, no entanto, que para a disposição circular da armadura a limitação do diâmetro a 12 mm, no máximo 16 mm, é fundamental em termos da execução.

4.4 Variação do ângulo entre apoios

Como explicado anteriormente, analisa-se, neste subcapítulo, uma variação ao afastamento entre apoios, mantendo todos os outros parâmetros inalterados. Elaboraram-se vários modelos com o intuito de entender de que forma o afastamento entre apoios, afeta o funcionamento estrutural da solução.

Antes de mais, refira-se que um determinado ângulo de afastamento entre apoios conduz a valores de afastamento distintos para soluções interior ou exteriormente apoiadas, pois o perímetro do bordo exterior é superior ao perímetro do bordo interior. No entanto, assim, é possível uma comparação direta entre soluções (mesmo número de apoios).

Na figura 39 ilustra-se a variação do deslocamento e da frequência fundamental para um aumento do ângulo entre apoios e na figura 41 descreve-se a variação do momento fletor circunferencial reduzido. Refira-se que, os gráficos representados de deslocamentos e de momentos fletores reduzidos são correspondentes aos valores máximos obtidos. O gráfico de frequências corresponde à frequência fundamental de cada solução.

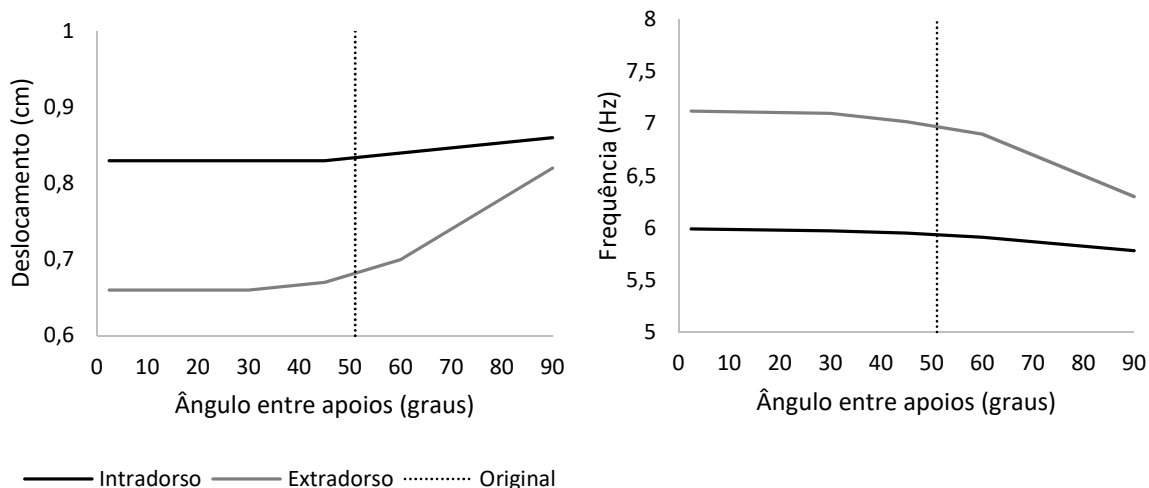


Figura 39 – Variação do deslocamento e da frequência para um acréscimo do ângulo entre apoios.

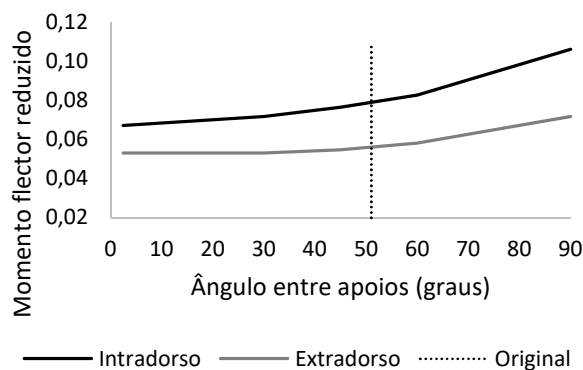


Figura 40 - Variação do momento flector reduzido para um acréscimo do ângulo entre apoios.

Em primeiro lugar, é notório que para ângulos entre apoios mais reduzidos, uma estrutura apoiada pelo extradorso apresenta menores deslocamentos do que uma estrutura apoiada pelo intradorso. Essa diferença vai diminuindo, à medida que o espaçamento entre apoios aumenta.

É possível observar ainda que, para as estruturas analisadas, o aumento do ângulo entre apoios não faz variar consideravelmente o valor de deslocamentos. Esta afirmação é sobretudo válida, para estruturas apoiadas ao longo do bordo interior, o que estará ligado ao facto do raio adotado ser baixo. Assim constata-se que, para esta gama de variação do ângulo entre apoios, a rigidez da estrutura não é significativamente afetada.

Relativamente às frequências, verifica-se que a variação é concordante com a obtida para os deslocamentos. As frequências são, portanto, pouco suscetíveis à variação do ângulo entre apoios, principalmente para ângulos de apoios mais reduzidos.

Deste modo constata-se, como seria expectável, que a alteração deste parâmetro da geometria do problema influencia de modo semelhante os deslocamentos e as frequências. Verifica-se, por outro lado, que para toda a gama de ângulos analisada a frequência está acima de 5 Hz não condicionando o dimensionamento da estrutura.

Relativamente à variação do momento fletor reduzido, observa-se que aumenta com o acréscimo do ângulo entre apoios, mas que não se verificam limitações deste ponto de vista.

É, no entanto, importante referir que apesar de não se verificarem alterações significativas dos deslocamentos, frequências e momentos fletores reduzidos com a variação do ângulo entre apoios, seria necessário uma avaliação ao esforço transversal nas seções próximas dos apoios. O aumento do afastamento entre apoios, conduz a que cada um tenha de suportar uma carga superior.

4.5 Variação do raio médio

Devido a diversos fatores, poderá ser necessário, em projeto, considerar andamentos da obra com raios superiores aos habituais para escadas. Desta forma, fará todo o sentido em estudar a variação deste parâmetro para se perceber das consequências no funcionamento da estrutura.

Partindo da estrutura base, com secção transversal constante procede-se à variação do raio médio e avaliam-se os deslocamentos, frequência e momentos fletores reduzidos. Na figura 41 à esquerda avalia-se a variação do deslocamento para diferentes valores de raio e à direita a variação da frequência fundamental da estrutura.

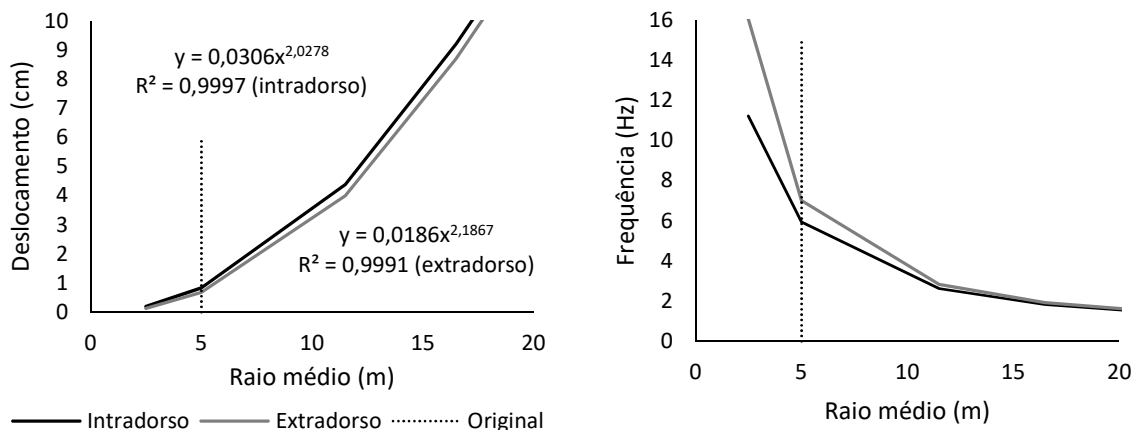


Figura 41 - Variação do deslocamento e da frequência para um acréscimo do raio médio.

Antes de mais, verifica-se que a variação deste parâmetro influencia de igual modo uma estrutura apoiada pelos bordos interior ou exterior e que os deslocamentos tendem para infinito com o raio, o que se compreende facilmente pois corresponderia a um alinhamento reto.

Como se sabe, é devido à sua curvatura que a estrutura se pode equilibrar, sendo que se fosse reta, seria hipostática. Assim, confirma-se a relevância deste parâmetro no comportamento estrutural da laje.

Observa-se ainda que não se poderiam adotar raios muito superiores aos de projeto uma vez que já se tem deslocamentos próximos dos máximos razoáveis. Desta forma, se fosse necessário um raio maior, ter-se-ia que aumentar a rigidez com recurso, por exemplo, ao espessamento da secção transversal.

Relativamente às frequências próprias das estruturas verifica-se que diminuem com o aumento do raio, mas que até raios de aproximadamente 10 m não seria condicionante, pelo que se confirma que o dimensionamento de estruturas deste tipo é influenciado sobretudo pela limitação das deformações.

De seguida avalia-se a variação do raio médio e a sua influência no estado limite último a partir da figura 42.

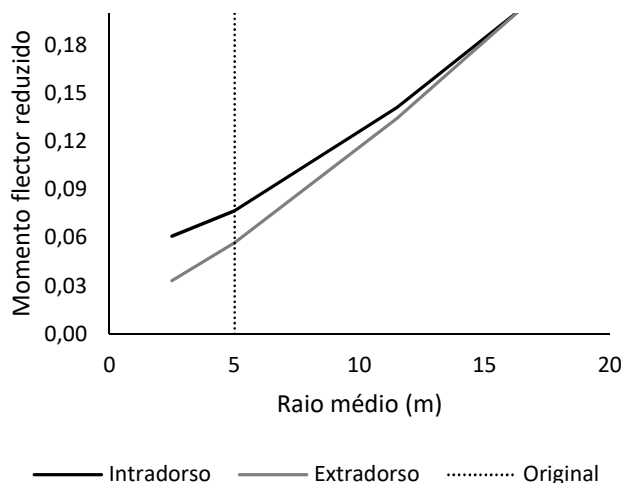


Figura 42 -Variação do momento fletor circunferencial reduzido para um acréscimo do raio médio.

Pela análise do gráfico anterior, verifica-se que a estrutura terá sempre esforços máximos superiores caso apoiada pelo intradorso e que esta diferença diminui com o aumento do raio conduzindo no limite a valores semelhantes para as duas soluções.

Observa-se também que relativamente ao momento máximo não haveria limitações significativas até raios de 15 m, portanto também na análise deste parâmetro se conclui da maior importância do estado limite de serviço no dimensionamento.

4.6 Variação do comprimento da “consola”

Tendo como objetivo permitir a passagem das pessoas, a largura em planta da laje, é importante de modo a valorizar as condições da sua utilização. Assim sendo, pode ser necessário adotar em projeto maiores larguras, dentro de limites razoáveis de economia.

Considerou-se interessante analisar de que forma o comprimento da “consola” afeta a resposta estrutural. Efetua-se neste ponto, a referida análise, fazendo variar o comprimento da “consola” ao mesmo tempo que se mantêm as outras características geométricas constantes.

Os resultados relativos aos deslocamentos máximos e frequências próprias ilustram-se na figura 43, e os resultados relativos aos momentos fletores reduzidos, para a secção mais esforçada, na figura 44.

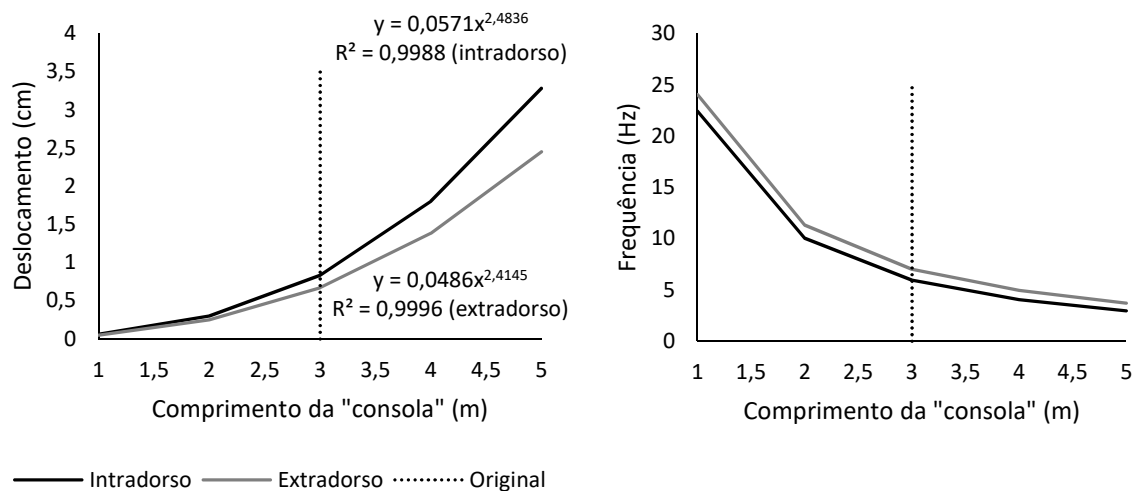


Figura 43 - Variação do deslocamento e da frequência própria para um acréscimo do comprimento da “consola”.

Com base na análise do gráfico anterior pode constatar-se que os deslocamentos aumentam, mais do que linearmente, com o acréscimo do comprimento da “consola”, sendo que ambas as soluções de apoio apresentam valores de deslocamentos semelhantes para comprimentos de consola mais baixos, mas que com o aumento do comprimento da “consola” a solução apoiada pelo extradorso apresenta valores de deslocamentos significativamente inferiores.

Através das equações deduzidas da variação do deslocamento em função do comprimento da “consola”, verifica-se que os deslocamentos variam de forma aproximadamente exponencial a partir de cerca de 2,5 m de comprimento. Como se sabe, para uma viga encastrada, os deslocamentos variam com a quarta potência do seu comprimento, pelo que comparando ambos os casos constata-se que, para uma estrutura curva, o comprimento da “consola” influencia um pouco menos o valor dos deslocamentos.

Pela análise do gráfico relativo à variação dos deslocamentos, observa-se que a partir de uma largura da plataforma superior a 3,5 m, começa a ser claramente vantajoso apoiar a estrutura pelo seu bordo exterior, pois é a partir desse valor que se começam a notar mais as diferenças nos valores dos deslocamentos entre ambas as soluções.

Constata-se ainda que não se poderiam adotar comprimentos muito superiores aos de projeto, uma vez que os deslocamentos máximos começam claramente a tomar maiores valores, o que poderia ser contrariado, até a um certo ponto, com um aumento de espessura. Como se referiu na análise do exemplo de projeto, a imposição de uma inclinação inicial na estrutura ou no acabamento final permite contrariar também os efeitos do aumento de inclinação com o tempo.

Quanto ao gráfico que traduz a variação das frequências fundamentais para um acréscimo do comprimento da consola, observa-se que não existe praticamente diferença entre apoiar a estrutura pelo bordo interior ou pelo exterior. Estas diminuem com o aumento do comprimento da consola, no entanto, não se verificam problemas relacionados com vibrações excessivas na estrutura até

comprimentos na ordem dos 5 m. Conclui-se assim que, também nesta análise, o que limita a geometria da laje é o controlo da sua deformabilidade.

De seguida, analisa-se com recurso à figura 44 a variação do momento fletor circunferencial reduzido.

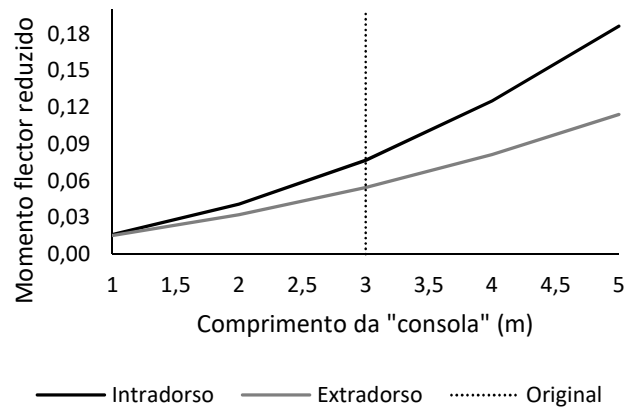


Figura 44 - Variação do momento fletor circunferencial reduzido das estruturas para um acréscimo do comprimento da consola.

Os momentos circunferenciais aumentam com o comprimento da "consola" dando origem a momentos fletores reduzidos mais elevados como se pode observar na figura 44. Observa-se que a variação deste parâmetro tem mais influência numa solução com apoios no bordo interior do que uma solução apoiada exteriormente.

Para o comprimento utilizado na estrutura original verifica-se que as soluções se encontram ambas folgadas em termos de dimensionamento à flexão, confirmando-se aqui também que o estado limite último não condiciona o dimensionamento da estrutura.

5. CASO DE ESTUDO 2

Ao longo dos capítulos anteriores observou-se que em estruturas circulares é apenas necessário a colocação de apoios simples ao longo de um dos seus bordos, para que o equilíbrio seja garantido. Ora, tendo por base tal comportamento estrutural, é interessante avaliar a generalização destas soluções para estruturas com geometria em “S”.

No caso de uma estrutura plana em “S”, existem três formas distintas de a apoiar, tendo por base o enquadramento do tema. O apoio pode ser efetuado apoiando apenas ao longo dos seus bordos exteriores ou interiores ou continuamente ao longo do mesmo bordo da estrutura, como ilustrado na figura 45.

Este capítulo tem por objetivo efetuar uma análise simplificada relativamente ao comportamento estrutural com este tipo de geometria. Assim sendo, avaliam-se ao longo deste capítulo os mesmos parâmetros de comportamento estrutural das análises anteriores, ou seja, os deslocamentos, as frequências próprias e o dimensionamento à flexão da laje.

5.1 Caracterização e modelação

A análise que se irá realizar será relativa a um problema conceptual e não a um exemplo prático existente, sendo por isso importante definir em primeiro lugar a geometria da estrutura.

Para o efeito, assume-se uma estrutura com características geométricas semelhantes às do problema base. Definiu-se, portanto, um raio médio de 5 m, uma secção com espessura constante de 0,4 m e admitiu-se um espaçamento entre apoios de 50° . Fez-se ainda variar a curvatura em planta a quartos de círculo, ou seja, de 90° em 90° .

Para um melhor entendimento das variáveis em estudo neste capítulo, ilustra-se na figura 45 a parametrização do problema.

O problema foi analisado com recurso ao programa de elementos finitos SAP2000, sendo definida uma malha com características semelhantes à utilizada na análise dos problemas anteriores, uma vez que também para este caso se provou a convergência da solução para este grau de refinamento adotado.

Os apoios simples colocados ao longo dos bordos bloqueiam as translações verticais. Nos extremos da laje foram utilizados encastramentos deslizantes sendo que estes bloqueiam a rotação circunferencial.

As ações e as suas combinações, assim como os materiais adotados foram os mesmos para o problema base e, portanto, definidos em 3.1.

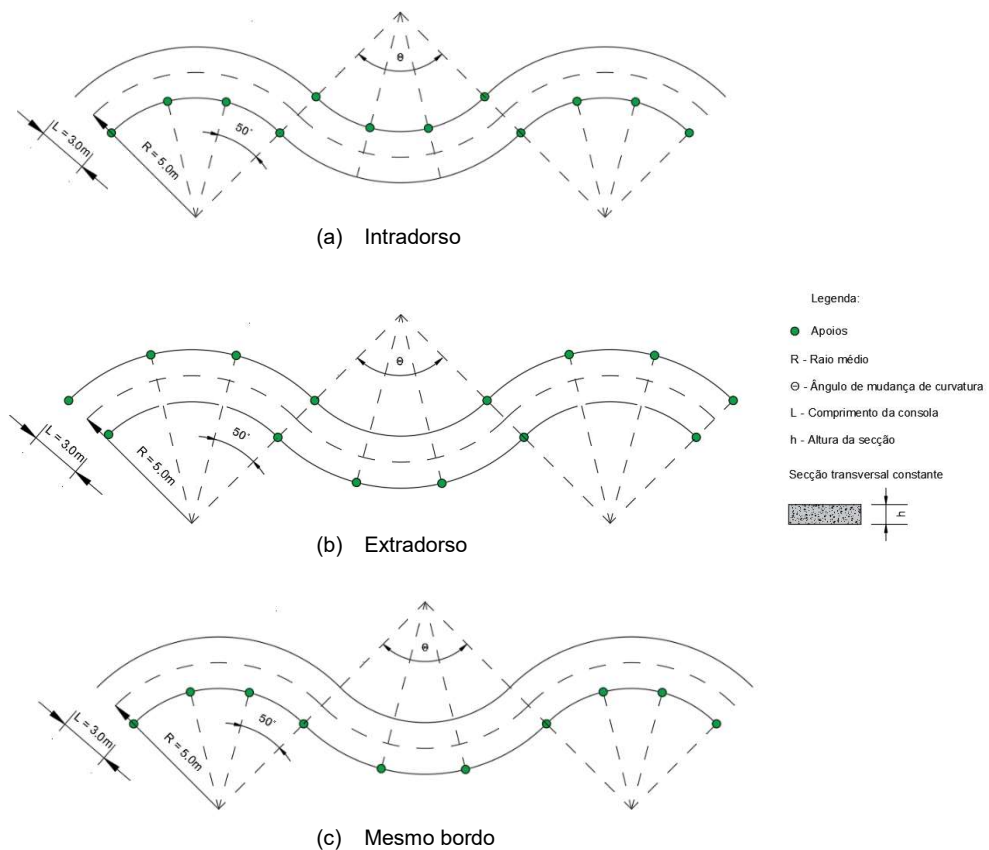


Figura 45 - Parametrização caso de estudo 2.

5.2 Estrutura apoiada pelo intradorso

Iniciou-se o estudo pela análise da estrutura apoiada apenas ao longo dos seus intradorsos, ver figura 45 (a). Num primeiro ponto avalia-se os deslocamentos obtidos assim como as frequências próprias da estrutura, e num segundo ponto, a distribuição de momentos e o seu dimensionamento à flexão.

5.2.1 Análise dos deslocamentos

Como já foi referido ao longo desta dissertação, muitas das vezes o dimensionamento das estruturas é condicionado pelo seu comportamento em serviço. Assim sendo, e com o intuito de estudar um dos parâmetros que afeta o comportamento em serviço das estruturas ilustram-se, na figura 46, os deslocamentos elásticos obtidos para o caso em questão.

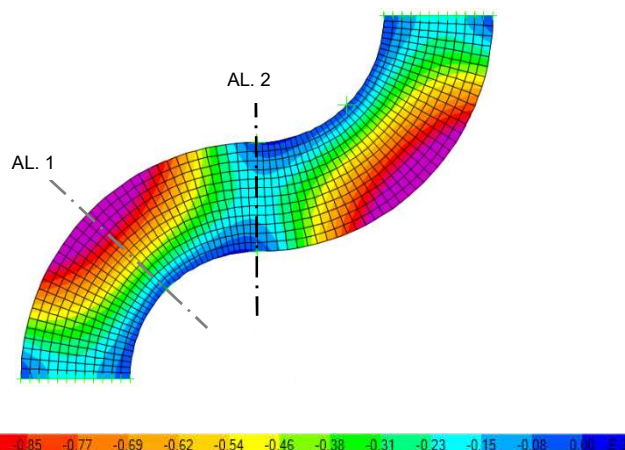


Figura 46 - Deslocamentos elásticos estrutura em “S” apoiada pelo intradorso.

Para uma melhor leitura dos valores envolvidos e da forma da deformada da estrutura, ilustram-se na figura 47, três cortes. No gráfico da esquerda, representam-se os cortes indicados na figura 46 por AL.1 e AL.2 e no gráfico da direita um corte efetuado ao longo do perímetro de um bordo livre da estrutura.

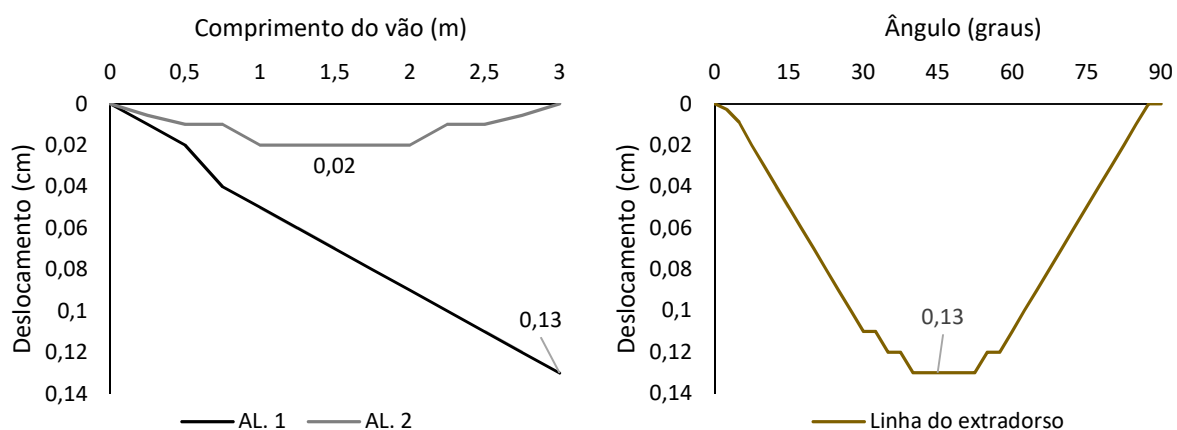


Figura 47 – Deslocamentos elásticos ao longo das seções específicas.

Pela análise da figura 46 e figura 47, verifica-se, como seria de prever atendendo à disposição dos apoios ao longo da obra, que os deslocamentos variam radial e circunferencialmente, ao contrário do que sucedia nos problemas anteriormente estudados, onde esta variação apenas ocorria ao longo do raio.

Comparando os deslocamentos ao longo do corte AL.1 e AL.2 verifica-se que apresentam variações muito distintas. É desta forma possível concluir, que existem duas zonas de comportamento diferente na laje, a zona entre mudanças de curvatura (em planta) e a zona de curvatura constante.

Relativamente à zona de curvatura constante, a deformada da estrutura é idêntica à das estruturas anteriormente analisadas. Na zona de mudança de curvatura a deformada da estrutura, ao longo do vão, assemelha-se ao de uma viga simplesmente apoiada (ver figura 47). Se se quiser comparar o valor máximo obtido, com o que se obteria para uma viga simplesmente apoiada, ter-se-ia:

$$\delta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{5p_{qp}L^4}{384D_f} \quad (5.1)$$

onde a rigidez de flexão de uma laje, é dada por:

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.2)$$

Obtém-se, portanto:

$$\delta\left(x = \frac{4}{2}\right) = \frac{5 \times 11,9 \times 3^4}{384 \times \frac{33 \times 10^6 \times 0,4^3}{12(1-0,2^2)}} = 6,85 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,007 \text{ cm} < \mathbf{0,02 \text{ cm}} \quad (5.3)$$

Esta diferença pode ser explicada pelo facto de a zona do bordo livre apresentar uma maior deformação e, por outro lado, pelo comportamento circunferencial se apoiar na faixa transversal mais rígida de laje entre apoios, com alguma continuidade e momentos negativos nessa zona.

Outra comparação interessante é notar o aumento claro de rigidez relativamente ao problema base. O deslocamento máximo é de 1,3 mm o que representa uma redução de aproximadamente 6,5 vezes relativamente ao anterior. Constata-se assim que, a adoção de uma solução deste tipo resulta num aumento de rigidez substancial quando comparada com uma solução com geometria circular, pelo que se esperará também um aumento das frequências próprias.

5.2.2 Análise das vibrações

De seguida analisam-se os modos de vibração da estrutura assim como os períodos e frequências correspondentes, com o intuito de analisar o controlo dos efeitos da vibração.

Na figura 48 representam-se os referidos modos de vibração.

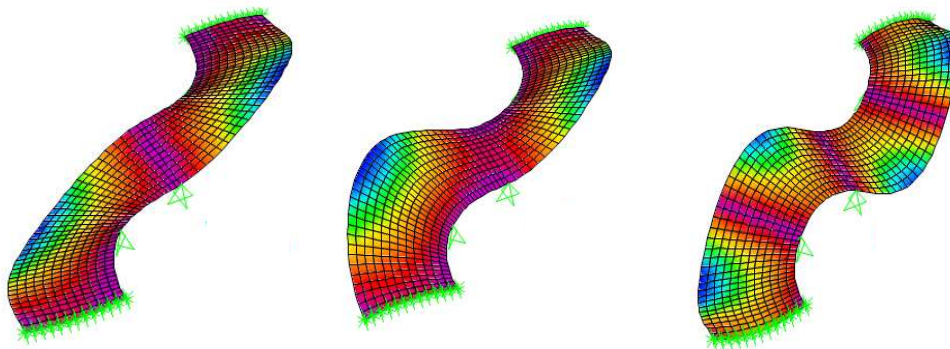


Figura 48 – 1º, 2º e 3º modo de vibração.

Complementa-se a figura anterior com a tabela 16, onde se indicam os períodos e frequências correspondentes a cada modo ilustrado.

Tabela 16 - Período e frequências de vibração.

Modo	Período (seg)	Frequência (Hz)
1º Modo	0,07	15,18
2º Modo	0,06	17,2
3º Modo	0,03	34,13

A frequência fundamental da estrutura é de 15,18 Hz o que comprova o anteriormente dito e torna este modelo estrutural livre de qualquer problema de vibração. Os modos de vibração apresentados apresentam semelhanças com os modos da estrutura base, o que comprova uma resposta com algumas semelhanças.

5.2.3 Análise dos esforços

Analise-se de seguida as distribuições e níveis dos momentos na laje, pelo que se representam na figura 49 os momentos radiais.

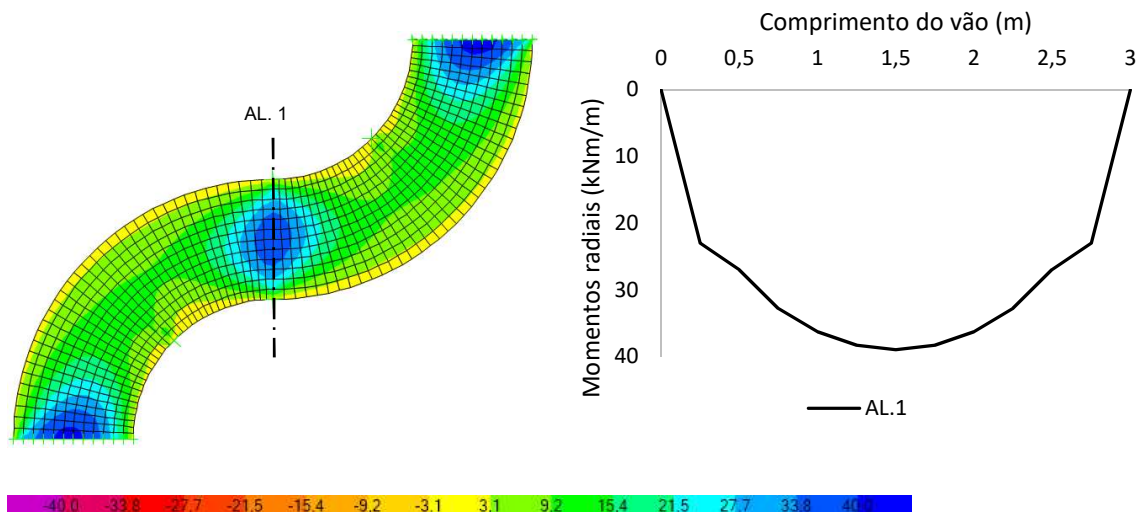


Figura 49 – Distribuição de momentos na direção radial no alinhamento AL1.

No caso base os momentos na direção radial não tinham grande expressão, o que já não sucede neste caso por consequência de existirem apoios de um e outro lado na seção de mudança de curvatura. Desta forma, verifica-se que já se obtêm valores significativos relativamente aos momentos nesta direção.

Compare-se mais uma vez, os valores obtidos, com os que se obteriam recorrendo ao modelo de viga de Euler-Bernoulli.

Como é sabido, para uma faixa de laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga uniforme ao longo do vão, o valor máximo de momento é dado:

$$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{p_{sd}L^2}{8} = \frac{19,4 \cdot 3^2}{8} = 21,8 < 40 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \quad (5.4)$$

Verifica-se que o valor obtido pelo MEF é distinto do valor obtido considerando o modelo de viga de Euler-Bernoulli, como seria expectável uma vez que uma vez que uma laje não pode ser modelada por um modelo de viga. No entanto e uma vez que o valor obtido pelo MEF foi superior pode-se concluir que há alguma carga das bandas laterais que se apoia nessa banda central.

Quanto aos momentos na direção circunferencial e aos momentos torsores, estes representam-se à esquerda e à direita respetivamente, na figura 50.

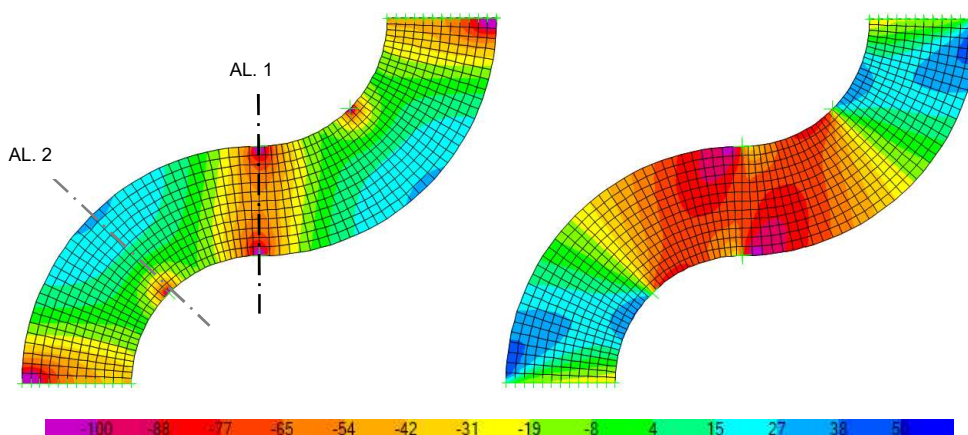


Figura 50 – Distribuição de momentos na direção circunferencial (esq) e torsores (dir.).

Com base nos valores obtidos, traçam-se as distribuições de momentos circunferenciais ao longo dos alinhamentos descritos por AL.1 e AL.2.

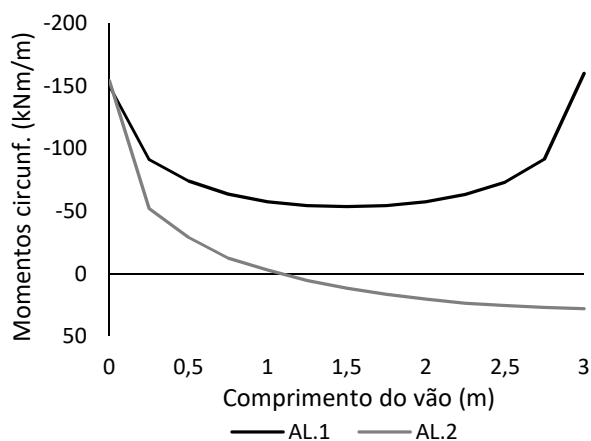


Figura 51 - Distribuição de momentos na direção circunferencial nos alinhamentos AL1 e AL2.

Observa-se que os valores máximos positivos ocorrem na zona do bordo livre e os máximos valores negativos ocorrem na zona de mudança de curvatura, o que vem no seguimento do referido anteriormente.

É interessante verificar que contrariamente ao que sucedia para uma estrutura circular apoiada ao longo do intradorso, os momentos ao longo do bordo livre apresentam sinal contrário ao que se havia verificado uma vez que o comportamento é misto entre o do caso base e uma banda contínua.

Outra importante diferença é o facto que devido à estrutura não ser simétrica, os momentos torsões que eram muito reduzidos no problema base, apresentam agora valores mais significativos atingindo máximos na ordem dos 90 kNm/m.

Na tabela 17, verifica-se os níveis de esforços na laje, relativamente às zonas mais condicionantes e calculam-se as respetivas quantidades de armadura necessárias à verificação de segurança nessa zona.

Tabela 17 - Verificação do nível de esforços na laje e cálculo de armaduras.

	μ	Área de armadura necessária As/s [cm ² /m]
$M_{sd,rr}^*$	0,04	6,33
$M_{sd,\theta\theta}^*$	0,06	9,96

Comparando estes valores com os obtidos para a estrutura circular com secção constante, verifica-se uma redução nas quantidades de armadura, contribuindo para mostrar que a adoção de uma geometria em “S” é mais eficiente do ponto de vista estrutural, do que a estrutura com geometria circular.

5.3 Estrutura apoiada pelo extradorso

A situação complementar à estudada no ponto anterior corresponde à colocação dos apoios nos bordos exteriores da laje. Por conseguinte, analisa-se ao longo desta subsecção o caso em questão e compara-se com os resultados obtidos anteriormente.

5.3.1 Análise dos deslocamentos

Na figura 52, traçaram-se os deslocamentos obtidos ao longo do alinhamento AL.2 (figura à esquerda) e ao longo do bordo livre, neste caso o intradorso, (figura à direita).

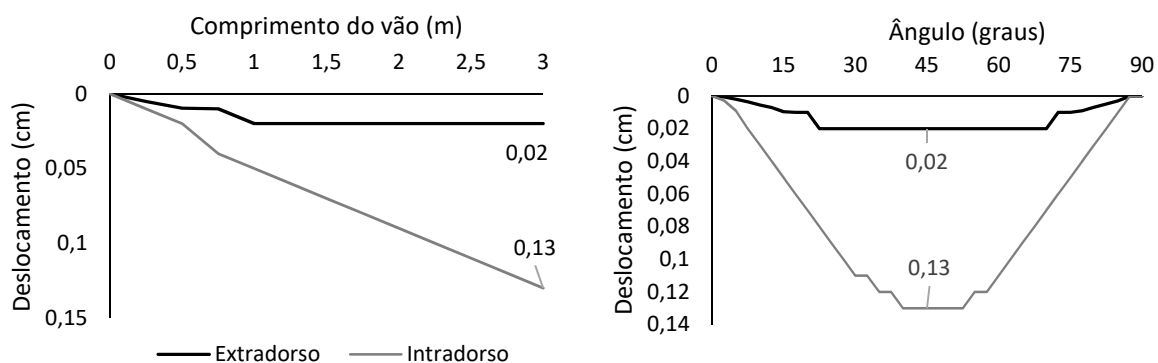


Figura 52 – Deslocamentos ao longo do corte AL.2.

À semelhança do que se verificou no problema estudado no ponto anterior, verifica-se aqui também que os deslocamentos variam radial e circunferencialmente, como expectável uma vez que a estrutura não é simétrica.

A deformada quer ao longo do raio quer ao longo do ângulo apresenta um andamento semelhante ao observado para o caso anterior. No entanto, verifica-se que os valores máximos são mais reduzidos. Para o caso em estudo, obteve-se um deslocamento máximo de 0,02m, ou seja 6,5 vezes inferior ao valor obtido para uma estrutura circular apoiada ao longo do extradorso, o que corresponde ao mesmo tipo de redução para as situações de apoio no intradorso.

Assim sendo, estes resultados apontam também para que apoiar a estrutura ao longo do extradorso conduz a soluções mais rígidas.

5.3.2 Análise das frequências

De seguida, analisam-se os modos de vibração e as frequências próprias da estrutura, parâmetros importantes na verificação ao estado limite de vibração.

Ilustram-se de seguida na figura 53 os três primeiros modos de vibração.

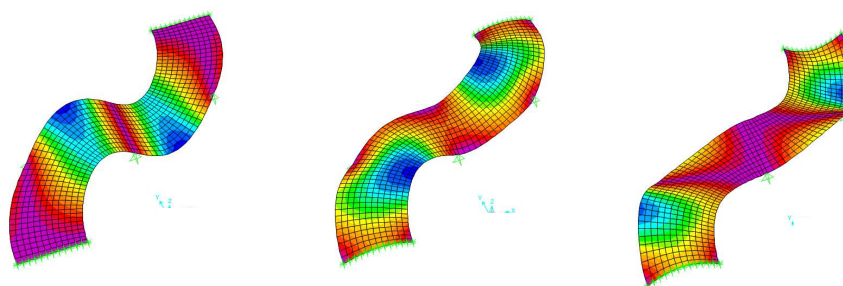


Figura 54 – 1º, 2º e 3º modo de vibração.

Complementa-se a figura anterior com a tabela 18, onde se indicam os períodos e frequências correspondentes a cada modo ilustrado.

Tabela 18 – Períodos e frequências associadas a cada modo de vibração.

Modo	Período (seg)	Frequência (Hz)
1º Modo	0,04	28,0
2º Modo	0,03	34,2
3º Modo	0,03	36,5

Verifica-se que a estrutura apresenta frequências próprias ainda mais elevadas que no caso anterior, não apresentando assim qualquer problema de vibração.

5.3.3 Análise dos esforços

De seguida analisam-se os valores de momentos fletores e torsões, $M_{r\theta}$, e suas distribuições nas várias direções principais, com o intuito de verificar o dimensionamento à flexão da laje.

Em primeira instância ilustra-se na Figura 55 a distribuição dos momentos na direção radial e compara-se com os valores obtidos para o caso anterior.

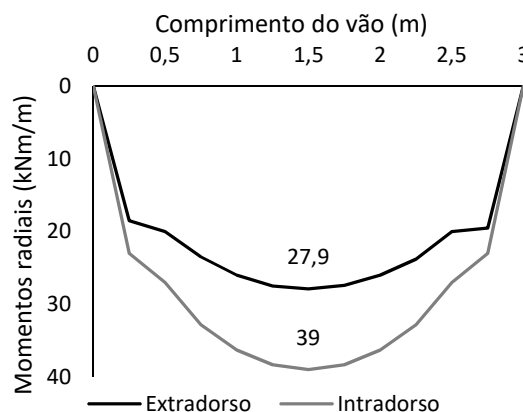


Figura 55 – Distribuição de momentos na direção radial entre apoios

Verifica-se que relativamente à distribuição de momentos nesta direção que não há muito a acrescentar da análise efetuada para a estrutura apoiada ao longo do intradorso. À semelhança do que se havia observado anteriormente, os momentos são positivos em toda a laje e os máximos valores ocorrem também na zona central, com uma ligeira redução no valor de pico de cerca de 15 kNm.

Analisa-se de seguida a direção com mais impacto no dimensionamento de uma estrutura deste tipo, a direção circunferencial. Para uma melhor compreensão da distribuição de momentos e de modo a que se consiga comparar os resultados obtidos com os do caso anteriormente analisado, traçou-se o gráfico representado na figura 56, onde os alinhamentos são correspondentes às zonas referidas na figura 50.

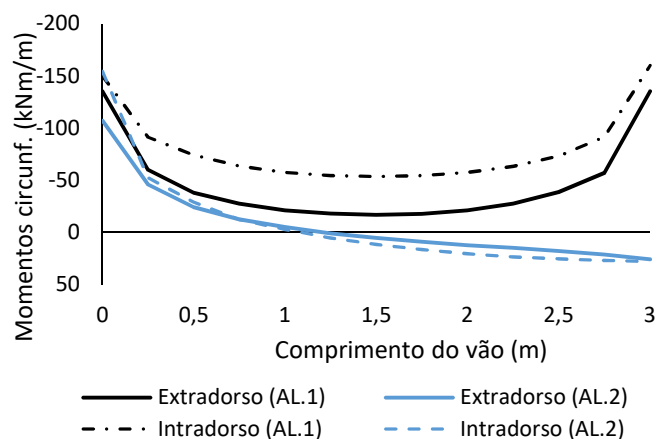


Figura 56 – Distribuição de momentos na direção circunferencial.

Analisando em primeira instância a distribuição de momentos ao longo do alinhamento AL.1, verifica-se que os momentos são negativos tendo um máximo junto aos apoios, reduzindo até um mínimo na zona de meio vão (semelhante a um apoio fungiforme tipo). Comparativamente à solução anterior, verifica-se que há uma redução nos seus valores ao longo de todo o alinhamento.

Relativamente aos momentos circunferenciais verifica-se que a sua distribuição ao longo do vão é muito semelhante ao caso anterior. Há no entanto, uma redução no seu valor na zona do apoio em cerca de 35% (de 155 kNm/m para 105 kNm/m).

Relativamente aos momentos torsões verificou-se uma redução significativa em toda a laje, passando de aproximadamente e em módulo, de 90 para 20 kNm/m nas zonas mais esforçadas.

Por fim, analisa-se o dimensionamento da laje à flexão resumindo os respetivos valores na Tabela 19.

Tabela 19 - Momentos fletores reduzidos e quantidade necessária de armadura.

	μ	Área de armadura necessária As/s [cm ² /m]
$M_{sd,rr}^*$	0,02	6,24
$M_{sd,\theta\theta}^*$	0,04	6,54

Verifica-se uma certa redução em termos da quantidade de armadura necessária quando se comparam estes valores com os obtidos para a solução apoiada pelo intradorso.

5.4 Estrutura continuamente apoiada ao longo de um bordo

Estudados os casos anteriores onde se fez apoiar a estrutura só pelo intradorso ou só pelo extradorso, surge o interesse em analisar o comportamento, apoiando-a sempre ao longo do mesmo bordo. Desta forma existirão zonas onde a estrutura se encontra interiormente apoiada e outras onde o apoio será efetuado pelo bordo exterior.

5.4.1 Análise dos deslocamentos

Na figura 57, traçam-se o valor dos deslocamentos ao longo do corte AL.1 (esquerda) e ao longo do bordo livre (direita) e comparam-se com os respectivos valores das soluções anteriormente estudadas.

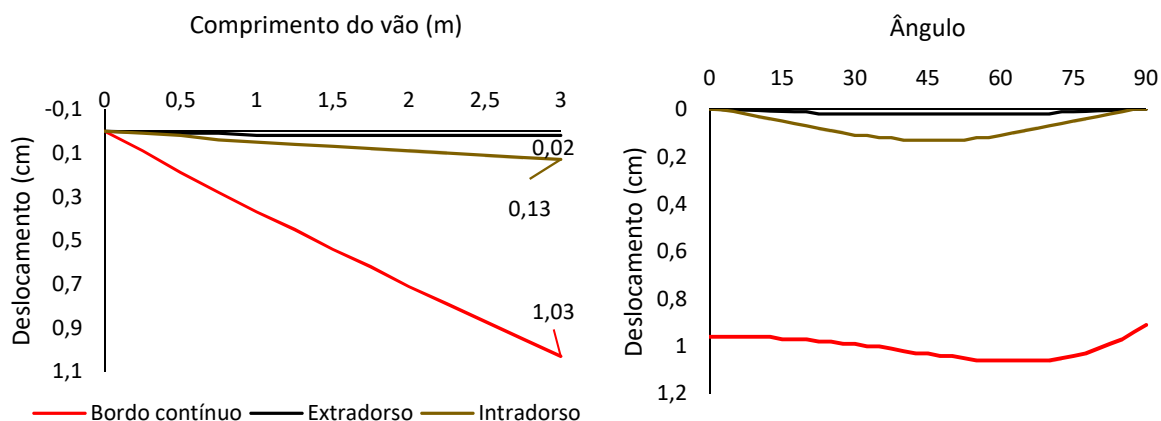


Figura 57 – Deslocamentos elásticos das várias soluções indicadas.

Através da análise dos gráficos anteriores é possível verificar que a ordem de grandeza dos deslocamentos aproxima-se muito mais das situações de simetria circular. O valor máximo obtido para o deslocamento foi de 1,03 cm o que, se comparado com o caso anterior de apoio só no extradorso, corresponde aproximadamente a um aumento de 8 vezes. Estes resultados são devidos à não existência de uma zona apoiada nos dois bordos, como sucedia nos casos anteriores na zona em que a curvatura em planta variava.

Analisando a forma da deformada ao longo do seu bordo livre (gráfico da direita) verifica-se que os valores apresentam uma ligeira variação, estando esta relacionada com a curvatura em planta da estrutura.

5.4.2 Análise das vibrações

Uma vez que, a estrutura perdeu rigidez será então expectável a diminuição dos valores das suas frequências próprias. Na figura 58 apresentam-se os modos de vibração seguidos da tabela onde se descrevem os valores relativos a cada modo.

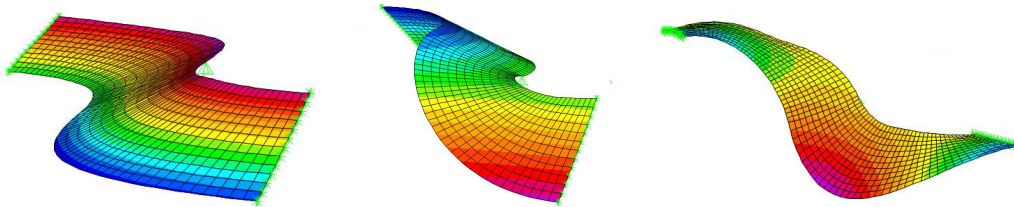


Figura 58 - 1º, 2º e 3º modo de vibração.

Complementa-se a figura anterior com a tabela 20, onde se indicam os períodos e frequências correspondentes a cada modo ilustrado.

Tabela 20 - 1º, 2º e 3º modos de vibração.

Modo	Período (seg)	Frequência (Hz)
1º Modo	0,17	5,73
2º Modo	0,10	9,60
3º Modo	0,55	18,00

Quanto aos modos de vibração e à semelhança do que já se havia concluído para as estruturas estudadas, estes correspondem a deslocamentos verticais. A frequência própria da estrutura apresenta um valor de 5,73 Hz, da ordem de grandeza dos casos de simetria circular, e fora da zona que pudesse condicionar os limites de vibração aceitáveis.

Desta forma, pode-se afirmar que no caso de uma estrutura em “S” apoiada continuamente ao longo do mesmo bordo, esta não deve ir muito além das características geométricas e limitações verificadas para as situações de simetria axial.

5.4.3 Análise dos esforços

Uma vez que o apoio se efetua todo do mesmo lado, os momentos radiais e torsões têm pouca expressão, influenciando pouco o dimensionamento da estrutura. Interessa pelo contrário analisar os momentos circunferenciais uma vez que são os que têm mais influência no seu dimensionamento.

Desta forma, ilustra-se na figura 59 distribuição de momentos circunferenciais.

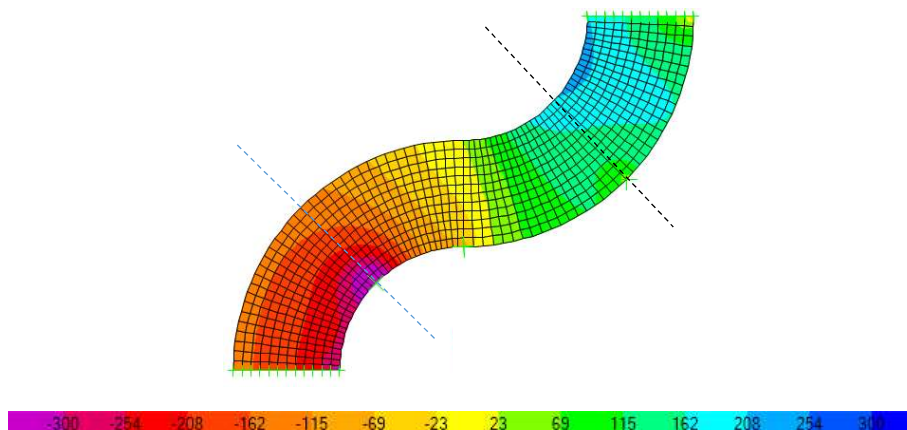


Figura 59 – Distribuição de momentos circunferenciais (kNm/m).

De modo a entender melhor a variação dos momentos ao longo do raio, efetuam-se os dois cortes (indicados na figura anterior) e representam-se na figura 60. O corte assinalado na figura, a azul, compara-se com um corte efetuado numa zona idêntica da solução apoiada pelo intradorso e o corte identificado com a cor preta, com o caso oposto.

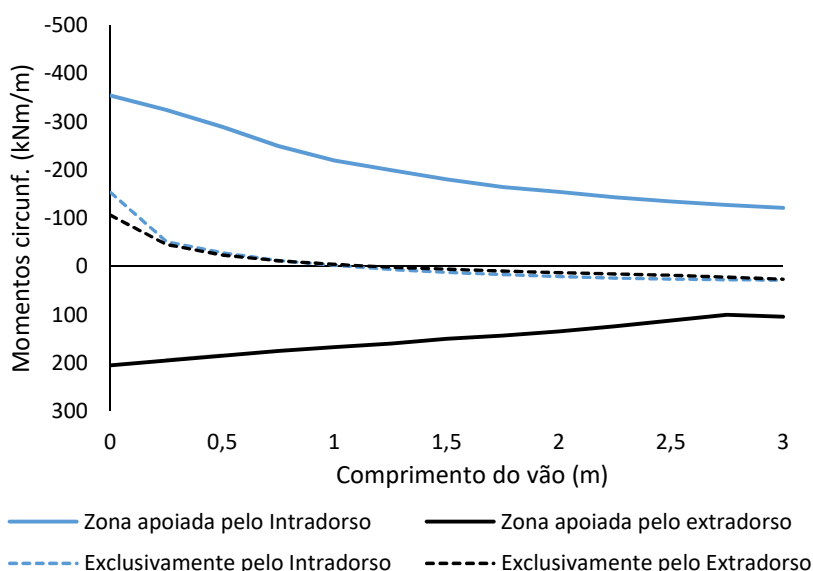


Figura 60 – Distribuição de momentos circunferenciais nas zonas referidas.

Antes de mais, verifica-se que na zona onde a solução é apoiada pelo interior os momentos têm valor negativo, conduzindo assim a trações nas fibras superiores na laje e compressões nas fibras inferiores. Já na zona onde a estrutura é apoiada pelo extradorso, os momentos têm sinal positivo, conduzindo assim a trações nas fibras inferiores. Os valores obtidos para os mesmos são próximos do que já se tinha estudado e concluído no capítulo 4. Pode-se então afirmar que a laje tem duas zonas de funcionamento distinto consoante a localização dos seus apoios tendendo para valores próximos aos casos estudados isoladamente no capítulo 4.

O momento fletor máximo reduzido para o caso em questão é de 0,15, o que significa que a laje tem esforços claramente mais elevados embora dentro de uma gama aceitável.

Em suma, pode-se afirmar que apoiar a laje ao longo de um bordo conduz a uma solução válida, que pode ser do ponto de vista estético interessante, no entanto, apresenta um comportamento pior do ponto de vista estrutural quando comparada com as outras soluções em S analisadas.

6. CONCLUSÕES

6.1 Considerações finais

Quando se pensa em estruturas em consola, é intuitivo que é necessário restringir a rotação nos apoios para que a estrutura seja estaticamente equilibrada. Ora, o que se viu ao longo desta dissertação foi que, caso a estrutura apresente curvatura em planta, é possível estabelecer uma solução estrutural. Este funcionamento torna possível este tipo estrutural, esteticamente interessante, sem um custo associado demasiado elevado.

A partir de um projeto de uma escada circular com apoio no intradorso desenvolvida para a entrada principal do Hotel Savoy Palace no Funchal, desenvolveu-se um estudo paramétrico para avaliar as principais características do funcionamento daquele tipo de estruturas.

Assim com base na referida estrutura, apoiada pelo intradorso, analisou-se o seu dimensionamento e a validade da solução, embora a necessidade de um bom controlo dos deslocamentos fosse importante. Constatou-se que os valores dos deslocamentos máximos são da ordem de 14 vezes superiores aos de uma consola encastrada. Relativamente ao dimensionamento à flexão não se verificou ser condicionante, tendo-se verificado a viabilidade das soluções com disposições correntes de armaduras.

A **análise paramétrica** foi desenvolvida com o intuito de se compreender melhor como variam as principais características do comportamento estrutural em função da variação de algumas variáveis geométricas deste tipo de estruturas.

Numa primeira instância analisou-se e compararam-se os resultados de uma estrutura com **secção transversal de altura variável ou constante**. Concluiu-se que estruturalmente a adoção de uma secção transversal constante é benéfica, uma vez que dá rigidez à estrutura e conduz a valores de deslocamentos inferiores e maiores frequências próprias. Um aspeto importante que se clarificou foi a relevância dos momentos circunferenciais para o equilíbrio e os valores reduzidos dos momentos radiais.

Quanto à adoção de **apoios ao longo do extradorso**, concluiu-se que esta solução conduziu a um relativo aumento de rigidez levando a que se obtivessem valores mais reduzidos de deslocamentos e frequências mais elevadas em relação a uma solução interiormente apoiada. Quanto aos momentos fletores, verificou-se que os mais importantes são circunferenciais, mas que neste caso, contrariamente ao esperado numa consola, são positivos e por isso as armaduras de flexão devem ser colocadas na face inferior da laje. Verificaram-se também ganhos nas quantidades de armadura relativamente à solução interiormente apoiada.

Quanto ao estudo da **variação da altura da secção transversal**, verificou-se que ambas as soluções (intradorso e extradorso) se comportam da mesma forma com a variação deste parâmetro. Houve um aumento acentuado de rigidez da estrutura com o aumento da seção transversal, conduzindo a uma diminuição dos deslocamentos e a um aumento das frequências próprias.

Outro parâmetro estudado foi a **variação do ângulo entre apoios**, tendo-se concluído que para a gama de raios médios testada não houve um aumento significativo nos deslocamentos com o aumento deste parâmetro. Da mesma forma também não se verificou uma diminuição das frequências próprias pelo que, se pode concluir que o afastamento entre apoios não condiciona a rigidez da estrutura na mesma ordem de grandeza que os restantes parâmetros estudados. Houve no entanto um aumento dos momentos fletores reduzidos máximos com o aumento do afastamento entre apoios.

A outra variável analisada foi o **raio médio da estrutura**, tendo-se observado ter uma maior influencia no comportamento estrutural. Verificou-se que o deslocamento varia aproximadamente quadraticamente com o aumento do raio médio da estrutura, influenciando ambas as soluções de forma semelhante. Há portanto uma diminuição da rigidez da estrutura com o aumento do seu raio e um conseqüente aumento dos valores de momentos fletores.

A variação do **comprimento da consola** foi o parâmetro que mais influência teve no comportamento da estrutura. Verificou-se que a sua rigidez diminui drasticamente com o aumento deste parâmetro, resultando num conseqüente aumento dos deslocamentos e diminuição das frequências próprias. Relativamente aos momentos fletores há uma variação menos acentuada do que nos deslocamentos.

Verificou-se, em geral, que a estrutura é sobretudo condicionada pelo seu comportamento em serviço, uma vez que, os limites aceitáveis de deslocamentos são mais rapidamente atingíveis do que os limites aceitáveis de momentos fletores reduzidos.

Três casos foram estudados relativamente a estruturas com geometria em "S". No que diz respeito aos casos em que o apoio se faz sempre ao longo do intradorso ou extradorso, portanto alternando o lado suportado, verificou-se que houve um aumento muito significativo de rigidez da estrutura quando comparado com os casos de geometria circular. Esse aumento de rigidez deveu-se ao alinhamento transversal com apoios nos dois lados aquando da mudança da curvatura. Houve uma redução global dos deslocamentos e um aumento das frequências próprias. Relativamente aos momentos fletores, verificou-se que houve também uma diminuição.

A estrutura apoiada pelo intradorso demonstrou ser mais flexível comparativamente à solução exteriormente apoiada e com quantidades de armadura superiores no seu dimensionamento à flexão.

Pode-se então concluir que caso se opte por uma solução deste tipo, quanto menor for o ângulo de variação de curvatura em planta mais rigidez irá ter a estrutura, uma vez que, o bordo livre irá ter um comprimento menor e a estrutura mais se assemelhará a uma faixa contínua apoiada nos alinhamentos com dois pilares. Desta forma é interessante referir que, caso o vão a vencer tenha uma grande dimensão, variar a curvatura em planta é uma solução interessante do ponto de vista estrutural.

Outro caso estudado foi o caso de uma estrutura em “S” continuamente apoiada ao longo de um só bordo. Para este caso e uma vez que não existe a referida zona que confere um aumento de rigidez à estrutura, os resultados dos deslocamentos são semelhantes aos resultados do caso com geometria circular. Verificou-se que a zona onde a solução era apoiada pelo intradorso conduzia a momentos negativos e a zona apoiada pelo extradorso a momentos positivos. Com isto é possível concluir que o funcionamento estrutural conjunto desta laje é semelhante ao funcionamento de duas lajes circulares isoladas, com os respetivos apoios. Conclui-se, portanto, que este tipo de solução tem interesse, uma vez que permite a construção de estruturas onde a sua forma e a função estão interligadas, criando obras estética e estruturalmente muito interessantes.

6.2 Desenvolvimentos futuros

Os resultados obtidos nesta dissertação assumiram uma modelação de apoios discretos perfeitos. Ora, como já referido, essa modelação origina picos de tensão junto à zona dos apoios. Futuramente seria interessante avaliar os resultados optando por uma modelação dos apoios mais realista, onde se tivesse em conta a deformabilidade dos tirantes.

Em muitas estruturas deste tipo já construídas, é visível que a estrutura é apoiada com recurso a tirantes inclinados. Como continuação do trabalho aqui apresentado, seria interessante para o tema, uma análise à influência que a adoção de apoios inclinados terá para no seu comportamento estrutural.

Outra questão que se verificou neste estudo, foi que para raios médios da estrutura (10m), esta apresentava deslocamentos e momentos fletores muito elevados, tornando o seu dimensionamento mais complicado. Por forma de contornar esta situação, era interessante o estudo da adoção de materiais mais leves, como o betão leve e/ou secções mistas aço/betão e com secções transversais aligeiradas.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografia Principal e Geral

Appleton, Júlio. Estruturas de Betão – Volumes 1 e 2. Amadora: Edições Orion, **2013**.

Azevedo, João J. R. T., e Jorge Miguel S. F. M. Proença. Dinâmica de Estruturas. Lisboa: IST, **1991**.

Bachmann, Hugo, et al. Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines. Basel: Springer Basel, **1995**.

Câmara, José, António Costa, Júlio Eduardo e Jorge Alfiate. Estruturas de betão folhas de apoio às aulas. **2016**.

Câmara, José, João Vinagre, e Júlio Appleton. Limitação da Deformação no REBAP. **2006**.

Computers & Structures, Inc. CSI Analysis Reference Manual. USA, **2017**.

Idelberger, Klaus. The World of Footbridges. Berlim, **2011**.

Leitão, Vitor MA, e Luís MSS Castro. Análise de estruturas I - Apontamentos sobre análise de lajes. Instituto Superior Técnico, **2018**.

Murray, Thomas M., David E Allen, Eric E. Ungar, e D. Brad Davis. Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity (Second Edition). AISC Design Guide 11, **2016**.

Reddy, J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. CRC Press, **2006**.

Sétra/AFGC. Footbridges - Assessment of vibrational behaviour of footbridges. Paris: Sétra, **2006**.

Strasky, Jiri. Stress Ribbon and Cable-supported Pedestrian Bridges. London: ICE Publishing, **2011**.

Timoshenko, S., e S. Woinowsky-Krieger. Theory of plates and shells. Singapura: McGraw-Hill, Inc., **1959**.

Wolfram Research. Mathematica Edition: Version 11.3. Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2018.

Documentos Normativos – Normas e Regulamentos

ISO 2631-2 - Evaluation of human exposure to whole-body vibration: Part 2: Continuous and shock-induced vibrations in buildings (1 Hz to 80 Hz). International Organization for Standardization, **1989**.

NP EN 1990 **2009**: Eurocódigo: “Bases para o projeto de estruturas”, IPQ, Lisboa.

EN 1991-1-1 **2009**: “Ações em estruturas – Ações Gerais – Pesos volúmicos, pesos próprios, sobrecargas em edifícios”, IPQ, Lisboa.

EN1992-1-1 **2010**: “Projeto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios”, IPQ, Lisboa.

NP EN 13670: **2011** – Execução de Estruturas de Betão, IPQ, 2011.

NP ISO 2631-1: **2007** - Vibrações mecânicas e choque: avaliação da exposição do corpo inteiro a vibrações - Parte1, IPQ, 2007.

Páginas Web

Funchal Notícias, Hotel Savoy Palace atinge os oito pisos, <https://funchalnoticias.net/2017/02/27/hotel-savoy-palace-atinge-os-oito-pisos-faltam-cinco/>, consultado em Março de 2019.

ANEXOS

Anexo A

Neste anexo pode ser consultado o código utilizado no programa Wolfram Mathematica (Wolfram Research, 2018) na determinação das soluções exatas de uma laje circular interiormente apoiada e exteriormente apoiada.

Pode ainda ser consultado o gráfico de deslocamentos assim como os diagramas de momentos na direção radial e circunferencial, rotação e esforço transversal, para um conjunto de dados particular.

- Solução apoiada ao longo do extradorso
 - Código

```

In[ ]:= sol = FullSimplify[DSolve[{{(1/r) D[r D[(1/r) D[r D[w[r], r], r], r], r]} = q/Df,
  |simplifica compl...|resolve equa...|de...|de...|derivada

ReplaceAll[-Df (D[w[r], r, r, r] + (1/r) D[w[r], r, r] - (1/r^2) D[w[r], r]), r -> Rint] == 0,
  |substitui todos |derivada

ReplaceAll[-Df (D[w[r], r, r] + (v/r) D[w[r], r]), r -> Rint] == 0, w[Rext] == 0,
  |substitui todos |derivada

ReplaceAll[-Df (D[w[r], r, r] + (v/r) D[w[r], r]), r -> Rext] == 0], {w[r], r}]

Out[ ]:= {{w[r] -> (1 / (64 Df (Rext - Rint) (Rext + Rint) (-1 + v^2)
  q ((r - Rext) (r + Rext) (Rext - Rint) (Rext + Rint) (-1 + v)
  (r^2 (1 + v) + 2 Rint^2 (3 + v) - Rext^2 (5 + v)) - 4 Rint^2 (1 + v) (Rext^2 Log[Rext]
  (Rint^2 (-5 + v) - 2 r^2 (-1 + v) + Rext^2 (3 + v) - 4 Rint^2 (1 + v) Log[Rext]) +
  Log[r] (- (Rext - Rint) (Rext + Rint) (-2 r^2 (-1 + v) + Rext^2 (3 + v)) +
  4 Rext^2 Rint^2 (1 + v) (Log[Rext] - Log[Rint])) +
  2 Rint^2 ((r - Rext) (r + Rext) (-1 + v) + 2 Rext^2 (1 + v) Log[Rext]) Log[Rint]))}}

In[ ]:= w[r_] = sol[[1, 1]][[2]];

In[ ]:= FullSimplify[Limit[D[w[r], r], {Rint -> 0}]]
  |simplifica compl...|limite |derivada

Out[ ]:= (q r (r^2 (1 + v) - Rext^2 (3 + v))) / (16 Df (1 + v))

In[ ]:= FullSimplify[
  |simplifica completamente

ReplaceAll[-Df (D[w[r], r, r, r] + (1/r) D[w[r], r, r] - (1/r^2) D[w[r], r]), r -> Rext]]

Out[ ]:= (q (Rext - Rint) (Rext + Rint)) / (2 Rext)

```

```

In[ ]:= FullSimplify[ReplaceAll[-Df[ $\frac{1}{r} D[w[r], r] + v D[w[r], r, r]$ ]]]
[simplifica compl...][substitui todos]

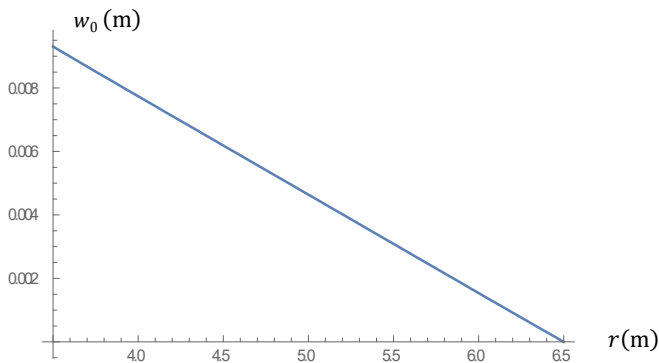
Out[ ]:= ReplaceAll[ $\frac{1}{16 r^2} q (Rext^2 Rint^2 (3 + v) - r^4 (1 + 3 v) +$ 
 $r^2 (Rext^2 (3 + v) + Rint^2 (-1 + 5 v)) + 4 r^2 Rint^2 (1 + v) \text{Log}[r] +$ 
 $(4 Rint^2 (1 + v) (-Rext^2 (r^2 + Rint^2) \text{Log}[Rext] + (r^2 + Rext^2) Rint^2 \text{Log}[Rint])) /$ 
 $((Rext - Rint) (Rext + Rint))$ ]]

In[ ]:= Block[{Df =  $\frac{33 \times 10^6 \times 0.4^3}{12 (1 - 0.2^2)}$ , v = 0.2, q = 3 \times 1.5 + 1.35 \times 2 + 25 \times 0.4, Rext = 6.5, Rint = 3.5},
[bloqueia]

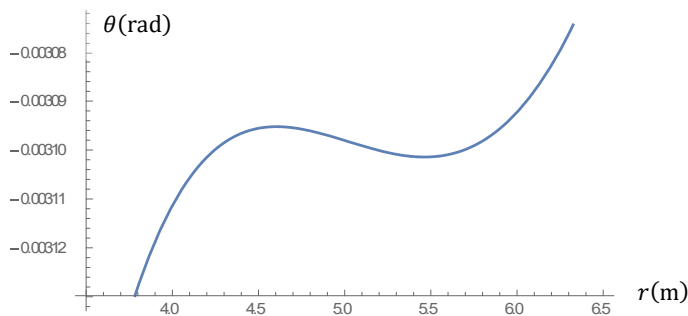
f[r_] = sol[[1, 1]][[2]];
GraphicsGrid[
[grades de gráficos]
{Plot[f[r], {r, Rint, Rext}], Plot[Evaluate[D[f[r], r]], {r, Rint, Rext}], 0},
[gráfico] [gráf...][calcula] [derivada]
{Plot[Evaluate[-Df[ $D[f[r], r, r] + \frac{v}{r} D[f[r], r]$ ]], {r, Rint, Rext}], Plot[Evaluate[
[gráf...][calcula]
-Df[ $D[f[r], r, r] + \frac{1}{r} D[f[r], r, r] - \frac{1}{r^2} D[f[r], r]$ ]], {r, Rint, Rext}],
[derivada] [derivada] [derivada]
Plot[Evaluate[-Df[ $\frac{1}{r} D[f[r], r] + v D[f[r], r, r]$ ]], {r, Rint, Rext}]]}
]

```

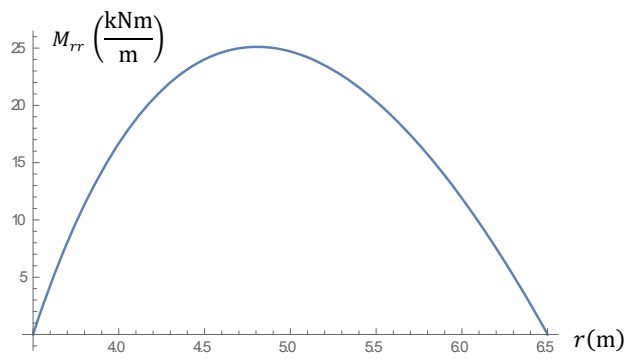
• Gráficos



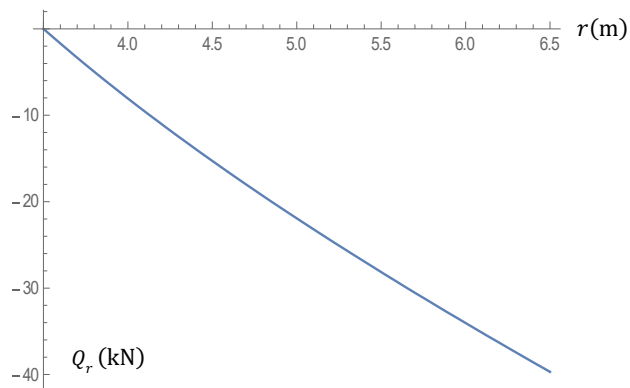
ANEXO 1 - Deslocamento (Extradorso).



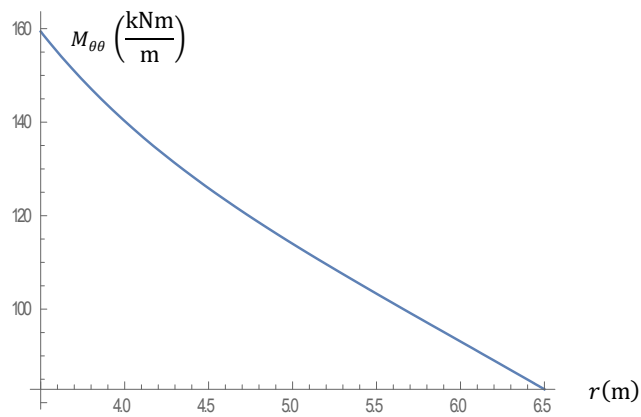
ANEXO 2 - Rotação (Extradorso).



ANEXO 3 - Momento fletor radial (Extradorso).



ANEXO 4 - Esforço transverso radial (Extradorso).



ANEXO 5 - Momento fletor circunferencial (Extradorso).

- Solução apoiada ao longo do intradorso

- Código

```
sol = FullSimplify[DSolve[{(1/r) D[r D[(1/r) D[r D[w[r], r], r], r], r]}] = q,
  |simplifica completam... | resolve equa... | de... | de... | de... | derivada

ReplaceAll[-Df[D[w[r], r, r, r] + (1/r) D[w[r], r, r] - (1/r^2) D[w[r], r]], r -> Rext] == 0,
  | substitui todos | derivada

ReplaceAll[-Df[D[w[r], r, r, r] + (v/r) D[w[r], r]], r -> Rext] == 0, w[Rint] == 0,
  | substitui todos | derivada

ReplaceAll[-Df[D[w[r], r, r] + (v/r) D[w[r], r]], r -> Rint] == 0, {w[r]}, r]]

Out[ ] = {{w[r] -> 1 / (64 Df (Rext - Rint) (Rext + Rint) (-1 + v^2)
  q ((r - Rint) (Rext - Rint) (r + Rint) (Rext + Rint)
  (-1 + v) (r^2 (1 + v) + 2 Rext^2 (3 + v) - Rint^2 (5 + v)) +
  4 Rext^2 (1 + v) (Log[r] ((Rext - Rint) (Rext + Rint) (-2 r^2 (-1 + v) + Rint^2 (3 + v)) -
  4 Rext^2 Rint^2 (1 + v) (Log[Rext] - Log[Rint])) + Rint^2 Log[Rint]
  (Rext^2 (-5 + v) - 2 r^2 (-1 + v) + Rint^2 (3 + v) - 4 Rext^2 (1 + v) Log[Rint]) +
  2 Rext^2 Log[Rext] ((r - Rint) (r + Rint) (-1 + v) + 2 Rint^2 (1 + v) Log[Rint]))))}}

In[ ] = DSolve[{r D[Qr[r], r] + Qr[r] + r q == 0, Qr[Rext] == 0}, {Qr[r]}, r]
  | resolve eq... | derivada

Out[ ] = {{Qr[r] -> (-q r^2 + q Rext^2) / (2 r)}}

In[ ] = DSolve[
  | resolve equação diferencial
  {r D[mrr[r], r, r] + 2 D[mrr[r], r] + r q == 0, mrr[Rext] == 0, mrr[Rint] == 0}, {mrr[r]}, r]
  | derivada | derivada

Out[ ] = {{mrr[r] -> 1 / (6 r) (-q r^3 + q r Rext^2 + q r Rext Rint - q Rext^2 Rint + q r Rint^2 - q Rext Rint^2)}}

In[ ] = w[r_] = sol[[1, 1]][[2]];

In[ ] = FullSimplify[Df[D[f[r], r, r, r] + (1/r) D[f[r], r, r] - (1/r^2) D[f[r], r]], r]
  | simplifica completam... | derivada | derivada | derivada

Out[ ] = q (r - Rext) (r + Rext) / (2 r)

In[ ] = FullSimplify[r D[-Df[D[w[r], r, r, r] + (v/r) D[w[r], r]], r, r] +
  | simplifica comple... | derivada | derivada | derivada
  2 D[-Df[D[w[r], r, r, r] + (v/r) D[w[r], r]], r] -
  D[-Df[(1/r) D[w[r], r] + v D[w[r], r, r]], r] + q r]

Out[ ] = 0

In[ ] = Integrate[-Df[(1/r) D[w[r], r] + v D[w[r], r, r]],
  | integra
  {r, Rint, Rext}, Assumptions -> {Rint > 0, Rext > Rint}]
  | premissas

Out[ ] = -1/6 q (Rext - Rint)^2 (2 Rext + Rint)

In[ ] = FullSimplify[
  | simplifica completamente
  Integrate[q / 2 (r^2 - Rext^2), {r, Rint, Rext}, Assumptions -> {Rint > 0, Rext > Rint}]
  | integra | premissas

Out[ ] = -1/6 q (Rext - Rint)^2 (2 Rext + Rint)
```

```

In[1]:= Block[{Df =  $\frac{33 \times 10^6 \times 0.4^3}{12 (1 - 0.2^2)}$ , v = 0.2,
[bloqueia]

q = 3 \times 1.5 + 1.35 \times 2 + 1.35 \times 24.9926 \times 0.4, Rext = 6.5, Rint = 3.5},
f[r_] = sol[[1, 1]][[2]];
Print[- $\frac{1}{2}$  q (Rext - Rint)^2 (2 Rext + Rint)];
[apresenta o resultado]

Print[- $\frac{q Rext^3}{2}$  +  $\frac{1}{2}$  q Rext^2 Rint -  $\frac{q Rint^3}{6}$ ];
[apresenta o resultado]

GraphicsGrid[
[grades de gráficos]
{{Plot[f[r], {r, Rint, Rext}], Plot[Evaluate[D[f[r], r]], {r, Rint, Rext}],
[gráfico] [calcula] [derivada]
Plot[ $\frac{q}{2} (r^2 - Rext^2)$ , {r, Rint, Rext}], Plot[ $-\frac{1}{6} (-q r^3 + q r Rext^2 +$ 
[gráfico 2] [gráfico 6 r]
q r Rext Rint - q Rext^2 Rint + q r Rint^2 - q Rext Rint^2), {r, Rint, Rext}]},
{Plot[Evaluate[-Df (D[f[r], r, r] +  $\frac{v}{r}$  D[f[r], r])], {r, Rint, Rext}], Plot[Evaluate[
[gráfico] [calcula] [derivada] [derivada] [gráfico] [calcula]
-Df (D[f[r], r, r] +  $\frac{1}{r}$  D[f[r], r] -  $\frac{1}{r^2}$  D[f[r], r])], {r, Rint, Rext}],
[derivada] [derivada] [derivada]
Plot[Evaluate[-Df ( $\frac{1}{r}$  D[f[r], r] + v D[f[r], r, r])], {r, Rint, Rext}], 0]}]
]
-512.226
-512.226

```

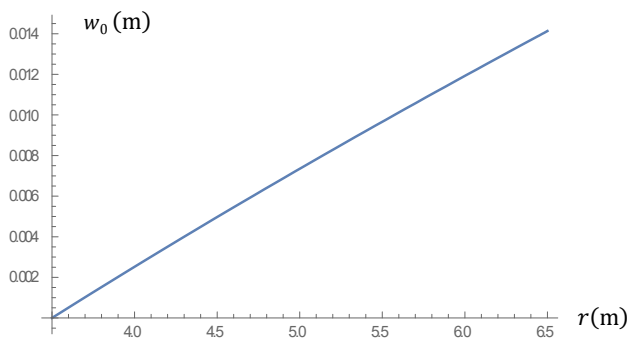
```

In[2]:= Block[{Df =  $\frac{33 \times 10^6 \times 0.4^3}{12 (1 - 0.2^2)}$ , v = 0.2,
[bloqueia]

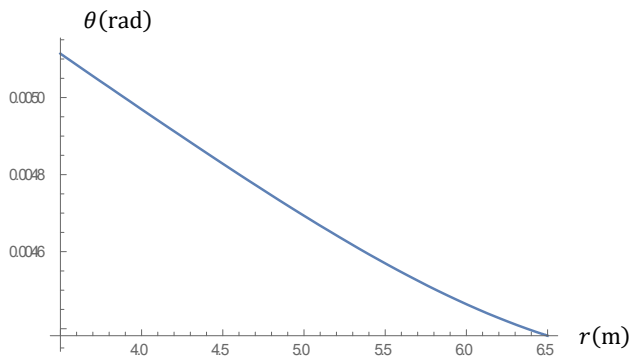
q = 3 \times 1.5 + 1.35 \times 2 + 1.35 \times 24.9926 \times 0.4, Rext = 6.5, Rint = 3.5},
f[r_] = sol[[1, 1]][[2]];
Plot[
[gráfico]
{ $\frac{q}{2} (r^2 - Rext^2)$ , Evaluate[-Df ( $\frac{1}{r}$  D[f[r], r] + v D[f[r], r, r])]}, {r, Rint, Rext}]
]

```

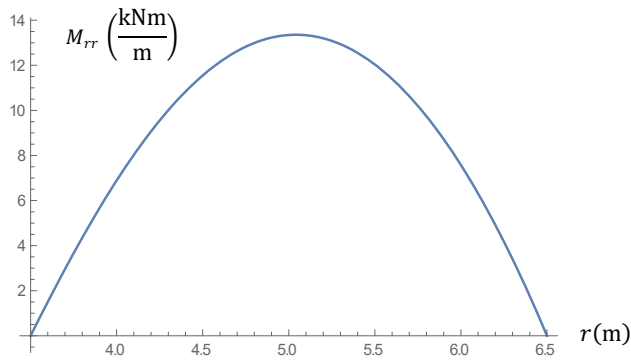
○ Gráficos obtidos:



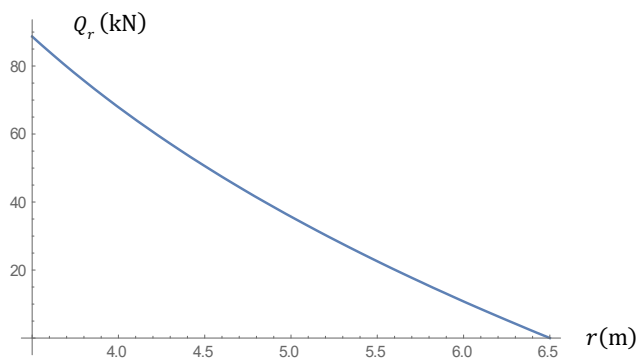
ANEXO 6 - Deslocamento (Intradorso).



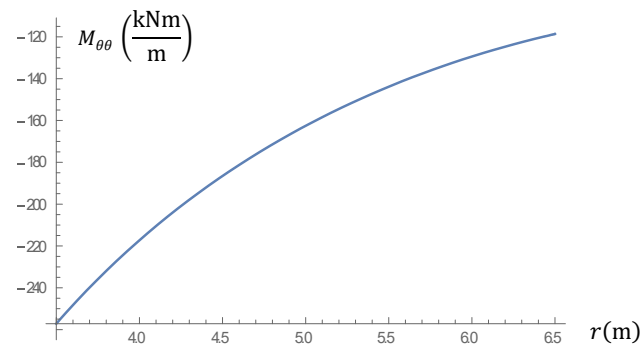
ANEXO 7 - Rotação (Intradorso).



ANEXO 8 - Momento fletor radial (Intradorso).



ANEXO 9 - Esforço transverso radial (Intradorso).



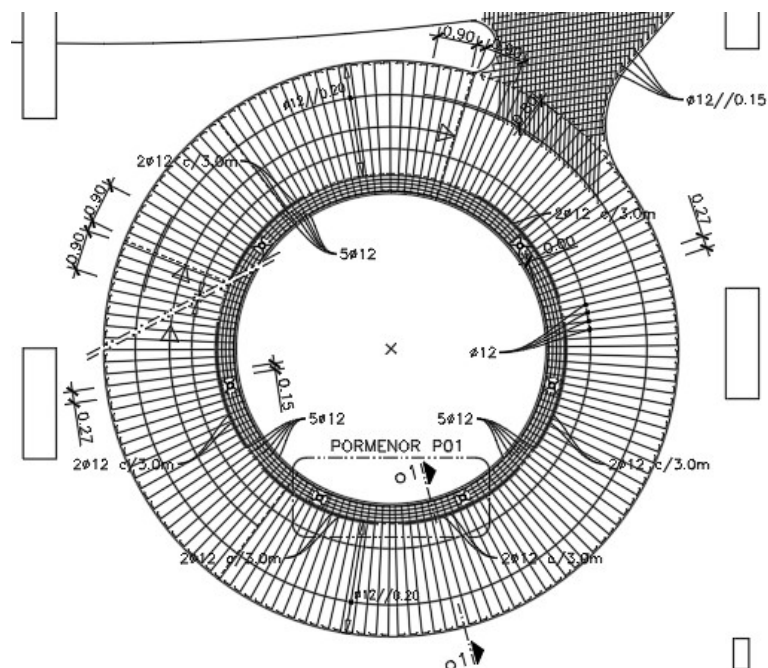
ANEXO 10 - Momento fletor circunferencial (Intradorso).

Anexo B

No presente anexo pode-se consultar os desenhos de armadura superiores e inferiores utilizadas no projeto da escadaria do hotel Savoy. **Todo o conteúdo presente neste anexo é da autoria e propriedade da empresa JSJ.**

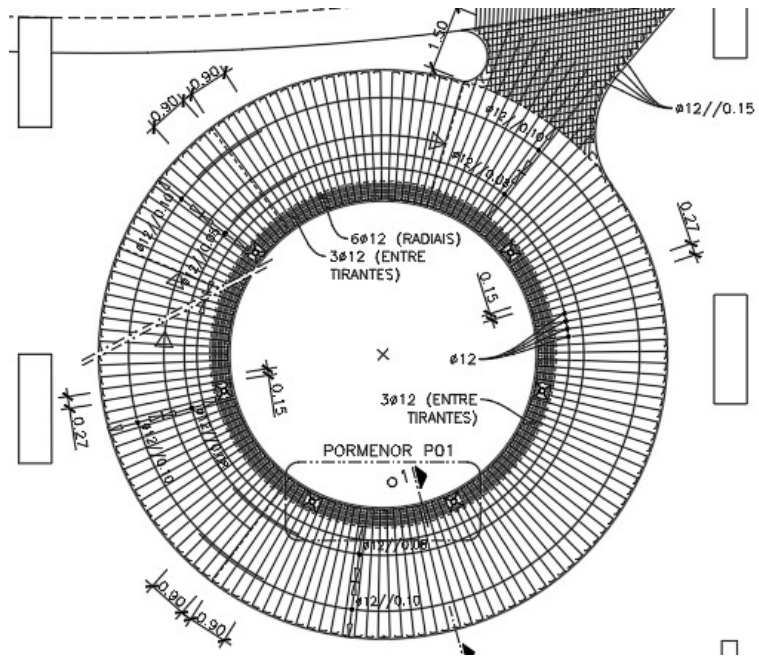
Nota: Os desenhos não se encontram à escala servem apenas como indicação da geometria e quantidades de armadura adotadas.

- **Pormenorização das armaduras Inferiores do PISO -1**



ANEXO 11 - Pormenorização das armaduras inferiores.

- Pormenorização das armaduras superiores do PISO -1



ANEXO 12 - Pormenorização das armaduras superiores.

Anexo C

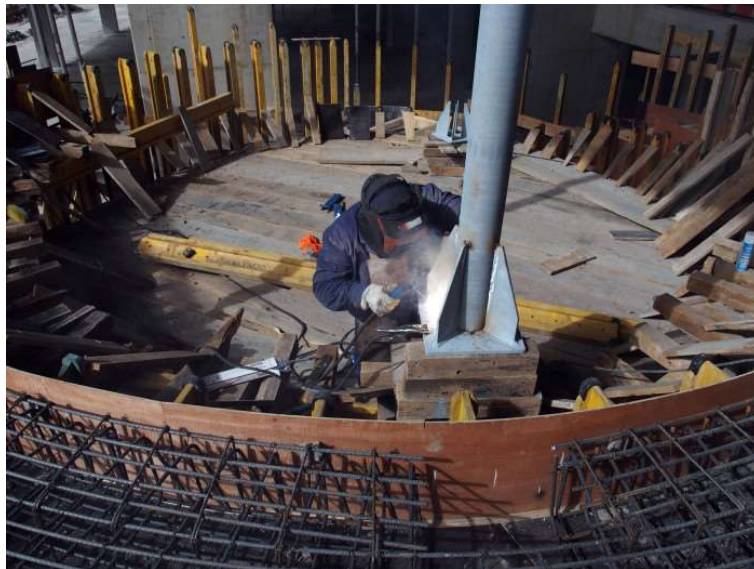
No presente anexo apresentam-se duas figuras que ilustram a colocação das armaduras, durante a fase construtiva assim como o posicionamento dos tirantes e colocação das cofragens. As imagens são da autoria de Rui Marote, retiradas do website funchalnoticias.net.

- **Posicionamento das armaduras, cofragens e tirantes**



ANEXO 13 - Posicionamento das armaduras e dos tirantes (foto de Rui Marote).

- **Soldadura dos reforços na base dos tirantes**



ANEXO 14 - Soldadura dos reforços na base dos tirantes (foto de Rui Marote).