

**Implementação e validação de modelos elásticos não lineares para
simular o comportamento dos solos**

Ana Rita Parente Mariquitos

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre

Engenharia Civil

Orientadora: Professora Doutora Teresa Maria Bodas de Araújo Freitas

Júri

Presidente: Professora Doutora Maria Rafaela Pinheiro Cardoso

Orientadora: Professora Doutora Teresa Maria Bodas de Araújo Freitas

Vogal: Professor Doutor Rui Pedro Carrilho Gomes

Julho 2017

Resumo

Nas últimas décadas a prática de engenharia geotécnica evoluiu de forma a ser possível a modelação numérica e consequente análise, através do método numéricos, de estruturas complexas, bem como problemas de interação solo/estrutura.

Os métodos numéricos são uma ferramenta com grande potencial de utilização, mas a validade dos resultados que se obtêm pela sua aplicação dependem muito dos modelos constitutivos adoptados para descrever o comportamento dos geomateriais.

Nesta dissertação analisam-se os diversos elementos necessários à formulação de modelos constitutivos utilizados para reproduzir o comportamento do solo e implementam-se equações constitutivas em formato incremental de dois modelos elásticos não-lineares: modelo K-G e modelo de Jardine (também conhecido por *small strain stiffness model*), no *software* de cálculo automático comercial, PLAXIS. A validação destes modelos é feita através da simulação de ensaios laboratoriais. Adicionalmente, foram instalados dois algoritmos de integração – o algoritmo de Euler e de Euler Modificado com e sem *substepping* – e comparado o seu desempenho.

Palavras chave: Modelo de Jardine, Modelo K-G, Método dos Elementos Finitos, Algoritmos de Integração de Tensões

Abstract

In the last decades the practice of geotechnical engineering has evolved in a way that it is now possible to model and analyze complex structures as well as soil / structure interaction problems through numerical modeling (for instance: using the finite element method or finite differences).

Numerical methods are a tool with great potential, but the validity of the results obtained by their application depends on the constitutive models adopted to describe the behavior of the geomaterials.

This dissertation summarizes the various elements necessary for the formulation of constitutive models used to reproduce soil behavior, as well as the implementation of constitutive equations in an incremental format for two non-linear elastic models: K-G model and Jardine model (also known as small strain stiffness model), in the commercial software, PLAXIS. The validation of these models is done through the simulation of laboratory tests. In addition, two algorithms for stress integration – Euler and Modified Euler, with and without substepping - were implemented and compared.

Key words: Small Strain Stiffness Model, K-G Model, Finite Element Method, Stress Integration Algorithms

Agradecimentos

A elaboração desta dissertação tornou-se apenas possível graças à orientação da Professora Teresa Freitas, pelo apoio e encorajamento demonstrado ao longo deste percurso cheio de obstáculos.

Agradeço à minha família por me terem apoiado ao longo do curso. Aos meus amigos, pelas palavras de incentivo e por me pedirem para explicar o tema da dissertação inúmeras vezes.

Dedico esta dissertação aos meus avós, infelizmente aos que já não se encontram presentes e à minha avó Lurdes. Obrigado por sempre me apoiarem nas minhas escolhas e me incentivarem a prosseguir o caminho que escolhi, sem reprovações.

Por último, agradeço ao João, por pacientemente me ter ajudado com a programação (e fornecido o “computador compilador”!) e me ter emprestado um ouvido amigo em alturas críticas. Quando tudo parecia funcionar ao contrário, o seu apoio incondicional foi fundamental para a conclusão desta dissertação.

Índice

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vii
Índice de figuras	xi
Índice de Quadros	xv
Simbologia e Notações	xvii
1. Introdução	1
1.1. Considerações Gerais	1
1.2. Objectivos	2
1.3. Estrutura da Dissertação	2
2. Considerações sobre o Método dos Elementos Finitos	5
2.1. Princípios do Método de Elementos Finitos	5
2.2. Método de Newton-Raphson	7
2.3. Algoritmos de Integração de Tensões	10
2.3.1. Algoritmos de Integração de Tensões	10
2.3.2. Algoritmos de Integração utilizado pelo <i>software</i> PLAXIS	13
3. Considerações Gerais sobre alguns Modelos Constitutivos dos Solos	15
3.1. Enquadramento Geral	15
3.2. Modelo Elástico Linear	17
3.3. Modelos Elásticos Não-Lineares	18
3.3.1. Modelo K-G	18
3.3.2. Modelo de Jardine	20
3.4. Introdução aos Modelos Elastoplásticos	22
3.4.1. Função de cedência	23
3.4.2. Função de potencial plástico	24
3.4.3. Leis de endurecimento e amolecimento	25
3.4.4. Matriz Constitutiva Elastoplástica	26
3.4.5. Critérios de Rotura	28
4. Implementação dos Modelos Constitutivos no PLAXIS	35

4.1.	Introdução	35
4.2.	Estrutura Geral dos Modelos definidos pelo Utilizador.....	36
4.3.	Modelo Elástico Linear	39
5.	Implementação e Validação do Modelo K-G.....	41
5.1.	Formulação das Equações Constitutivas	41
5.2.	Implementação do Modelo K-G no <i>software</i> PLAXIS	42
5.2.1.	Estrutura da Subrotina do Modelo K-G	42
5.2.2.	Implementação de Algoritmos (em <i>IDTASK 2</i>)	44
5.2.3.	Modelação de Ensaios de Corte em Compressão Triaxial.....	48
5.3.	Validação do Modelo K-G	51
5.3.1.	Método de Euler com diferentes números de ciclos	51
5.3.2.	Método de Modificado de Euler com diferentes números de ciclos	57
5.3.3.	Comparação entre algoritmos do Método de Euler e Método Modificado de Euler	62
6.	Implementação e Validação do Modelo de Jardine	65
6.1.	Formulação das Equações Constitutivas	65
6.2.	Implementação do Modelo de Jardine no <i>software</i> PLAXIS.....	66
6.2.1.	Estrutura da Subrotina do modelo de Jardine	66
6.2.2.	Ensaios Triaxiais.....	69
6.3.	Validação do Modelo de Jardine	69
6.3.1.	Modelo de Jardine com Critério de Rotura de Mohr-Coulomb	70
7.	Conclusão	75
7.1.	Considerações Finais	75
7.2.	Propostas de Desenvolvimentos Futuros	77
	Referências	79
	Anexos	A

Índice de figuras

Figura 2.1 Exemplos de elementos finitos e pontos nodais	6
Figura 2.2 Acumulação de erro em cada incremento com algoritmo da Rigidez Tangente (adaptado de Potts, 1999)	8
Figura 2.3 a) Representação do algoritmo do Método de Newton-Raphson e b) algoritmo do Método Modificado de Newton-Raphson	9
Figura 2.4 Interpretação geométrica do método de Euler (adaptado de Chapra & Canale, 2015)	11
Figura 2.5 Representação gráfica do método de Euler modificado (adaptado de Chapra & Canale, 2015)	12
Figura 3.1 Tensões num dado sistema de coordenadas e respectivas tensões principais	15
Figura 3.2 - Exemplo esquemático de um ensaio de corte simples com aumento da tensão de corte (adaptado de Lade, 2005)	18
Figura 3.3 Modelo K-G	19
Figura 3.4 Curva característica de rigidez-deformação do solo numa escala logarítmica (adaptado de Thomas Benz, Schwab, & Vermeer, 2009)	20
Figura 3.5 Projecção da curva: rigidez definida como uma função trigonométrica em função da deformação (adaptado de Jardine et al., 1986)	21
Figura 3.6 a) Material elastoplástico perfeito. b) Material elastoplástico com endurecimento. c) Material elastoplástico com amolecimento (adaptado de Cogliati, 2011)	23
Figura 3.7 Função de cedência (adaptado de Gavel-Solberg, 2014)	24
Figura 3.8 a) Superfície de potencial plástico b) Curva de potencial plástico	25
Figura 3.9 Tipos de endurecimento (adaptado de Potts & Zdravkovic, 1999)	26
Figura 3.10 Círculo de Mohr – Resistência não drenada	28
Figura 3.11 Critério de rotura de Tresca no espaço de tensões principais	29
Figura 3.12 a) Critério de rotura de Von Mises no espaço de tensões principais e b) no plano deviatórico	30
Figura 3.13 Relação entre tensões de corte e tensões normais (adaptado de Holtz & Kovacs, 1981)	30
Figura 3.14 a) Envolvente de rotura de Mohr-Coulomb e b) e representação no espaço de tensões principais (adaptado de Cogliati, 2011)	31
Figura 3.15 a) Critério de rotura de Drucker-Prager no espaço de tensões principais e b) representação no plano deviatórico (Cogliati, 2011)	33
Figura 4.1 Organização generalizada da subrotina <i>Usrmod</i>	36

Figura 4.2 a) Representação do problema utilizado para a validação do modelo linear elástico b) Malha de elementos finitos utilizada	40
Figura 5.1 Fluxograma de IDTask 2 do modelo K-G	43
Figura 5.2 Esquema do Método de Euler no contexto do <i>software</i>	45
Figura 5.3 Fluxograma de IDTask 2 do modelo K-G com Método de Euler	46
Figura 5.4 Esquema do Método Modificado de Euler no contexto do <i>software</i>	47
Figura 5.5 Fluxograma de IDTask 2 do modelo K-G com Método Modificado de Euler	48
Figura 5.6 a) Esquema de um ensaio triaxial drenado no PLAXIS b) Exemplo de um problema axissimétrico (adaptado de Brinkgreve et al., 2002)	49
Figura 5.7 Relação entre deformação volumétrica e tensão média na fase de consolidação para diferentes números de ciclos para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)	52
Figura 5.8 Trajectória das tensões para uma tensão de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Método de Euler, CD)	52
Figura 5.9 Relação entre deformação volumétrica e deformação de corte na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)	53
Figura 5.10 Relação entre deformação de corte e tensão deviatórica na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)	53
Figura 5.11 Relação entre deformação volumétrica e tensão média na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)	54
Figura 5.12 Efeito da tensão de confinamento na a) relação entre deformação de corte e deformação volumétrica e b) relação entre tensão de corte e deformação de corte	54
Figura 5.13 Trajectória das tensões efectivas e totais para diferentes tensões de confinamento (Método de Euler, CU)	55
Figura 5.14 Relação entre deformação de corte e tensão deviatórica para diferentes números de ciclos (Método de Euler, CU)	56
Figura 5.15 Relação entre deformação axial e excesso de pressão neutra para diferentes números de ciclo (Método de Euler, CU)	56
Figura 5.16 Relação entre tensão média efectiva e deformação deviatórica na fase de consolidação para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)	57
Figura 5.17 Trajectórias das tensões totais para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Método Modificado de Euler)	58

Figura 5.18 Relação entre deformação volumétrica e deformação deviatórica na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)	58
Figura 5.19 Relação entre deformação deviatórica e tensão deviatórica na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)	59
Figura 5.20 Relação entre deformação volumétrica e tensão média na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)	59
Figura 5.21 Trajectória das tensões efectivas e totais para diferentes tensões de confinamento (Método Modificado de Euler, CU)	60
Figura 5.22 a) Relação entre deformação deviatórica e tensão deviatórica para diferentes números de ciclos b) Relação entre deformação axial e excesso de pressão intersticial para diferentes números de ciclos (Método Modificado de Euler, CU)	61
Figura 5.23 Resultados dos ensaios triaxiais drenados com tensão de confinamento 100 kPa para diferentes algoritmos com n iguais	62
Figura 5.24 Resultados dos ensaios triaxiais não drenados com tensão de confinamento 100 kPa para diferentes algoritmos com n iguais	63
Figura 6.1 Comparação da variação do módulo de deformabilidade volumétrica e de corte normalizado entre modelação numérica e solução aproximada do modelo de Jardine	70
Figura 6.2 Trajectórias das tensões para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Modelo de Jardine com Critério de Rotura de Mohr-Coulomb b) Relação entre deformação volumétrica e deformação deviatórica na fase de corte para $p_0=100$ kPa (CD)	71
Figura 6.3 Resultados dos ensaios triaxiais drenados na fase de corte para $p_0=100, 200$ e 300 kPa do Modelo de Jardine com Critério de Rotura de Mohr-Coulomb (CD)	71
Figura 6.4 a) Trajectórias das tensões para tensão de confinamento de 100 kPa para $\psi=0^\circ$ e b) $\psi=15^\circ$	72
Figura 6.5 a) Relação entre deformação deviatórica e tensão b) Relação entre excesso de tensão neutra e deformação vertical (CU)	72

Índice de Quadros

Quadro 5.1 Parâmetros de entrada do modelo K-G.....	42
Quadro 5.2 Parâmetros de entrada do modelo K-G para ensaios triaxiais no PLAXIS	51
Quadro 5.3 Valores para a resistência não drenada (C_u) para diferentes tensões de confinamento	57
Quadro 5.4 Valores para a resistência drenada na rotura (C_u) para diferentes tensões de confinamento com Método Modificado de Euler	61
Quadro 6.1 Parâmetros de entrada para o modelo de Jardine	66
Quadro 6.2 Diferentes estados de tensão e correspondente <i>comutador</i> (I_{Area})	68
Quadro 6.3 Parâmetros de entrada do modelo de Jardine para ensaios triaxiais	69

Simbologia e Notações

Siglas

CSP	<i>Current Stiffness Parameter</i>
LEC	Linha do Estado Crítico
MEF	Método dos Elementos Finitos
TTE	Trajectória das Tensões Efectivas
TTT	Trajectória das Tensões Totais
ME	Método de Euler
MEM	Método Euler Modificado

Alfabeto Latino

B	Matriz da Função de Forma diferenciada
c'	Coesão efectiva
D	Matriz Constitutiva
D^e	Matriz de Rigidez Elástica
D^p	Matriz de Rigidez Plástica
D^{ep}	Matriz de Rigidez Elastoplástica
E	Módulo de Young
E'	Módulo de Young Drenado
F	Função de cedência
F_E	Vector das Forças Nodais do Elemento
F_G	Vector das Forças Nodais Global
F_{Ex}	Vector de Carga Externa

F_{in}	Vector de Carga Interna
G	Módulo de Deformabilidade de Distorção
G_t	Módulo de Deformabilidade de Distorção Tangente
G_i	Parâmetro do modelo K-G
K	Módulo de Deformabilidade Volumétrica
K_t	Módulo de Deformabilidade Volumétrica Tangente
K_u	Módulo de Deformabilidade Volumétrica Não drenado
K_i	Parâmetro do modelo K-G
K_E	Matriz de Rigidez do Elemento
K_G	Matriz de Rigidez Global
N	Matriz de Funções de interpolação
<i>ncycle</i>	Parâmetro utilizado na subrotina K-G e Jardine
p	Tensão Média Isotrópica Total
p'	Tensão Média Isotrópica Efectiva
p'_c	Tensão Média Isotrópica Efectiva no estado de tensão actual
p'_0	Tensão de confinamento em ensaios triaxiais
u	Vector campo de deslocamentos

Alfabeto Grego

α_K	Parâmetro utilizado no modelo constitutivo K-G
α_G	Parâmetro utilizado no modelo constitutivo K-G
δ	Operador
β_G	Parâmetro utilizado no modelo constitutivo K-G
Γ	Peso volúmico

θ	Ângulo de Lode
φ	Ângulo de Resistência do Corte
ψ	Ângulo de Dilatância
v_E	Vector de deslocamentos nodais discretos do elemento
v_G	Vector de deslocamentos nodais discretos global
ε_{ij}	Vector das deformações
ε_{ij}^e	Vector da deformação elástica
ε_{ij}^p	Vector da deformação plástica
ε_{dev}	Deformação deviatória
ε_s	Deformação de corte
ε_{vol}	Deformação volumétrica
ε_{vol}^e	Deformação volumétrica elástica
ε_{vol}^p	Deformação volumétrica plástica
σ	Vector das tensões totais
σ_c	Vector das tensões constitutivas
σ_{tr}	Vector das tensões <i>trial stress</i>

1. Introdução

1.1. Considerações Gerais

Um dos pontos fulcrais em Geotecnia sempre foi prever e entender o comportamento dos geomateriais com precisão, nomeadamente a relação tensão-deformação dos solos. Para isso, diversos modelos foram desenvolvidos ao longo dos anos como resposta a este problema, com diferentes níveis de complexidade e baseados em princípios diferentes. Contudo, as lacunas e potencialidades destes modelos nem sempre são fáceis de identificar por parte do utilizador assim como os requisitos necessários para obtenção dos parâmetros dos modelos. De facto, quanto mais sofisticado o modelo de solo for, geralmente mais parâmetros são necessários definir. Muitos destes parâmetros podem ser obtidos directamente a partir de ensaios convencionais (de laboratório ou *in situ*), porém devido à insuficiência de informação, a maior parte destes é estimado ou correlacionado. Assim, torna-se uma tarefa complicada determinar qual o modelo que se deve seleccionar para um problema em concreto, especialmente se não se possuir experiência nem informação suficiente.

Nas últimas cinco décadas a prática de engenharia geotécnica evoluiu de forma a ser possível a modelação numérica e consequente análise (através do método dos elementos finitos ou diferenças finitas do comportamento) de estruturas complexas, bem como problemas de interacção solo/estrutura permitindo por exemplo, reproduzir de forma expedita a totalidade do processo de construção. O número de utilizadores de programas baseados no método dos elementos finitos aumentou drasticamente nos últimos 15 anos, especialmente no estrato mais jovem. Isto deve-se principalmente à comercialização em larga escala de *software* especializado aliada à rápida evolução tecnológica e à necessidade de se construir por exemplo em zonas urbanas onde a análise da interacção entre a estrutura a dimensionar e as adjacentes é mais relevante.

Por essa razão, é essencial que se entenda as potencialidades e limitações dos modelos a ser utilizados, de forma a adoptar os parâmetros correctos, interpretar de forma correcta os resultados computacionais e traduzir de forma eficaz estes resultados em soluções para problemas geotécnicos.

Há ainda que ter presente que a informação fornecida por parte dos programas de cálculo comerciais sobre a formulação e implementação dos modelos constitutivos é por vezes pouco clara, o que dificulta adicionalmente a tarefa da escolha do modelo e respectivos parâmetros.

1.2. Objectivos

Esta dissertação tem como objectivo a implementação e validação de dois modelos constitutivos utilizados para reproduzir o comportamento do solo, bem como apresentar de forma generalizada os diversos elementos necessários para a formulação de diferentes tipos de modelos constitutivos (linear e não-linear elástico, elástico linear perfeitamente plástico).

É dado especial ênfase a modelos constitutivos para solos baseados na elasticidade não-linear, como é o caso do modelo K-G (Naylor et al., 1981), cujos parâmetros podem ser derivados a partir de ensaios laboratoriais convencionais, e o modelo de Jardine (Jardine et al., 1986), também conhecido por *Small Strain Stiffness Model*, cujos parâmetros são obtidos directamente através dos resultados de ensaios triaxiais no espectro das pequenas deformações. O primeiro é um modelo que reproduz a relação tensão-deformação desde o início do carregamento até à rotura (quando o módulo de deformabilidade de distorção é zero), enquanto o segundo define a relação tensão-deformação na gama das pequenas deformações. Assim, proceder-se-á à implementação das equações constitutivas destes modelos no programa de cálculo comercial PLAXIS (versão 8.2), bem como a sua validação através de análises numéricas destinadas a simular ensaios de laboratório.

1.3. Estrutura da Dissertação

A presente dissertação contém sete capítulos principais.

O primeiro capítulo apresenta uma introdução aos temas discutidos nesta dissertação, bem como os objectivos que se pretendem alcançar e um breve resumo do conteúdo de cada capítulo.

No segundo capítulo são tecidas considerações gerais sobre o método dos elementos finitos, nomeadamente uma breve descrição dos seus princípios e do seu enquadramento no contexto da engenharia geotécnica. São também abordadas as estratégias numéricas empregues para a resolução de problemas não-lineares.

No terceiro capítulo descrevem-se alguns modelos constitutivos, nomeadamente o modelo linear elástico e dois modelos não-lineares elásticos: modelo K-G e modelo de Jardine. Também são discutidos os conceitos necessários à formulação de um modelo elastoplástico, nomeadamente a função de cedência, a função de potencial plástico e leis de endurecimento/amolecimento. São também apresentados os critérios de rotura mais utilizados na engenharia geotécnica.

No quarto capítulo é realizada uma introdução ao processo de implementação de modelos constitutivos no *software* PLAXIS pelo utilizador.

No quinto capítulo procede-se à formulação das equações que descrevem o modelo K-G e consequente implementação no programa PLAXIS. Adicionalmente são considerados diferentes algoritmos de integração da trajectória de tensões e o seu desempenho é comparado. Para validação deste modelo, realizaram-se várias

análises numéricas que simulam ensaios triaxiais a tensões de confinamento distintas, de forma a avaliar as capacidades e limitações do modelo.

No sexto capítulo, de forma análoga ao capítulo anterior, prossegue-se à formulação das equações que descrevem o modelo de Jardine e posterior implementação no PLAXIS. Este modelo é combinado com o critério de rotura de Mohr-Coulomb, permitindo assim formular um modelo elástico não-linear perfeitamente plástico, para descrever o comportamento do solo desde pequenas deformações até à rotura. Como validação, realizaram-se simulações numéricas de ensaios triaxiais com parâmetros retirados da literatura para areia aluvionar de Londres.

Por último, no Capítulo 7 são tecidas conclusões e recomendações para desenvolvimentos futuros.

2. Considerações sobre o Método dos Elementos Finitos

2.1. Princípios do Método de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é um método numérico utilizado na análise de inúmeros problemas de engenharia. Os subcapítulos seguintes apresentam um breve resumo dos seus principais pressupostos e o papel dos modelos constitutivos no seu contexto.

Actualmente existe uma vasta quantidade de programas que utilizam o método dos elementos finitos aplicado a diversos campos da Engenharia. No entanto, muitos destes programas apresentam-se com uma interface simples e apelativa, sendo possível a utilização destes sem grande conhecimento do método de análise ou o problema ao qual este é aplicado, dando lugar a resultados enganadores (Azevedo, 2003; Cook et al., 2002).

Entre os programas mais populares de uso generalizado do método de elementos finitos encontram-se o Abaqus FEA, VisualFEA, ADINA, ANSYS e Mathematica, que simulam um leque bastante variado de situações. O *software* escolhido para realizar o trabalho apresentado nesta dissertação foi o PLAXIS. Este é um programa de elementos finitos totalmente direccionado para engenharia geotécnica. Desta forma o utilizador não necessita de personalizar de forma exaustiva os problemas de engenharia geotécnica como aconteceria num programa de carácter generalizado.

O nome do método revela o seu princípio, ou seja, considera-se um problema dividido em pequenas partes (elementos finitos) ligadas entre si por um conjunto de pontos - pontos nodais ou nós. A junção dessas partes resulta no domínio do problema. A associação entre elementos ligados entre si por pontos nodais dá origem a uma malha. Em cada ponto nodal é definido um conjunto de graus de liberdade.

Os elementos finitos podem possuir uma forma quadrilátera ou triangular (Figura 2.1), e os seus lados podem ser rectos ou curvos (se os lados do elemento finito forem curvos é necessário que existam pontos nodais adicionais, geralmente no ponto médio de cada lado).

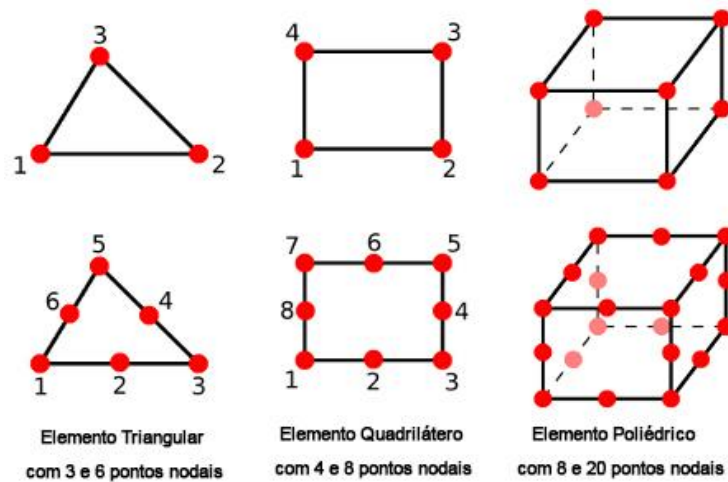


Figura 2.1 Exemplos de elementos finitos e pontos nodais

No PLAXIS estão disponíveis dois tipos de elementos: elemento triangular com 6 nós e com 15 nós. Devido ao facto dos computadores actualmente possuírem boa capacidade de processamento, é recomendável utilizar-se elementos triangulares de 15 nós, de forma a obter uma solução mais exacta (Brinkgreve, 2002).

Em análises de tensão-deformação consideram-se como incógnitas do problema os deslocamentos. Estes são designados de variáveis primárias e são calculados nos pontos nodais. As variáveis secundárias são derivadas a partir das primárias e são por exemplo as tensões e deformações. Assim, dentro de um elemento, o campo de deslocamentos, u , é obtido através de valores nodais discretos que se encontram num vector v e usando funções de interpolação que se encontram na matriz N , (Brinkgreve, Broere, & Waterman, 2002):

$$\{u\} = [N]\{v\} \quad (2.1)$$

Convenientemente é possível utilizar o mesmo tipo de funções como funções de interpolação e forma, classificando assim o elemento como isoparamétrico. Existe uma função de forma por cada ponto nodal, a qual toma o valor unitário no ponto nodal respectivo e valor nulo nos restantes pontos nodais.

As deformações são derivadas do campo de deslocamentos e armazenadas no vector $\{\varepsilon\}$. Desta forma o campo de deformações dentro de um elemento pode ser expresso pelo produto da matriz das derivadas das funções de interpolação $[B]$ por $\{v_E\}$ (que contém uma lista de deslocamentos nodais para o elemento):

$$\{\varepsilon\} = \delta\{u\} = [B]\{v_E\} \quad \text{com} \quad B = \delta[N] \quad (2.2)$$

As tensões (σ) relacionam-se com as deformações (ε) através de uma matriz constitutiva $[D]$, que para um modelo elástico linear é constante (Lei de Hooke). Esta relação é escrita na forma incremental quando o material possui um comportamento não-linear (Equação (2.3)).

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} \quad (2.3)$$

Caso se pretenda modelar um solo elástico não-linear ou elastoplástico, a matriz $[D]$ deixa de ser constante, e passa a variar com a tensão e/ou deformação. Logo, é necessário implementar uma estratégia para resolver a mudança constante do comportamento do material, assunto que será abordado nos subcapítulos seguintes.

Baseando-se no Princípio da Energia Potencial Mínima pode demonstrar-se que para um elemento (Cook et al., 2002):

$$[K_E]\{\Delta v_E\} = \{\Delta F_E\} \quad (2.4)$$

Onde $\{\Delta F_E\}$ corresponde ao vector de forças nodais e $[K_E]$ é a matriz de rigidez do elemento, que depende da matriz constitutiva, $[D]$ e da matriz das derivadas das funções de forma, $[B]$:

$$[K_E] = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (2.5)$$

Por fim, a rigidez de cada elemento é combinada numa matriz de rigidez global, $[K_G]$, e a equação geral do problema é então:

$$[K_G]\{\Delta v_G\} = \{\Delta F_G\} \quad (2.6)$$

Onde $\{\Delta v_G\}$ é o vector dos deslocamentos nodais globais e $\{\Delta F_G\}$ é o vector de forças nodais global.

2.2. Método de Newton-Raphson

Como foi referido acima, existem várias estratégias para lidar com problemas não-lineares elásticos e/ou elastoplásticos. Todas envolvem escrever a Equação (2.6) em forma incremental global:

$$[K_G]^i \{\Delta v_G\}^i = \{\Delta F_G\}^i \quad (2.7)$$

Onde $[K_G]^i$ é a matriz de rigidez global incremental, $\{\Delta v_G\}^i$ é o vector de deslocamentos nodais incrementais, $\{\Delta F_G\}^i$ é o vector de forças nodais incrementais e por fim, i é o número do incremento. Assim para cada incremento, a equação (2.7) deve ser resolvida, e a solução final de $\{\Delta v_G\}$ é obtida somando os resultados $\{\Delta v_G\}^i$ para todos os incrementos. Contudo, devido ao comportamento constitutivo não-linear, $[K_G]^i$ depende da tensão e/ou deformação correntes, não sendo constante, ou seja, varia ao longo de um incremento. Entre os métodos de resolução mais populares encontram-se o Método Visco-Plástico, o Método da Rigidez Tangente (*Tangent Stiffness*) e o Método de Newton-Raphson.

Uma das formas empregues para resolver este problema é dividir a carga aplicada numa série de pequenos incrementos e ajustar a matriz de rigidez no final de cada incremento (Método da Rigidez Tangente). No entanto, o problema desta aproximação é que existe uma acumulação de erros em cada incremento, o que por sua vez causa problemas de equilíbrio. (Ver Figura 2.2). Para além disso não é eficaz em tempos de computação dividir a carga em pequenos incrementos (de forma a minimizar o erro), pois solucionar o sistema global de equações (Equação (2.7)) consome tempo e capacidade do computador.

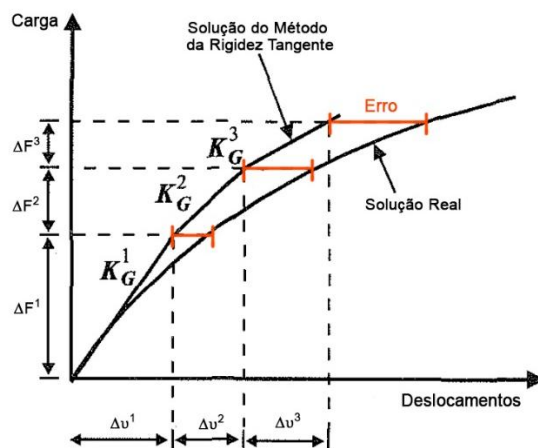


Figura 2.2 Acumulação de erro em cada incremento com algoritmo da Rigidez Tangente (adaptado de Potts, 1999)

Além disso, é geralmente difícil predeterminar o tamanho dos incrementos necessário de forma a alcançar um erro aceitável. Este método pode também obter resultados incorrectos quando o solo muda de regime de comportamento de elástico para plástico (ou vice versa), não contemplando esta mudança dentro de cada incremento. Isto resulta em estados de tensões impossíveis que violam o modelo constitutivo.

Assim, de forma a eliminar a situação descrita previamente é comum utilizar-se o Método de Newton-Raphson, considerado o mais robusto dos métodos mencionados anteriormente. O processo iterativo deste método consiste em dividir a carga aplicada gradualmente em incrementos, e efectuar iterações em cada incremento de carga para que a solução incremental seja equilibrada. Inicialmente este método é semelhante ao da Rigidez Tangente, mas Newton-Raphson distingue-se deste quando assume que a solução inicial provavelmente é incorrecta, utilizando os deslocamentos incrementais calculados para estimar a carga residual (ou seja, o vector das forças nodais global, $\{\Delta F_G\}$), como forma de quantificar o erro na análise. A equação (2.7) é resolvida de novo com essa carga residual do lado direito e o processo é repetido até que o erro seja aceitável, como esquematizado na Figura 2.3. Desta forma, o método de Newton-Raphson tenta rectificar um dos problemas do método da Rigidez Tangente, avaliando o comportamento do solo dentro ou muito perto de um espaço de tensões possível. Assim, recordando a equação (2.7) aplicadas para este problema:

$$[K_G]^i \{\Delta v\}^i = \{F_{ex}\}^i - \{F_{in}\}^{i-1} \quad (2.8)$$

Onde $[K_G]^i$ é a matriz de rigidez tangente global do incremento i , $\{\Delta v\}^i$ é o vector de deslocamentos incrementais associados ao incremento i , $\{F_{ex}\}^i$ é o vector de carga externa aplicada, $\{F_{in}\}^{i-1}$ é vector de força interna do incremento anterior e i refere-se ao número do incremento. É possível então dividir um incremento em várias iterações:

$$[K_G]^j \{\delta v\}^j = \{F_{ex}\}^i - \{F_{in}\}^{j-1} \quad (2.9)$$

onde, j refere-se ao número da iteração, δv é um vector que contém deslocamentos iterados, que contribuem para os incrementos de deslocamentos do incremento i :

$$\{\Delta v\}^i = \sum_{j=1}^n \{\delta v\}^j \quad (2.10)$$

Além disso, $\{F_{in}\}$ é calculado através da seguinte fórmula:

$$\{F_{in}\} = \int [B]^T \{\sigma_c^{i-1}\} dV \quad (2.11)$$

Onde, $\{\sigma_c^{i-1}\}$ diz respeito ao vector das tensões constitutivas. A integração das tensões será abordada na próxima secção.

Este problema é resolvido (em várias iterações) até que a diferença entre os vectores de carga interna e externa divididas pelo vector de carga externa, denominado por erro (e), esteja dentro da tolerância definida pelo utilizador. Este processo de resolução é repetido para cada incremento de carga externa até que esta é aplicada na sua totalidade.

Desta forma, as iterações deste método começam de um estado de equilíbrio entre deformação e tensão, conhecido no incremento anterior. A taxa de convergência é elevada devido à computação de uma nova matriz de rigidez tangente, correspondente ao estado de deformação-tensão da iteração anterior (Figura 2.3 a)). Quanto mais exacta for a matriz tangente de rigidez, menos iterações são necessárias. Com esta matriz (invertida), calcula-se o incremento de deslocamentos com a diferença entre forças internas e externas, e determina-se o incremento de deformação com (2.2) e as respectivas tensões constitutivas. Em seguida cria-se um novo vector de reacção interna com as tensões constitutivas com a Equação (2.11) e calcula-se e avalia-se o erro. Este processo está descrito em pormenor no anexo A do Manual Científico do Plaxis (Brinkgreve, 2002).

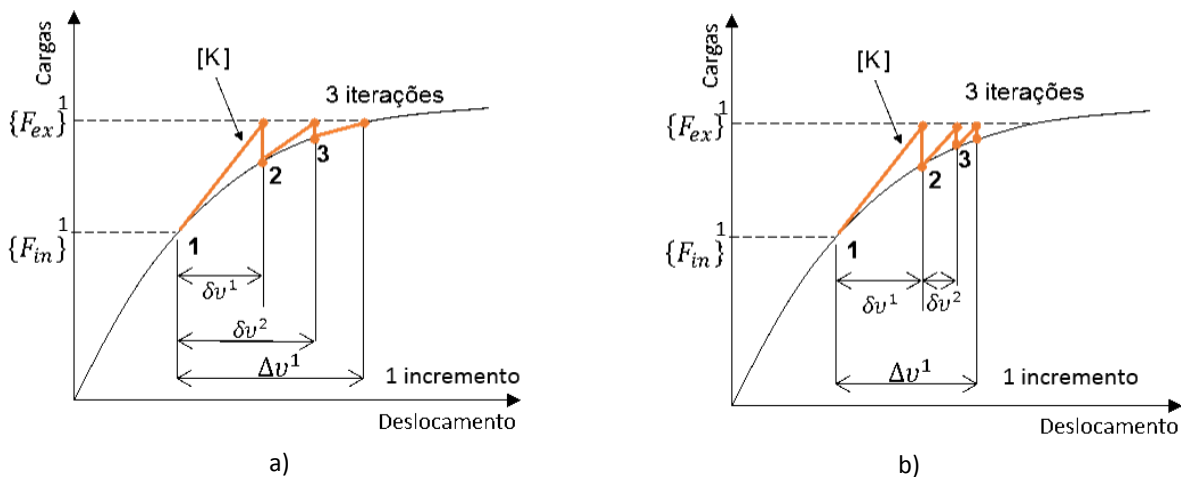


Figura 2.3 a) Representação do algoritmo do Método de Newton-Raphson e b) algoritmo do Método Modificado de Newton-Raphson

Como forma de reduzir as exigências computacionais, utiliza-se regularmente o Método Modificado de Newton-Raphson onde só é necessário calcular a matriz de rigidez tangencial no início de cada incremento e não para cada iteração, precisando no entanto de mais iterações (Ver Figura 2.3 b)). Se pequenos incrementos forem utilizados, algo que acontece regularmente, as diferenças em termos de resultados são pequenas, visto que o número extra de integrações geralmente compensa o custo computacional de criar a matriz de rigidez tangencial em cada iteração. É possível também combinar estes dois esquemas caso a convergência seja

demasiado lenta através de um computador. No caso específico do PLAXIS, por defeito é executado o método modificado de Newton-Raphson, excepto se se alterar a secção da subrotina onde se calcula a matriz.

2.3. Algoritmos de Integração de Tensões

Como se pode constatar da secção anterior, um aspecto essencial para a obtenção da solução para um problema não linear é a determinação das tensões constitutivas. Estas são obtidas através da integração das equações constitutivas ao longo do incremento de deformação imposto. Existem diversos algoritmos que permitem resolver este problema, sendo denominados por *stress point algorithms*, que podem ser classificados como implícitos, explícitos ou uma combinação de ambos. Os mais conhecidos são o *substepping algorithm* (explícito) e o *implicit return algorithm* (Potts & Ganendra, 1994). Seguidamente serão discutidos métodos de integração para cálculo das tensões.

2.3.1. Algoritmos de Integração de Tensões

- **Considerações gerais**

De seguida serão analisados alguns métodos numéricos para resolução de situações que envolvem equações diferenciais. No caso presente desta dissertação são utilizados na integração das equações constitutivas em cada *substep* baseando-se no *substepping algorithm*, que divide as deformações iterativas em pequenos *substeps*. Estes serão aplicados posteriormente no código dos vários modelos de solo, sendo os mais utilizados o Método de Euler e o Método Modificado de Euler.

Generalizando, estes métodos numéricos são utilizados no problema do valor inicial, também conhecido como problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad a \leq x \leq b \quad (2.12)$$

Este problema é composto por uma equação diferencial juntamente com um valor especificado (valor inicial ou condição inicial) de uma função desconhecida $y(x)$, num determinado ponto. Uma solução deste problema acima será uma função diferenciável $y(x)$ que substituída em $f(x, y)$, conduz à igualdade $y'(x) = f(x, y(x))$ e tal que $y(x_0) = y_0$. Por outras palavras a curva $y = y(x)$ deve verificar a equação diferencial e a condição inicial. A função $f(x, y)$ deve ser contínua em todo o domínio do plano x - y , e (x_0, y_0) é um ponto nesse domínio.

Adaptando este método ao tema presente, tem-se que:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + D(\varepsilon_i, \sigma_i) \times (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \quad (2.16)$$

Sendo $D(\varepsilon_i, \sigma_i)$ a matriz de rigidez tangente do material para o estado i e ε_i é o vector de incrementos de deformação nesse mesmo *substep*.

Neste método é necessário um valor muito pequeno de $(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)$ ou h para se obter valores aproximados, contudo isso implica aumentar o número de *substeps* efectuados, aumentando também o tempo de cálculo. É dos métodos menos eficientes e elementares.

- **Método de Euler Modificado**

Uma das causas para os erros no método de Euler é o facto de $f(x_i, y_i)$, ou seja a derivada da função $y'(x)$ no ponto inicial em (2.12), ser aplicada ao intervalo total. De forma a diminuir o erro proveniente desta causa, existem modificações que se podem executar, como o método de Euler modificado, também conhecido como método do ponto médio (*midpoint*).

Este método já faz parte de uma família maior de técnicas de solução, denominada por métodos de Runge-Kutta, apesar de ser um caso particular e simplificado.

Sucintamente este método prevê o cálculo da função f (ou seja a derivada da função y) no ponto médio do intervalo h . O valor de y para o ponto médio do intervalo, $x_{i+1/2}$ (Figura 2.5 a)) é:

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \times \frac{h}{2} \quad (2.17)$$

E de seguida esse valor previsto é utilizado no cálculo do declive (*slope*) no ponto médio:

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \quad (2.18)$$

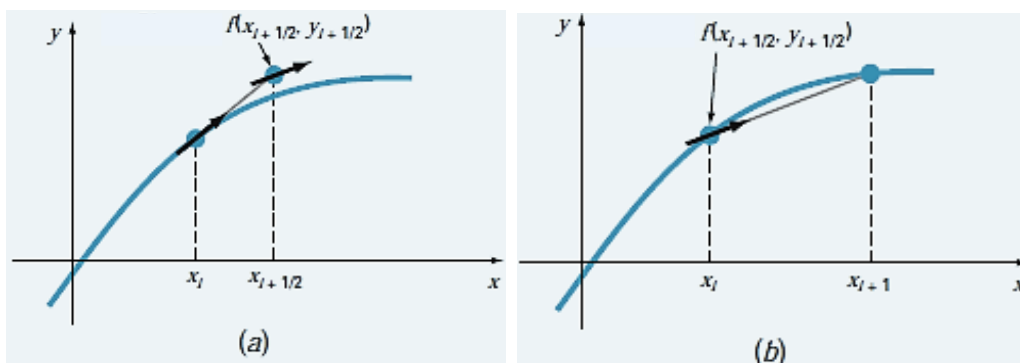


Figura 2.5 Representação gráfica do método de Euler modificado (adaptado de Chapra & Canale, 2015)

Assim, o valor da função y no ponto $i+1$ é estimado como sendo:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \times h \quad (2.19)$$

Ou seja:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + D(\varepsilon_{i+1/2}, \sigma_{i+1/2}) \times (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \quad (2.20)$$

Há que notar que este método é baseado na fórmula de integração mais básica de Newton-Cotes:

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f(x_i) \quad (2.21)$$

Onde x_i é o ponto médio no intervalo (a, b) . Desta forma, a Equação (2.20) pode ser expressa desta forma:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong hf(x_{i+1/2}) \quad (2.22)$$

Pode concluir-se que o método de Euler modificado é superior ao método de Euler, uma vez que utiliza uma estimativa da tangente no ponto médio do intervalo, conseqüentemente o erro diminui com maior rapidez. É assim um método de segunda ordem, onde o erro global é de $O(h^2)$ comparado com o de Euler de $O(h)$.

2.3.2. Algoritmos de Integração utilizado pelo *software* PLAXIS

Para a obtenção das tensões constitutivas em regime elasto-plástico, o programa PLAXIS utiliza um esquema de integração implícito, sem *substepping*, proposto por Vermeer (1979).

Durante um incremento de deformação elastoplástica, a variação no estado de deformação, $\Delta\sigma$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\{\Delta\sigma\} = [D^e]\{\Delta\varepsilon\} - [D^e]\{\Delta\varepsilon^p\} = [D^e](\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^p\}) \quad (2.23)$$

Em que $[D^e]$ representa a matriz de rigidez elástica para o actual incremento de tensões e $\{\Delta\varepsilon\}$ são os incrementos de deformação total obtidos através da matriz de interpolação e dos incrementos de deslocamentos já referidos em (2.2). De acordo com Brinkgreve et al. (2002) o incremento da deformação plástica, $\{\Delta\varepsilon^p\}$ pode ser estimado da seguinte forma:

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \lambda \left[(1 - \omega) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^{i-1} + \omega \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^i \right] \quad (2.24)$$

Onde λ é o escalar multiplicador plástico e ω é um parâmetro que permite indicar qual o tipo de esquema de integração ($\omega = 1$ é implícito e $\omega = 0$ é explícito). O incremento de factor plástico, λ é calculado sabendo que o novo estado de tensão tem que satisfazer a condição de cedência (ou seja, a função de cedência é zero):

$$\lambda = \frac{f(\sigma^{tr})}{d + h} \quad \text{com } d = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) [D^e] \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^i \quad (2.25)$$

E em que h é o parâmetro relacionado com endurecimento/amolecimento ($h = 0$ para modelos perfeitamente plásticos e constante para modelos com endurecimento linear).

Desta forma, a equação (2.23) pode ser reescrita de maneira a que o valor da tensão seja:

$$\{\sigma^i\} = \{\sigma^{tr}\} - \lambda [D^e] \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^i = \{\sigma^{tr}\} - \frac{\langle f(\sigma^{tr}) \rangle}{d + h} [D^e] \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^i \quad (2.26)$$

Quando $f(\sigma^{tr})$ é menor ou igual a zero considera-se que $\langle f(\sigma^{tr}) \rangle = 0$. E considera-se que $\{\sigma^{tr}\}$ corresponde a um *trial stress* que pode corresponder ao novo estado de tensão caso este se verifique puramente elástico.

$$\{\sigma^{tr}\} = \sigma^{i-1} + [D^e] \{\Delta \varepsilon\} \quad (2.27)$$

3. Considerações Gerais sobre alguns Modelos Constitutivos dos Solos

3.1. Enquadramento Geral

Um dos maiores desafios na engenharia geotécnica é prever o comportamento do solo, principalmente a relação tensão-deformação. Sabendo que o solo é um material heterogêneo que apresenta conseqüentemente diversos comportamentos que dependem da sua composição, história de carregamento e tensões actuantes, é possível observar através de, por exemplo, ensaios triaxiais um aspecto comum presente: o facto das deformações reversíveis (elásticas) e irreversíveis (plásticas) coexistirem neste (Equação (3.1)).

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \tag{3.1}$$

Dessa forma, é completamente justificável adoptarem-se modelos elastoplásticos para modelação de solos, entendendo-se com isso que quando o material se encontra em regime elastoplástico, as deformações totais são resultado de deformações reversíveis e irreversíveis.

- **Invariantes de tensão e deformação**

O estado de tensões num ponto pode ser caracterizado pelas tensões actuantes em 3 planos ortogonais (x, y, z) definidos, ou alternadamente pelas 3 tensões principais, e respectivas direcções. São sempre necessários 6 elementos de informação. Assumindo que o comportamento do material é isotrópico, a resposta do material é independente da direcção dessas mesmas tensões. Assim na formulação de modelos isotrópicos o estado de tensão pode ser caracterizado por 3 elementos de informação: as tensões principais ou 3 invariantes de tensão que se definem seguidamente (Figura 3.1).

Assim, considera-se conveniente especificar só alguns aspectos do vector de tensões através de invariantes de tensões, especialmente para materiais isotrópicos cujas propriedades são iguais em todas as direcções.

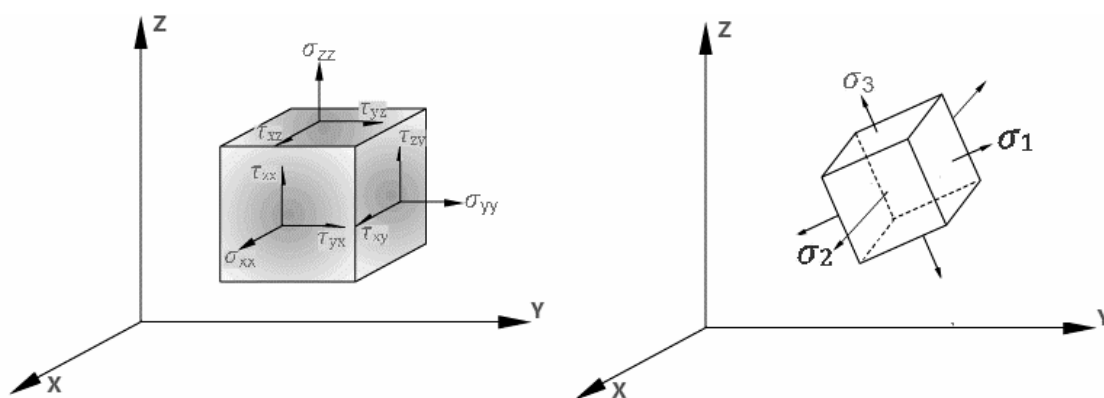


Figura 3.1 Tensões num dado sistema de coordenadas e respectivas tensões principais

Um dos variantes mais utilizados em engenharia geotécnica é a tensão média isotrópica, aqui expressa em tensões principais efectivas:

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3), \text{ quando } \sigma'_2 = \sigma'_3 \text{ então } p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3) \quad (3.2)$$

Outro invariante é a tensão deviatórica, q , também conhecida como tensão equivalente ou tensão de Von Mises:

$$q = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2} \quad (3.3)$$

Para os casos de compressão triaxial onde $\sigma'_2 = \sigma'_3$ e extensão triaxial onde $\sigma'_1 = \sigma'_2$, q pode ser reduzido à expressão:

$$q = |\sigma'_1 - \sigma'_3| \quad (3.4)$$

Por último, o ângulo de Lode:

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{(\sigma'_2 - \sigma'_3)^2}{(\sigma'_1 - \sigma'_3)^2} - 1 \right) \right] \quad (3.5)$$

Em que θ toma o valor igual a -30° em compressão triaxial e igual a 30° em extensão triaxial.

De forma análoga é possível definir o vector de deformações e respectivos invariantes incrementalmente. Em engenharia geotécnica é comum definirem-se dois invariantes de deformação:

$$\Delta\varepsilon_{vol} = \Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3 \quad (3.6)$$

$$\Delta\varepsilon_{dev} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2)^2 + (\Delta\varepsilon_2 - \Delta\varepsilon_3)^2 + (\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3)^2]} \quad (3.7)$$

Onde $\Delta\varepsilon_{vol}$ é a deformação volumétrica incremental e $\Delta\varepsilon_{dev}$ corresponde à deformação deviatórica incremental em função das deformações principais. Os invariantes das deformações acumuladas são dados por:

$$\varepsilon_{vol} = \int \Delta\varepsilon_{vol} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{dev} = \int \Delta\varepsilon_{dev} \quad (3.9)$$

3.2. Modelo Elástico Linear

- **Linear elástico isotrópico**

Uma relação linear entre tensões e deformações é a forma mais simples de equacionar um modelo constitutivo para solos. Esta implica uma proporcionalidade constante entre incrementos de tensão e deformação.

Os dois parâmetros mais conhecidos para caracterizar um comportamento elástico linear isotrópico são E (módulo de Young) e μ (coeficiente de Poisson). Recordando (2.3), é possível descrever da seguinte forma a relação entre incrementos de tensão efectiva e incrementos de deformação utilizando os parâmetros definidos em termos de tensões efectivas, aos quais é atribuído ('):

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E'}{(1 + \mu')(1 - 2\mu')} \begin{bmatrix} 1 - \mu' & \mu' & \mu' & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \mu' & \mu' & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \mu' & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\mu'}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1 - 2\mu'}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1 - 2\mu'}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

simétrico

No entanto também é possível utilizar um par alternativo de constantes elásticas: K (módulo de deformabilidade volumétrica) e G (módulo de deformabilidade de distorção), onde (3.10) fica:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K' + 4/3 G & K' - 2/3 G & K' - 2/3 G & 0 & 0 & 0 \\ & K' + 4/3 G & K' - 2/3 G & 0 & 0 & 0 \\ & & K' + 4/3 G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

simétrico

onde:

$$G = \frac{E'}{2(1 + \mu')} \quad K' = \frac{E'}{3(1 - 2\mu')} \quad (3.12)$$

Assim, E' corresponde ao módulo de Young drenado, μ' ao coeficiente de Poisson drenado e K' ao módulo de deformabilidade volumétrica drenado. A matriz $[D]$ é uma relação entre incrementos de tensão efectiva e incrementos de deformação. Alternativamente as equações (3.11) e (3.12) podem escrever-se com parâmetros que correspondem ao comportamento não drenado (K_u, G) e nesse caso estabelecem a relação entre incrementos de tensão total e incrementos de deformação. O parâmetro G é igual em casos drenados e não drenados uma vez que a água não possui resistência ao corte.

De acordo com Lade (2005), os modelos baseados na teoria da elasticidade podem prever o comportamento dos solos de forma satisfatória, desde que os estados de tensão não se aproximem da rotura. Uma das limitações que se observa é que as equações (3.11) e (3.12) não prevêm qualquer acoplamento entre tensões de corte e deformações normais, o qual é um aspecto importante do comportamento observado nos solos.

Como exemplo (Figura 3.2), considere-se uma amostra composta por areia densa submetido a um ensaio de corte simples.

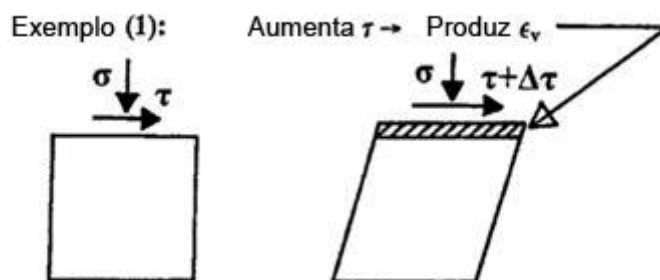


Figura 3.2 - Exemplo esquemático de um ensaio de corte simples com aumento da tensão de corte (adaptado de Lade, 2005)

No caso em que a tensão de corte aumenta, um modelo elástico prevê um aumento dos incrementos da deformação de corte, ($\Delta\gamma$). No entanto, observações do comportamento real do solo mostram dilatância, que se traduz num aumento da altura da amostra, o que não é reproduzido pelo modelo elástico.

Em problemas geotécnicos, este modelo é frequentemente utilizado para representar elementos estruturais (por exemplo: muros de suporte, lajes, etc.).

3.3. Modelos Elásticos Não-Lineares

Os modelos baseados na elasticidade não-linear podem modelar com mais exactidão as deformações do solo do que o modelo linear elástico, uma vez que os parâmetros elásticos passam a depender do estado de tensão e/ou deformação em que se encontram. No entanto, continua-se a não conseguir reproduzir a tendência do solo para variar de volume quando submetido a forças de corte. Adicionalmente não se consegue geralmente representar mecanismos de rotura devido ao facto de na elasticidade as direcções dos principais incrementos de tensão coincidirem com as dos incrementos de deformação.

3.3.1. Modelo K-G

Este modelo não-linear elástico proposto por Naylor et al. (1981) considera que os módulos K e G (Equação (3.12)) são tangentes e explicitamente definidos em termos de invariantes de tensões, p' e q , (Figura 3.3) ou alternativamente em função das quantidades $\sigma_{médio}$ e σ_{dev} (Equações (3.17) e (3.18)):

$$K_t = K_i + \alpha_K \cdot p' \quad (3.13)$$

$$G_t = G_i + \alpha_G \cdot p' + \beta_G \cdot q \quad (3.14)$$

O modelo pode incorporar um critério de rotura, tal que G tende para zero quando as tensões verificam o critério de rotura através da escolha criteriosa dos parâmetros G_i , α_G e β_G . Se K_t e G_t são definidos em termos

de p' e q pode ser incorporado o critério de Drucker-Prager; quando são definidos em termos de $\sigma_{médio}$ e σ_{dev} é possível introduzir o critério de Mohr-Coulomb.

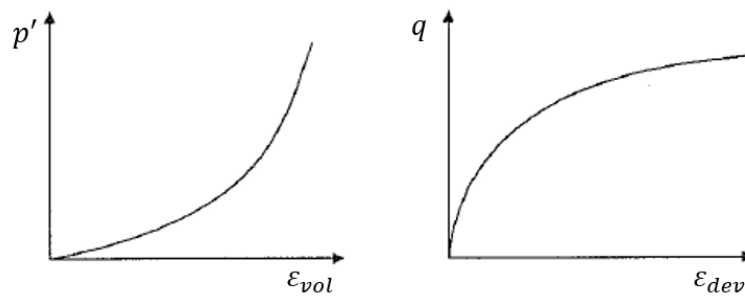


Figura 3.3 Modelo K-G

Desta forma, este modelo necessita de cinco parâmetros, K_i , α_K , G_i , α_G e β_G para descrever o comportamento do material. Estes são normalmente escolhidos através de ensaios triaxiais, de forma a melhor se ajustarem ao material seleccionado. Este modelo surgiu como alternativa ao modelo hiperbólico (não abordado nesta dissertação), uma vez que este utiliza oito a nove parâmetros de entrada e o modelo K-G utiliza apenas 5. Na literatura este modelo foi utilizado para modelar enrocamento com elevado conteúdo de finos bem como argila (Naylor et al. , 1997). Sabe-se ainda que:

$$K_t = \frac{\Delta p'}{\Delta \varepsilon_{vol}} \quad (3.15)$$

$$G_t = \frac{\Delta q}{3\Delta \varepsilon_{dev}} \quad (3.16)$$

Considera-se que α_K e α_G são valores positivos e β_G é um valor negativo de forma a que perto da rotura o valor do módulo de deformabilidade distorcional tangente, G_t , se aproxime de zero. Além disso é possível reproduzir condições de descarregamento ao definir-se β_G igual a zero na descarga. Assim, K_t permanece igual e G_t aumenta drasticamente (3.14). Se novo carregamento se proporcionar e o solo se apresente perto da rotura, β_G restabelece o seu valor antigo. Este comportamento para carregamentos e descarregamentos de carga não foi abordado na implementação deste modelo na presente dissertação.

Nesta dissertação utilizar-se-á este modelo com um critério de rotura de Mohr-Coulomb e assim as relações (3.15) e (3.16) são reescritas da seguinte forma:

$$K_t = K_i + \alpha_K \cdot \sigma_{médio} \quad (3.17)$$

$$G_t = G_i + \alpha_G \cdot \sigma_{médio} + \beta_G \cdot \sigma_{dev} \quad (3.18)$$

Em que,

$$\sigma_{médio} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (3.19)$$

$$\sigma_{dev} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Os parâmetros G_i , α_G e β_G devem estar relacionados de forma a respeitar estas relações e assim, o critério de rotura de Mohr-Coulomb.

3.3.2. Modelo de Jardine

O comportamento não-linear no intervalo das pequenas deformações nem sempre é valorizado, ignorando-se o seu efeito. Análises que não consideram este comportamento acabam por frequentemente sobrestimar as deformações nos pontos do domínio sujeitos a pequenas perturbações (pequenos incrementos de tensão) e subestimar deformações máximas das estruturas. Por exemplo, na análise das deformações causadas pela construção de um túnel a não consideração do comportamento não linear na gama das pequenas deformações leva a subestimar os assentamentos máximos registados (Puzrin, Addenbrooke, & Potts, 1997).

Observando a Figura 3.4, observa-se que a deformação máxima na qual os solos exibem um comportamento quase totalmente recuperável, ou seja elástico, é muito pequena (menor que 1×10^{-5} em areias). De facto, pensa-se que o comportamento existente para as deformações (de corte) menores que 1×10^{-5} , ou seja no domínio das muito pequenas deformações, é comum a todos os materiais geotécnicos. À medida que a deformação de corte aumenta, observa-se que a rigidez do solo diminui de forma não-linear, sendo particularmente perceptível numa escala logarítmica onde exibe um andamento idêntico ao que se mostra na Figura 3.4. Considera-se que se entra no domínio das pequenas deformações quando as deformações são maiores que 1×10^{-5} e no domínio das grandes deformações quando maiores que 1×10^{-3} . Esta última fronteira é baseada no limite dos ensaios de laboratório convencionais ou seja, ensaios triaxiais ou edométricos sem instrumentação especial (ex: medidores de deformações locais).

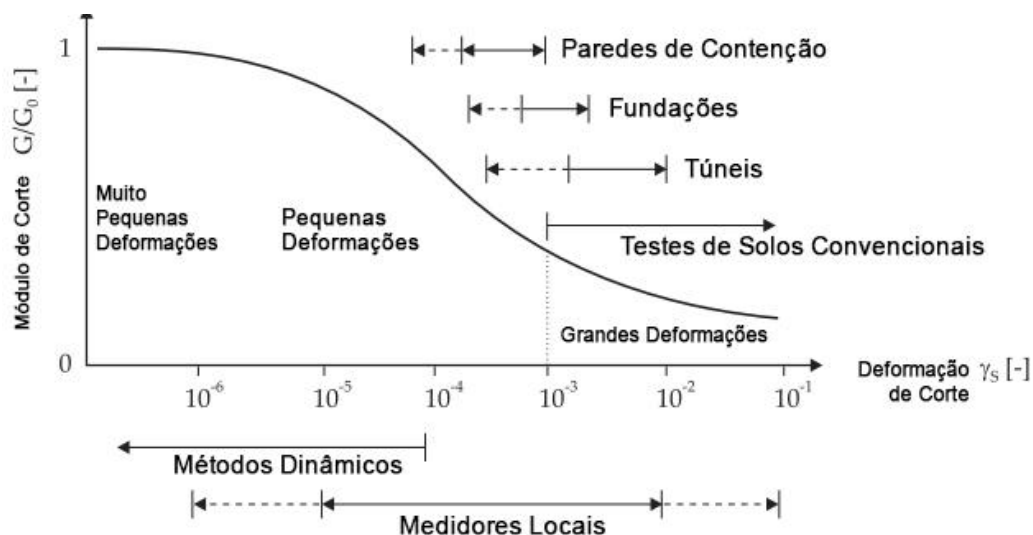


Figura 3.4 Curva característica de rigidez-deformação do solo numa escala logarítmica (adaptado de Thomas Benz, Schwab, & Vermeer, 2009)

Apesar de existirem diversos trabalhos que exploram este comportamento não-linear para pequenas deformações, inclusive propostas de modelos, actualmente a sua aplicação directa no Projecto Geotécnico

ainda não é comum (Benz & Nordal, 2010), principalmente devido à, por vezes complexa, tarefa de obtenção dos parâmetros necessários. Embora se possa argumentar que nos últimos anos este aspecto do comportamento do solo esteja mais presente devido ao desenvolvimento do poder de computação, e consequente facilidade no acesso a vários modelos constitutivos disponíveis em diversos *softwares* (Clayton, 2011).

Assim, dos vários modelos presentes na literatura, escolheu-se representar o modelo de Jardine, também conhecido como *Small Strain Stiffness Model*. Este modelo descreve a rigidez do solo para pequenas deformações no intervalo $10^{-5} - 10^{-3}$ (Burland, Fourie, Potts, & Jardine, 1986), através de duas funções periódicas logarítmicas que expressam a relação não-linear entre o módulo de distorção normalizado tangente e a deformação de corte/distorcional e a relação não-linear entre o módulo de rigidez volumétrica normalizado tangente e a deformação volumétrica (Figura 3.5).

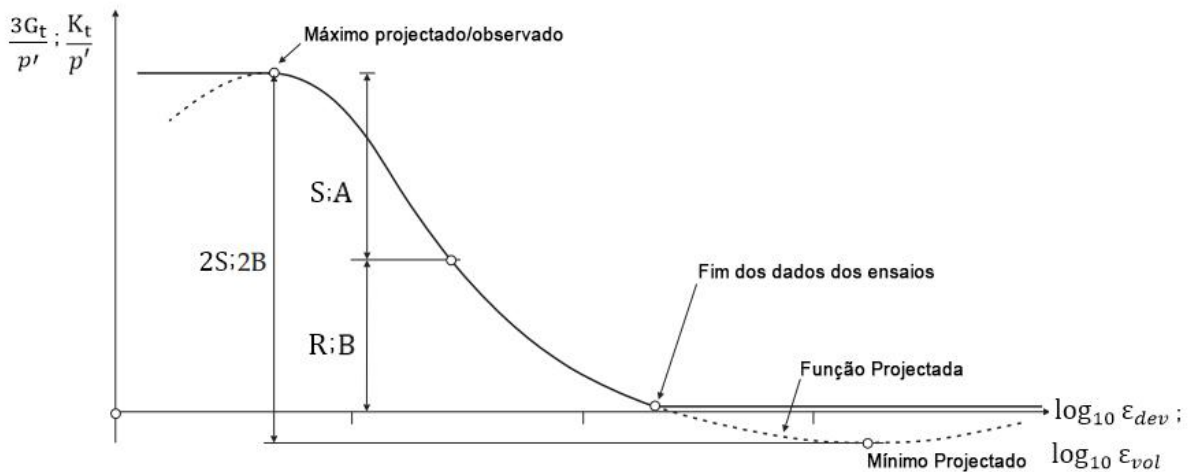


Figura 3.5 Projectão da curva: rigidez definida como uma função trigonométrica em função da deformação (adaptado de Jardine et al., 1986)

Desta forma as equações das curvas trigonométricas são as seguintes:

$$\frac{3G_t}{p'} = A + B \cos(\alpha X^\gamma) - \frac{B\alpha\gamma X^{\gamma-1}}{2.303} \sin(\alpha X^\gamma) \quad (3.21)$$

$$\frac{K_t}{p'} = R + S \cos(\delta Y^\eta) - \frac{S\delta\eta Y^{\eta-1}}{2.303} \sin(\delta Y^\eta) \quad (3.22)$$

Com:

$$X = \log_{10} \left(\frac{2\varepsilon_{dev}}{3C} \right) = \log_{10} \left(\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2]}}{3C} \right) \quad (3.23)$$

$$Y = \log_{10} \left(\frac{\varepsilon_{vol}}{T} \right) = \log_{10} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{T} \right) \quad (3.24)$$

Onde K_t é o módulo de rigidez volumétrica, G_t é o módulo de rigidez de corte, p' é a tensão efectiva média, ε_i são as deformações principais, e o número de parâmetros do material é aumentado para 10. Existem também os limites $\varepsilon_{volmax} > \varepsilon_{vol} > \varepsilon_{volmin}$ e $\varepsilon_{dmax} > \varepsilon_{dev} > \varepsilon_{dmin}$.

Ao seleccionar os parâmetros para este modelo há que ter em consideração que este varia o coeficiente de Poisson implicitamente em função da deformação. Assim, é necessário que o coeficiente de Poisson nunca passe dos limites físicos, ou seja, não exceda o valor de 0,5.

Há que salientar também que não foram encontrados registos da utilização deste modelo em Portugal, sendo as referências mais frequentes do Reino Unido (de onde origina). Este modelo é aplicado a solos locais (por exemplo: argila rija de Londres, cascalho arenoso aluvionar do Tamisa, etc).

Este modelo é frequentemente usado para descrever a parte elástica de um modelo elastoplástico no âmbito das pequenas deformações, sendo aplicado geralmente na análise numérica dos movimentos induzidos pela execução de túneis e escavações profundas em meio urbano.

3.4. Introdução aos Modelos Elastoplásticos

Como introdução considera-se a análise de um problema uniaxial, em que três comportamentos distintos são estudados: comportamento elastoplástico perfeito, comportamento elastoplástico com endurecimento e comportamento elastoplástico com amolecimento.

A Figura 3.6 a) corresponde à trajectória da relação de tensão-deformação de uma barra carregada uniaxialmente com uma deformação axial, ε , característica de materiais elastoplásticos perfeitos. No primeiro carregamento, a barra comporta-se de forma elástica linear ao longo do trecho AB, sendo o gradiente desse trecho dado pelo módulo de Young, E . Se o carregamento é removido antes de atingir o ponto B, as deformações experimentadas pelo material são reversíveis, ou seja, não são permanentes, e a trajectória do descarregamento ocorre ao longo do trecho BA. Se a barra for submetida a uma deformação para além do ponto B, que corresponde à tensão de cedência ou patamar de cedência, σ_y , os subsequentes incrementos de deformação são puramente plásticos. A tensão em regime plástico mantém-se constante enquanto a deformação aumenta, e caso se remova o carregamento em C, retorna-se ao regime elástico através do trecho CD, paralelo a BA. No entanto, nesse caso o material apresenta deformações permanentes, ou seja, não retorna à sua forma inicial.

A Figura 3.6 b) representa um comportamento idealizado para materiais elastoplásticos com endurecimento, em que o trecho AB exibe um comportamento elástico mas ao contrário do que acontece na Figura 3.6 a), ao se atingir a tensão inicial de cedência σ_{yB} , esta não permanece constante mas aumenta de forma não-linear. Dessa forma, como há acréscimo de tensão, ocorrem simultaneamente deformações elásticas e plásticas. Caso haja remoção da solicitação em C, o material segue pelo trecho CD, e se existir recarregamento a tensão de

cedência é agora σ_{yC} . Se a barra é solicitada ao ponto de chegar a E, a curva da deformação torna-se horizontal e a tensão na barra permanece constante, atingindo a rotura (e o comportamento é idêntico ao descrito para a Figura 3.6 a).

Por fim, a Figura 3.6 c) evidencia um material com comportamento elastoplástico com amolecimento, em que o trecho AB corresponde a um comportamento elástico. Em B o material atinge a primeira cedência se ao ser aplicada deformação acrescida ocorrem deformações elásticas e plásticas seguindo o trecho BC. A tensão de cedência diminui, traduzindo-se numa perda de resistência por parte do material.

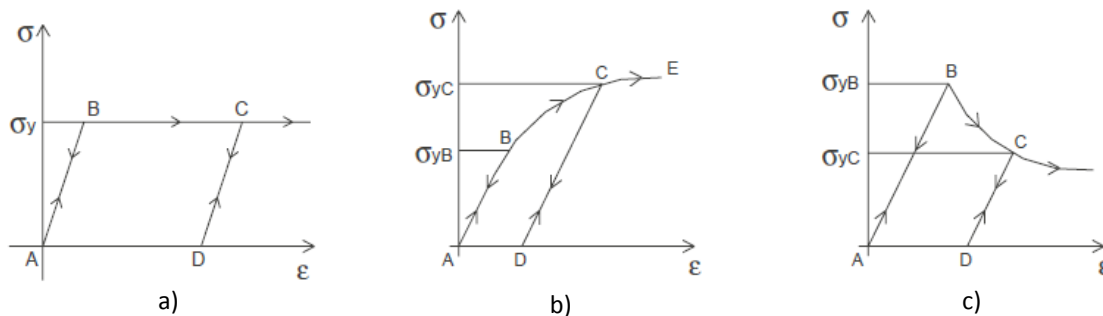


Figura 3.6 a) Material elastoplástico perfeito. b) Material elastoplástico com endurecimento. c) Material elastoplástico com amolecimento (adaptado de Cogliati, 2011)

A conversão destes conceitos acima descritos para um estado multiaxial de tensões e deformações exige a consideração das seis componentes de tensão e deformação, ou em alternativa, quando o material é considerado isotrópico, as três tensões principais ou três invariantes de tensões.

A teoria da plasticidade baseia-se no princípio de que não há uma coincidência entre as direcções das tensões principais acumuladas e as direcções das deformações incrementais ao contrário do modelo do comportamento elástico onde as direcções dos incrementos de tensão e de deformação coincidem.

É possível representar as tensões principais acumuladas e as deformações principais incrementais nos mesmos eixos do espaço multiaxial porque as direcções dos incrementos de deformação plástica não são definidas pela trajectória de tensões até à superfície de cedência mas pelo estado de tensão nesse ponto sobre essa superfície. Em contraste em modelos elásticos os incrementos de deformação dependem dos incrementos de tensão.

Para definir um modelo de comportamento plástico são necessários três elementos: uma função de cedência, uma função de potencial plástico e leis de endurecimento/amolecimento. Estes são apresentados de forma mais detalhada na secção seguinte.

3.4.1. Função de cedência

Ao contrário do que acontece para o caso unidimensional, onde é possível definir um valor para a tensão de cedência dos materiais, no estado multiaxial existem diferentes componentes de tensão que requerem uma função, F , Equação (3.25). Esta função é expressa em termos das componentes de tensão, $\{\sigma\}$, e parâmetros

de endurecimento e/ou amolecimento, $\{k\}$, e separa o comportamento puramente elástico do comportamento elastoplástico.

$$F = F(\sigma, k) = 0 \quad (3.25)$$

Para situações em que a função $F(\sigma, k) < 0$, a resposta do material é puramente elástica, enquanto $F(\sigma, k) = 0$ corresponde a comportamento elastoplástico. Um estado de tensão em que $F(\sigma, k) > 0$ não é possível para modelos elastoplásticos. Uma representação esquemática da função de cedência considerando a tensão principal $\sigma_2 = 0$, é apresentada na Figura 3.7.

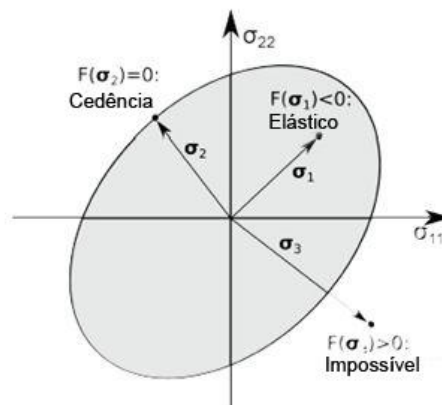


Figura 3.7 Função de cedência (adaptado de Gavel-Solberg, 2014)

3.4.2. Função de potencial plástico

O mecanismo de deformação plástica, ou seja, a proporção entre as diferentes componentes de deformação plástica, é definido pela lei de fluxo expressa pela Equação (3.26). Esta lei é definida geralmente por uma função de potencial plástico, $G(\{\sigma\}, \{m\}) = 0$.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.26)$$

Na equação (3.26), $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ representa o vector das seis componentes da deformação plástica incremental, λ é um escalar multiplicador que determina a magnitude do incremento de deformação plástica, e G é a função de potencial plástico, conforme referido acima.

Apenas as derivadas parciais em relação aos eixos (correspondentes às tensões) de G são exigidas para definir a lei de fluxo, representada graficamente na Figura 3.8. Nesta representação é possível observar uma superfície de potencial plástico no espaço das tensões principais.

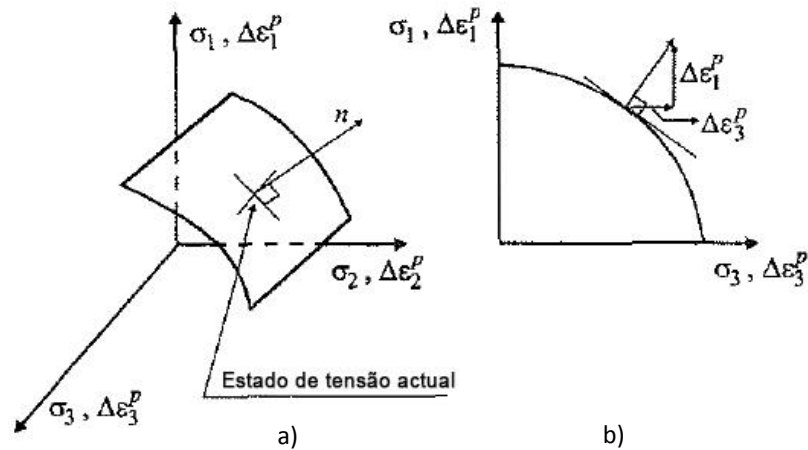


Figura 3.8 a) Superfície de potencial plástico b) Curva de potencial plástico

A direcção do fluxo plástico é normal à função de potencial plástico e quando essa função coincide com a função de cedência, F , então diz-se que se está perante uma lei de fluxo associada, (i.e. $F(\{\sigma\}, \{k\}) = G(\{\sigma\}, \{m\})$). Esta simplificação implica que a matriz constitutiva e a matriz global de rigidez são simétricas. Quando a função de cedência e a função de potencial plástico diferem diz-se que se está perante uma lei de fluxo não-associada, e as matrizes acima referidas são não-simétricas. Isto implica que a inversão destas matrizes requer maior capacidade computacional e mais tempo de análise. Uma lei de fluxo associada geralmente tem um bom desempenho na simulação da resposta de metais, porém é menos eficiente em solos (Schofield & Wroth, 1968).

3.4.3. Leis de endurecimento e amolecimento

As leis de endurecimento/amolecimento determinam como o parâmetro $\{k\}$ e consequentemente o tamanho, forma e/ou posição da função de cedência, variam com as deformações plásticas ou com o trabalho plástico. Quando o material é perfeitamente plástico não ocorre nenhum endurecimento ou amolecimento, e desta forma o parâmetro $\{k\}$ mantém-se constante e a superfície de cedência é imutável.

Sucintamente as leis de endurecimento/amolecimento permitem descrever mudanças de posição e tamanho da superfície de cedência em função das deformações plásticas.

Num caso bidimensional de um material elástoplástico com endurecimento, existem duas formas de endurecimento: isotrópico e cinemático como exemplificado na Figura 3.9.

No caso isotrópico apenas o tamanho da superfície de cedência se altera, mantendo-se a sua forma e posição, ou seja permanece centrada no mesmo ponto fixo. Por outro lado se a superfície de cedência permanece com o mesmo tamanho, forma e orientação, e somente muda de posição no referencial de tensões, trata-se de endurecimento cinemático.

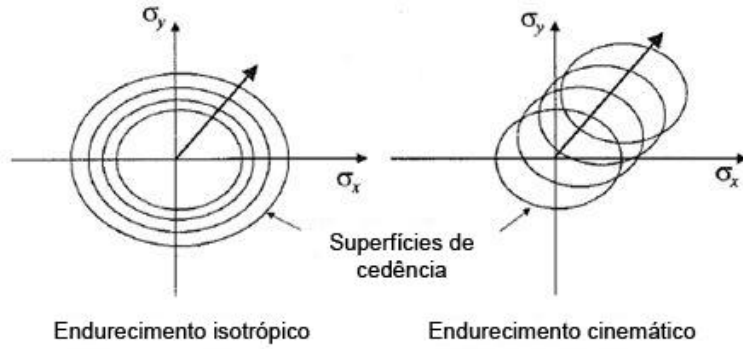


Figura 3.9 Tipos de endurecimento (adaptado de Potts & Zdravkovic, 1999)

3.4.4. Matriz Constitutiva Elastoplástica

Com base nas equações e conceitos enunciados anteriormente pode-se então definir a relação entre tensões incrementais e deformações incrementais com o objectivo de esta ser utilizada na implementação de modelos constitutivos elastoplásticos. Definindo $[D^{ep}]$ como matriz constitutiva elastoplástica e continuando a admitir que $[D]$ representa a matriz constitutiva puramente elástica, então a relação entre as tensões incrementais e as respectivas deformações para um material elastoplástico, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\Delta\sigma\} = [D^{ep}]\{\Delta\varepsilon\} \quad (3.27)$$

Sendo que o incremento de deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ é obtido através da soma de uma parcela elástica e outra plástica:

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^p\} \quad (3.28)$$

Relembrando as definições de material elástico e lei de fluxo para materiais plásticos, $\{\Delta\varepsilon^e\}$ e $\{\Delta\varepsilon^p\}$ respectivamente:

$$\{\Delta\varepsilon^e\} = [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} \quad (3.29)$$

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \lambda \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \quad (3.30)$$

Combinando as equações (3.29) e (3.30) com (3.27), é possível escrever que:

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} - \lambda[D] \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.31)$$

Conforme apresentado anteriormente, de acordo com a Teoria da Plasticidade, os materiais em regime plástico devem satisfazer a condição $F(\{\sigma\}, \{k\}) = 0$, ou seja após um incremento de deformação plástica devem permanecer na superfície de cedência tal que F se mantém igual a zero. Assim pode dizer-se que $dF(\{\sigma\}, \{k\}) = 0$.

Utilizando a regra de cadeia neste diferencial, obtém-se a equação denominada por equação de consistência:

$$dF(\{\sigma\}, \{k\}) = \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial k} \right\}^T \{\Delta k\} = 0 \quad (3.32)$$

Esta última equação pode ser escrita de outra forma:

$$\{\Delta\sigma\} = \frac{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial k} \right\}^T \{\Delta k\}}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T} \quad (3.33)$$

Combinando equações (3.31) e (3.33), obtém-se:

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{\Delta\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \right\} + A} \quad (3.34)$$

onde

$$A = -\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial k} \right\}^T \{\Delta k\} \quad (3.35)$$

O parâmetro A definido na equação (3.36) irá depender da condição de plasticidade do material: perfeitamente plástico, plástico com endurecimento ou amolecimento. Quando é perfeitamente plástico o vector $\{\Delta k\}$ é constante, o que implica $A = 0$.

No caso de endurecimento/amolecimento, $\{\Delta k\}$ está relacionado com as deformações plásticas acumuladas, $\{\varepsilon^p\}$. Por isso, a equação (3.35) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$A = -\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial k} \right\}^T \frac{\partial \{k\}}{\partial \{\varepsilon^p\}} \{\Delta\varepsilon^p\} \quad (3.36)$$

Por fim, substituindo (3.34) em (3.31) obtém-se:

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\varepsilon\} - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{\Delta\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \right\} + A} \quad (3.37)$$

Recordando a equação (3.27), é possível compará-la a (3.37). Assim estabelece-se que a matriz constitutiva elastoplástica pode ser expressa por:

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial \sigma} \right\} + A} \quad (3.38)$$

3.4.5. Critérios de Rotura

Segundo Roberts (1977), a condição de rotura é atingida quando a taxa de deformação começa a acelerar sob cargas constantes ou, se ambas as características associadas a deformações elásticas e plástica estão presentes, como por exemplo, a percentagem máxima admitida para uma deformação irreversível ocorre no material.

Em seguida são apresentados alguns dos critérios de rotura mais utilizados na Engenharia Geotécnica, bem como uma descrição dos modelos nos quais são aplicados.

i. Critério de Rotura de Tresca

O critério de rotura de Tresca é uma relação entre o diâmetro do círculo de Mohr e a resistência não drenada:

$$F(\{\sigma\}, \{k\}) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2C_u = 0 \quad (3.39)$$

Um modelo que utiliza este critério foi criado inicialmente para representar o comportamento dos metais e trata-se de um modelo elástico perfeitamente plástico, ou seja, sem endurecimento e/ou amolecimento, caso em que o critério de rotura coincide com a superfície de cedência. Este modelo é bastante utilizado para modelar o comportamento não drenado do solo, uma vez que a resistência não drenada de corte, C_u , relaciona-se com o critério de rotura de Tresca (Figura 3.10).

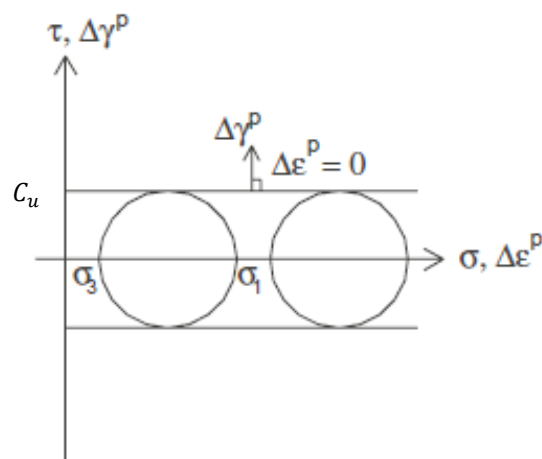


Figura 3.10 Círculo de Mohr – Resistência não drenada

No caso de um ensaio triaxial não drenado para uma argila saturada, expressando os resultados em termos de tensões totais, pode-se escrever:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2C_u \quad (3.40)$$

Para uma análise de elementos finitos é mais apropriado trabalhar em termos dos invariantes de tensão, p , J e θ , e desta forma (3.39) é reescrita da seguinte forma:

$$F(\{\sigma\}, \{k\}) = J \cos \theta - C_u = 0 \quad (3.41)$$

Em que $J = \frac{q^2}{3}$. Esta função num espaço de tensões principais corresponde a um cilindro hexágono regular (Figura 3.11).

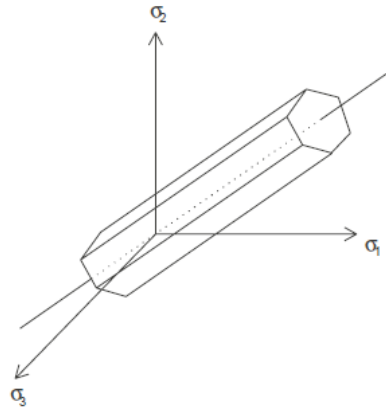


Figura 3.11 Critério de rotura de Tresca no espaço de tensões principais

Para utilizar este modelo para simular o comportamento não drenado de argilas saturadas (situação em que a variação volumétrica é nula) é conveniente assumir a lei de fluxo associado, $F(\{\sigma\}, \{k\}) = G(\{\sigma\}, \{m\})$. Para demonstrar que a condição de variação volumétrica de deformações plásticas é nula deriva-se a função potencial plástica em ordem a p :

$$\Delta \varepsilon_v^p = \lambda \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{m\})}{\partial p} = \lambda \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{k\})}{\partial p} = 0 \quad (3.42)$$

Para completar este modelo, é necessário definir os parâmetros elásticos, E_u ou K_u e μ_u , sendo este último $\mu_u = 0.5$ (não existe variação elástica de volume). Para além disto, há que definir também o valor para a resistência não drenada, C_u .

ii. Critério de Rotura de Von Mises

O critério de rotura de Von Mises pode ser escrito da seguinte forma:

$$F(\{\sigma\}, \{k\}) = J - \alpha = 0 \quad (3.43)$$

Onde α é um parâmetro relacionado com a resistência não drenada:

$$\alpha = \frac{C_u}{\cos \theta} \quad (3.44)$$

Este critério de rotura elimina as singularidades do critério de rotura de Tresca. Os cantos do hexágono da superfície de Tresca implicam singularidades que podem causar dificuldades na análise numérica.

Na Figura 3.12 a) é possível observar a representação no espaço de tensões principais do critério de rotura de Von Mises, o qual tem a forma de um cilindro. É de salientar que dependendo do parâmetro α , as superfícies de Tresca e Von Mises podem coincidir em pontos específicos, como é possível observar na Figura 3.12 b).

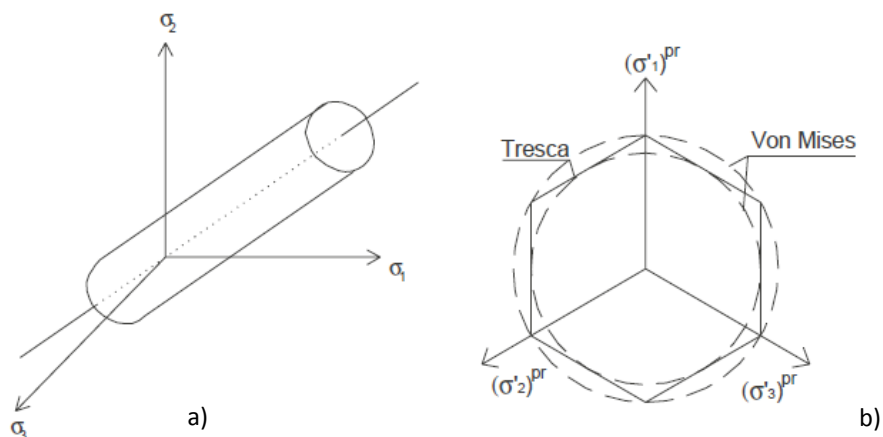


Figura 3.12 a) Critério de rotura de Von Mises no espaço de tensões principais e b) no plano deviatórico

iii. Critério de Rotura de Mohr-Coulomb

Coulomb propôs, através de ensaios de corte, que a tensão de corte é composta por duas componentes, uma friccional caracterizada pelo ângulo interno de atrito, φ , e outra coesiva ou de adesão caracterizada pela coesão, c (Figura 3.13). Assim, é possível obter uma linha recta que corresponde à equação (3.45) num referencial $(\tau - \sigma)$.

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (3.45)$$

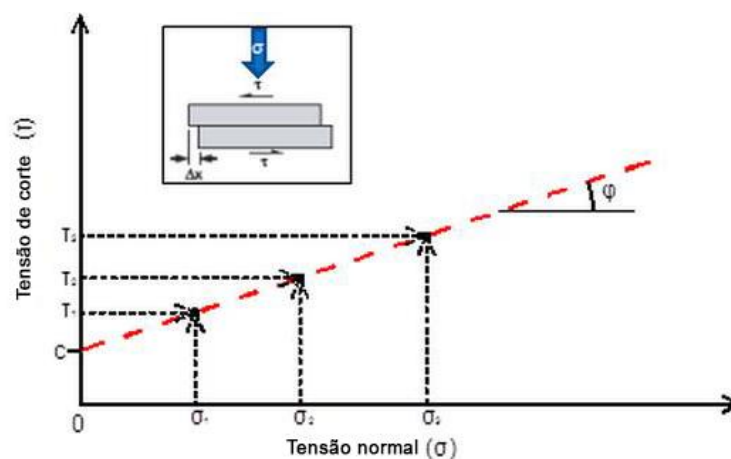


Figura 3.13 Relação entre tensões de corte e tensões normais (adaptado de Holtz & Kovacs, 1981)

Em 1900, Mohr propôs um critério de rotura para materiais que pode ser expresso através da tensão máxima de corte, τ . Desta forma:

$$\tau = f(\sigma) \quad (3.46)$$

Onde τ é a tensão de corte e σ é a tensão normal ao plano de corte. Ao combinar os círculos de Mohr e o envelope de rotura de Coulomb, foi possível criar o critério de rotura de Mohr-Coulomb como é conhecido actualmente.

O critério de rotura de Mohr-Coulomb, representado na Figura 3.14 a), é definido pela recta tangente ao círculo de Mohr. Este critério, bastante utilizado em Engenharia Geotécnica, é frequentemente aplicado na representação do comportamento de solos em termos de tensões efectivas. O critério de rotura de Mohr-Coulomb expresso em termos das tensões principais é dado pela equação seguinte:

$$F(\{\sigma'\}, \{k\}) = \sigma'_1 - \sigma'_3 - 2c' \cos \varphi' - (\sigma'_1 - \sigma'_3) \sin \varphi' \quad (3.47)$$

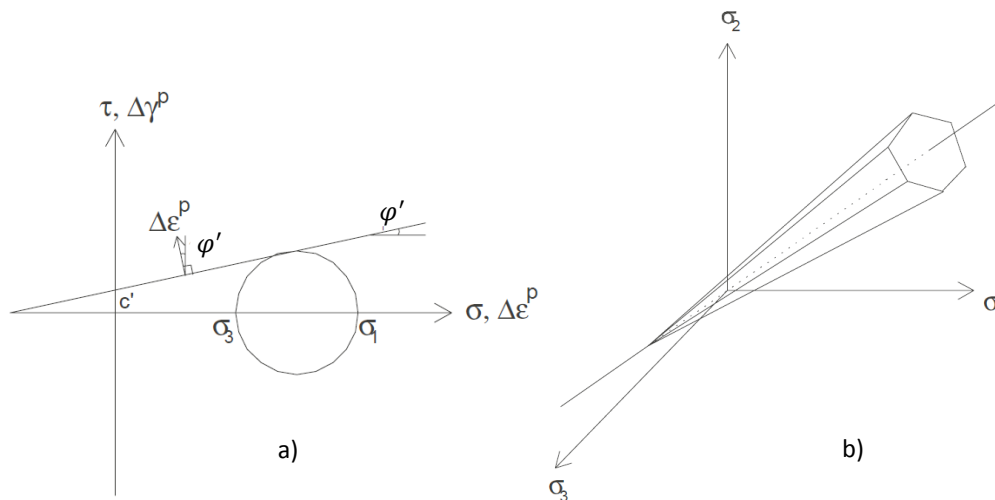


Figura 3.14 a) Envolvente de rotura de Mohr-Coulomb e b) e representação no espaço de tensões principais (adaptado de Cogliati, 2011)

Em termos de invariantes, é possível reescrever (3.47) da seguinte forma:

$$F(\{\sigma'\}, \{k\}) = J - \left(\frac{c'}{\tan \varphi'} + p' \right) g(\theta) = 0 \quad (3.48)$$

Onde,

$$g(\theta) = \frac{\sin \varphi'}{\cos \theta + \frac{\sin \theta \sin \varphi'}{\sqrt{3}}} \quad (3.49)$$

No espaço de tensões principais o critério de rotura de Mohr Coulomb é representado por um hexágono irregular, como indicado na Figura 3.14 b). Este critério de rotura é também independente da tensão principal intermediária, σ_2 .

O modelo vulgarmente denominado de modelo de Mohr-Coulomb é elástico linear perfeitamente plástico, em que a função dada pela Equação (3.47) é utilizada como função de cedência, podem assumir ou não lei de fluxo associada. No caso de ser adoptada lei de fluxo associada, de acordo com a Figura 3.14 a), observa-se que o

vector dos incrementos das deformações plásticas, $\Delta\varepsilon^p$, está inclinado num certo ângulo φ' com a vertical, indicando deformações plásticas negativas, o que resulta em deformações volumétricas plásticas dilatantes. Assim, este ângulo define-se como ângulo de dilatação, ψ , e é determinado em função da direcção normal à superfície de cedência. Este ângulo pode geometricamente coincidir com o ângulo de resistência ao corte, φ' , quando se assume lei de fluxo associada:

$$\psi = \sin^{-1} \left(-\frac{(\Delta\varepsilon_1^p + \Delta\varepsilon_3^p)}{(\Delta\varepsilon_1^p - \Delta\varepsilon_3^p)} \right) \quad (3.50)$$

No entanto, em termos reais as deformações plásticas volumétricas (i.e. dilatação) são em geral bastante inferiores às previstas pelo modelo. O solo inicialmente pode dilatar ao atingir a superfície de cedência mas usualmente, com grandes deformações, alcança uma condição de volume constante, ou seja, variação da deformação volumétrica é nula. Desta forma como tentativa de resolução deste problema, pode-se adoptar uma lei de fluxo não associada, cuja superfície potencial plástica é dada por:

$$G(\{\sigma'\}, \{m\}) = J - (a_{pp} + p')g_{pp}(\theta) \quad (3.51)$$

onde,

$$g_{pp}(\theta) = \frac{\sin \psi}{\cos \theta + \frac{\sin \theta \cos \psi}{\sqrt{3}}} \quad (3.52)$$

E a_{pp} é a distância do vértice da superfície cónica obtida e a origem do espaço das tensões principais. A função de potencial plástico evidenciada em (3.51) pode também ser reescrita no formato da função de cedência em (3.47), substituindo o ângulo de atrito, φ' , pelo ângulo de dilatação, ψ .

Há que notar que este modelo possui singularidades (cantos do hexágono e vértice), onde os gradientes das funções de cedência e de potencial plástico não conseguem ser definidos. Isto é especialmente importante na implementação deste modelo em programas que utilizam o método dos elementos finitos. Como forma de contornar este problema, é sugerido por vários autores (Abbo & Sloan, 1995; Griffiths & Willson, 1986) suavizar as singularidades, arredondando os cantos no critério de rotura; outros (Abaqus, 2010; Menétrey & Willam, 1995) sugerem arredondar antes os cantos da superfície de potencial plástico (que tem como consequência uma lei de fluxo não associada obrigatória, uma vez que a superfície de rotura e o potencial plástico possuem fundamentalmente formas diferentes). No contexto do *software* PLAXIS, este utiliza uma transição abrupta de uma superfície de cedência para outra (van Langen & Vermeer, 1990).

Para finalizar o modelo de Mohr-Coulomb é necessário definir φ' e c' e ainda os parâmetros que caracterizam a componente elástica do modelo.

iv. Critério de Rotura de Drucker-Prager

Este critério foi desenvolvido com a finalidade de eliminar as singularidades existentes na superfície de cedência do critério de rotura de Mohr Coulomb. Desta forma, o critério de rotura toma a forma de um cone

cilíndrico, como é evidente na Figura 3.15 a), tornando-se dependente da tensão principal intermédia, sendo definida em função dos invariantes da seguinte maneira:

$$F(\{\sigma'\}, \{k\}) = J - \left(\frac{c'}{\tan \varphi'} + p' \right) M_{JP} \quad (3.53)$$

onde,

$$M_{JP} = g(\theta) = \frac{\sin \varphi'}{\cos \theta + \frac{\sin \theta \sin \varphi'}{\sqrt{3}}} \quad (3.54)$$

Os critérios de rotura de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager podem coincidir em pontos específicos, Figura 3.15 b), para um certo valor do ângulo de Lode, θ .

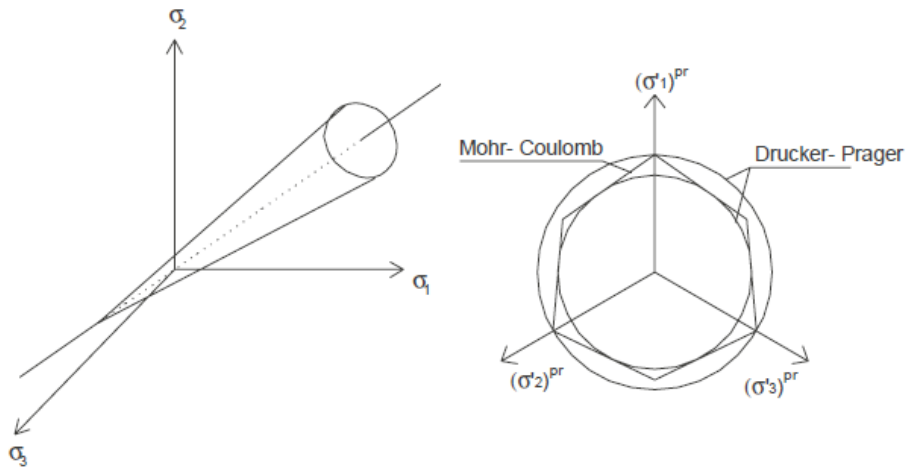


Figura 3.15 a) Critério de rotura de Drucker-Prager no espaço de tensões principais e b) representação no plano deviatórico (Cogliati, 2011)

4. Implementação dos Modelos Constitutivos no PLAXIS

4.1. Introdução

A versão 8.2 do *software* PLAXIS permite que o utilizador implemente modelos constitutivos (*user-defined soil models*), através da criação de subrotinas num determinado formato em linguagem Fortran. O PLAXIS fornece também no seu manual uma lista de subrotinas para operações matriciais e algébricas escritas nessa linguagem (Brinkgreve et al., 2002). As subrotinas existentes na biblioteca do programa são posteriormente compiladas num ou vários ficheiros no formato *.dll* (*Dynamic Link Library*) e copiadas para o directório do programa. O compilador escolhido para esta tarefa foi o Lahey-Fortran Professional versão 7.7, uma vez que apresentava a melhor compatibilidade com a versão 8.2 do PLAXIS (lançada em 2002). Testou-se que a maior parte dos compiladores *opensource* recentes falham em compilar o código em Fortran disponibilizado aquando da instalação do PLAXIS (biblioteca de funções). Posto isto, os ficheiros *.dll* podem ser utilizados como qualquer outro modelo pertencente ao programa, bastando copiá-los para a directoria do software, sendo possível aceder ao modelo na interface e inserir os parâmetros deste.

Estes modelos permitem simular o comportamento do solo num só ponto do material, ou seja, simulam o incremento de tensões resultante da aplicação de um incremento de deformação. O comportamento global é governado pelo método dos elementos finitos inerente ao PLAXIS. Por outras palavras, o utilizador providencia a informação sobre como o programa deve determinar as tensões efectivas num dado momento, juntamente com possíveis variáveis de estado, e o PLAXIS providencia ao utilizador os valores anteriores de tensões efectivas e variáveis de estado e/ou tempo, bem como os incrementos de deformações e tempo quando aplicável.

4.2. Estrutura Geral dos Modelos definidos pelo Utilizador

Dentro do programa de cálculo do PLAXIS (*calc*) podem ser realizadas quatro tarefas (Brinkgreve et al., 2002):

- Inicialização das variáveis de estado;
- Cálculo das tensões constitutivas;
- Criação da matriz de rigidez efectiva do material;
- Criação da matriz de rigidez elástica.

Para as definir é necessário que o utilizador o faça na subrotina *Usrmod*. Na subrotina *Usrmod* também é possível listar mais do que um modelo definido pelo utilizador (*user defined*) e assim quando o utilizador na *interface* do programa utiliza um desses modelos, o programa de cálculo lê esta subrotina e utiliza o comando *Call* para invocar a subrotina correspondente a esse modelo de solo. A subrotina *Usrmod* funciona como um *hub* (Figura 4.1) onde se agregam os modelos constitutivos criados pelo utilizador, bem como subrotinas de apoio ao cálculo de valores intermédios ou criação de mensagens de erro.

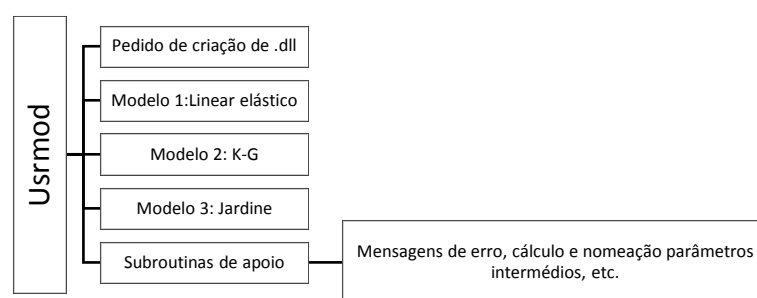


Figura 4.1 Organização generalizada da subrotina *Usrmod*

Dentro de cada subrotina dos modelos de solos, para além de ser necessário um cabeçalho (*header*) fixo, existem comutadores que permitem ao programa de cálculo distinguir entre situações diferentes, como por exemplo condições drenadas ou não drenadas, dependência da matriz de rigidez com o estado de tensões ou tempo, simetria da matriz de rigidez, plasticidade, etc. Estes comutadores geralmente são variáveis booleanas (falso/verdadeiro) ou variam dentro de determinados valores. Apresenta-se de seguida uma lista dos comutadores e variáveis que contribuem para a subrotina:

- *IsUndr*: Parâmetro de entrada que permite escolher entre condições drenadas (*IsUndr* = 1) e não drenadas (*IsUndr* = 0);
- *Props*: vector com a lista dos parâmetros inseridos pelo utilizador na interface do *software*;
- *Sig0*, *Sig*: vectores com os valores anteriores das tensões como dados de entrada e as tensões efectivas actuais como dados de saída num dado ponto ($\sigma'_{x}, \sigma'_{y}, \sigma'_{z}, \sigma'_{xy}, \sigma'_{yz}, \sigma'_{zx}$);
- *Swp0*, *Swp*: Excesso de pressão neutra inicial dado como vector de dados de entrada referente ao *step* anterior, e excesso de pressão neutra dado como vector de dados de saída para o *step* actual;
- *dEps*: Incremento de deformações para o *step* actual;
- *StVar0*, *StVar*: vectores que contêm as variáveis de estado no *step* anterior e no *step* actual;

- *iPl*: Indicador de plasticidade:
 - *iPl* = 0 comportamento elástico
 - *iPl* = 1 comportamento elastoplástico, mobilizado o critério de rotura de Mohr-Coulomb
 - *iPl* = 2 comportamento elastoplástico, *cut-off* para a resistência à tracção
- *iStrsDep*, *iTang*: o primeiro refere-se ao facto da matriz de rigidez ser dependente do estado de tensão (*iStrsDep*= 1) ou não (*iStrsDep*= 0), e o segundo é um parâmetro alude à matriz de rigidez ser tangente e ser utilizada no método de Newton-Raphson (*iTang*= 1) ou não (*iTang*= 0).

Para além dos *comutadores* apresentados acima, existe ainda o *comutador IDTask* que permite organizar as operações dentro das subrotinas dos modelos definidos pelo utilizador. Este varia de 1 a 6, e a cada corresponde uma tarefa que o processo de cálculo global necessita. Em seguida descrevem-se as tarefas de cada *IDTask*:

- *IDTask 1*: Inicializa os parâmetros e variáveis de estado do modelo;
- *IDTask 2*: Cálculo do estado de tensão constitutivo;
- *IDTask 3*: Criação da matriz de rigidez efectiva;
- *IDTask 4*: Definição do número de variáveis de estado;
- *IDTask 5*: Definição das características da matriz de rigidez;
- *IDTask 6*: Criação da matriz de rigidez elástica.

Em *IDTask 1* as variáveis de estado, se existentes, são inicializadas, bem como os parâmetros de entrada necessários ao funcionamento da subrotina, que são armazenados no *vector Props*. Foi incluído no código uma verificação desses parâmetros de forma a se averiguar a sua validade. Por exemplo, se um valor inserido para um parâmetro for nulo, e o valor tem que ser positivo, o utilizador recebe uma mensagem de aviso na interface para alterar esse valor para positivo. Além disso, caso as variáveis de estado não existam é considerado boa prática definir os vectores correspondentes a estes iguais a zeros de forma a evitar problemas mais tarde no processo de cálculo.

Dentro de uma fase de cálculo contínua, as variáveis de estado são automaticamente transferidas de um *step* para o próximo. Por exemplo, o valor resultante de uma variável de estado no *step* anterior, *StVar*, é armazenada num ficheiro de saída e automaticamente utilizada como o valor inicial no *step* actual, *StVar0*. Assim, quando se inicia uma nova fase de cálculo, o valor inicial da variável de estado é lido do ficheiro de saída, onde foi armazenado previamente, e inserido no *vector StVar0*.

Nos modelos linear elástico e K-G (Figura 4.1) não são utilizadas variáveis de estado, no entanto no modelo de Jardine (não linear com e sem componente plástica de Mohr-Coulomb), são utilizadas para armazenar os valores da deformação volumétrica e deformação distorcional total (valor acumulado). Este aspecto será abordado em mais detalhe na parte correspondente ao modelo.

Na *IDTask 2* são determinados os incrementos de tensão e o estado de tensão final (tensões constitutivas) associados a um incremento de deformação obedecendo ao modelo constitutivo.

Em condições não drenadas ($IsUndr = 1$), o acréscimo de pressão intersticial é calculado através da deformação volumétrica e o módulo volumétrico da água, K_w :

$$\Delta u = K_w \Delta \varepsilon_{vol} \quad (4.1)$$

O software automaticamente adiciona o módulo volumétrico da água à matriz de rigidez efectiva de forma a calcular a matriz de rigidez total, tal que:

$$[D]_{total} = [D]_{efectiva} + K_w \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Em que o módulo de compressibilidade volumétrico da água (K_w), deverá ser especificado ou, caso não o seja, o PLAXIS calcula como sendo:

$$K_w = 100 * \frac{D_{11} + D_{22} + D_{33}}{3} \quad (4.3)$$

Em que D_{11} , D_{22} e D_{33} são os valores da matriz efectiva $[D]_{efectiva}$. Este valor de K_w conduz a um valor de coeficiente de Poisson de cerca de 0,495.

Em *IDTask 3* é definida a matriz de rigidez efectiva elástica, que contém as componentes elásticas da relação tensão-deformação ou a matriz de rigidez elastoplástica (matriz de rigidez tangente). A matriz calculada em *IDTask 3* é utilizada quando se pretende determinar o incremento de deformações associado a um incremento do vector das forças nodais durante o processo de Newton-Raphson.

Optou-se por se gerar uma matriz de rigidez linear elástica, o que significa que quando as tensões constitutivas são calculadas em *IDTask 2* é também necessário definir as tensões em *IDTask 3*. O método modificado de Newton-Raphson é utilizado por padrão; o programa de cálculo verifica o equilíbrio entre as tensões equivalentes nodais e as cargas externas aplicadas. Segundo Brinkgreve et al., (2002), caso se utilize a matriz de rigidez linear elástica em *IDTask 3*, então é possível adoptá-la em *IDTask 6*.

Nesta secção do código não é possível invocar as variáveis de estado no *step* anterior, *StVar0*, por isso tornou-se imperativo que a integração da relação constitutiva no incremento de deformação prescrito fosse realizada na *IDTask 2*.

Em *IDTask 4*, o utilizador providencia o número de variáveis de estado do modelo constitutivo para que o programa identifique a dimensão do vector onde estas serão armazenadas. Em *IDTask 5*, o utilizador controla as características da matriz de rigidez definida em *IDTask 3* através dos comutadores *NonSym*, *iStrsDep*, *iTimeDep* e *iTang*. Alguns destes já foram descritos anteriormente. Sucintamente, controla-se a simetria, a dependência das tensões e do tempo, bem como o facto de ser tangente. Caso *iTang* seja verdadeiro, ou seja igual a 1, a matriz de rigidez global é criada e decomposta no início de cada iteração baseando-se no estado

actual de tensão. Quando $iTang=1$, $iStrsDep$ deverá ser também 1 de forma a forçar o método de Newton-Raphson. Se $iTang=0$, o PLAXIS utiliza o método modificado de Newton-Raphson independentemente do valor de $iStrsDep$.

Por fim, em *IDtask 6*, a matriz de rigidez criada é a parte elástica da matriz de rigidez efectiva criada em *IDtask 3*. Caso a matriz de rigidez elástica efectiva seja adoptada em *IDtask 3*, então é possível adoptar essa matriz em *IDtask 6*. Caso se utilize em #3 uma matriz elastoplástica ou tangente, então a matriz a criar em #6 deverá conter apenas as componentes elásticas desta.

A matriz de rigidez elástica é pedida de forma a calcular o total de trabalho elástico. Este é utilizado pelo PLAXIS no cálculo da rigidez global relativa do modelo de elementos finitos denominado de CSP (*Current Stiffness Parameter*). Este parâmetro é a razão entre o trabalho elástico e o trabalho total. Quando o material é elástico, CSP é unitário e quando o material se aproxima da ruptura, tende para zero. Este parâmetro é posteriormente utilizado no cálculo do erro global.

Numa fase de cálculo, cada *IDTask* pode ser chamado várias vezes dentro de cada iteração e de uma forma não ordenada, por exemplo: se *IDTask 1* é executado não é obrigatório que *IDTask 2* seja a próxima tarefa a ser 'chamada'.

Os ficheiros que contêm as subrotinas de apoio deverão ser incluídos na subrotina principal *Usrmod* de forma a diminuir a extensão de código das subrotinas dos modelos constitutivos.

4.3. Modelo Elástico Linear

De forma a entender-se a estrutura dos modelos definidos pelo utilizador e familiarizar-se com a escrita de código em Fortran, e seguindo algumas instruções no manual do *software*, foi criado primeiramente uma subrotina que traduz o modelo mais simples, o modelo elástico linear isotrópico. Isto permitiu entender com maior clareza quais as funções de cada tarefa bem como obter um maior conhecimento das ferramentas para *debug*, algo que se provou crucial posteriormente. De seguida, o código foi compilado e transformado em *.dll* e empregue na análise de um problema com condições de fronteira simples (Figura 4.2 a)), para o qual existe uma solução exacta. O problema escolhido foi a consolidação unidimensional de um elemento de solo em estado de deformação plana; para simplicidade de cálculo o peso próprio do material foi desprezado.

As dimensões do problema são de 1m x 1m. Uma vez que a versão do PLAXIS empregue pelo autor apenas possui elementos triangulares, foi utilizada uma malha com 270 elementos triangulares de 15 pontos nodais (Figura 4.2 b)).

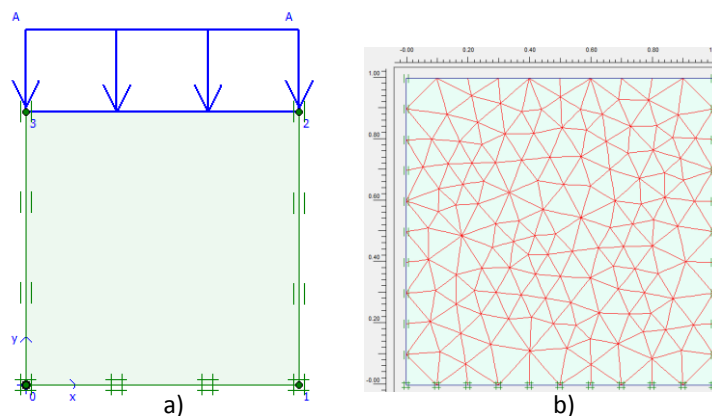


Figura 4.2 a) Representação do problema utilizado para a validação do modelo linear elástico b) Malha de elementos finitos utilizada

Como parâmetros de entrada considerou-se o Módulo de Elasticidade de Young (E) e o coeficiente de Poisson (μ) com o valor de 50000 kPa e 0,35 respectivamente. A carga vertical A a aplicar foi de 100 kPa.

Para a solução analítica utilizaram-se as seguintes fórmulas (Maranha das Neves, 2007):

$$\sigma_A = M \cdot \varepsilon_y \tag{4.4}$$

$$M = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \tag{4.5}$$

Onde, M é uma constante. Desta forma, para o valor de carga vertical indicado anteriormente obtém-se no PLAXIS um valor de deslocamentos verticais (ε_y) de 1.246×10^{-3} e um valor exacto através da equação (4.4) de 1.24615×10^{-3} , ou seja os valores de deslocamentos são idênticos. Assim, conclui-se que o código, que mais tarde vai ser a base para os outros modelos, se encontra validado.

5. Implementação e Validação do Modelo K-G

5.1. Formulação das Equações Constitutivas

Como já foi referido em 3.3.1, este modelo é não-linear elástico com módulos tangentes K e G dependentes do nível de tensão, de forma a incorporar um critério de rotura. Quando se pretende incorporar o critério de rotura de Mohr-Coulomb é conveniente exprimirmos os módulos K e G em função dos invariantes $\sigma_{médio}$ e σ_{dev} definidos pelas seguintes equações :

$$\sigma_{médio} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{dev} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5.2)$$

Tal que,

$$K_t = K_i + \alpha_K \cdot \sigma_{médio} \quad (5.3)$$

$$G_t = G_i + \alpha_G \cdot \sigma_{médio} + \beta_G \cdot \sigma_{dev} \quad (5.4)$$

Desta forma, K e G crescem com o aumento de $\sigma_{médio}$ e G diminui com σ_{dev} , tendendo para zero na rotura, e por conseguinte na rotura o coeficiente de Poisson tende para 0,5. No entanto o uso de um valor de coeficiente de Poisson igual a 0,5 (ou valores para os parâmetros K e G que correspondem a esse valor) dá origem a problemas numéricos, nomeadamente a uma matriz de rigidez com valores infinitos (porque alguns valores da matriz de rigidez tendem para infinito), sendo recomendado fixar um valor máximo para o coeficiente de Poisson de 0,495. Verificou-se que em análises numéricas com valores de coeficiente de Poisson perto de 0,49999 não é possível inverter a matriz de rigidez devido a instabilidade numérica (por ex, o elemento pivot da matriz é negativo durante o processo de inversão), (D. Potts & Zdravkovic, 1999).

Os parâmetros G_i , α_G e β_G devem ser escolhidos ou calculados de forma a que o critério de rotura seja satisfeito, ou seja quando as tensões actuantes obedecem ao critério de rotura e G é zero:

$$G_i + \alpha_G \cdot \sigma_{méd} + \beta_G \cdot \sigma_{dev} = 0 \quad (5.5)$$

Da equação acima é possível obter as relações:

$$\frac{\alpha_G}{-\beta_G} = 2 \sin \varphi' \quad (5.6)$$

$$\frac{G_i}{-\beta_G} = 2 \cdot c' \cdot \cos \varphi' \quad (5.7)$$

Assim, como alternativa, em vez de o utilizador determinar manualmente 5 parâmetros de entrada (alguns dos quais aparentam não possuir um significado físico imediato), é possível para valores conhecidos de φ' e de c' obter os valores de α_G e β_G com as relações (5.6) e (5.7), sendo G_i um valor fixo pelo utilizador. Assim é dispensável obter alguns dos parâmetros através de ensaios triaxiais (K_i , α_K , G_i , α_G e β_G), contudo o modelo continua a necessitar 5 parâmetros de entrada.

5.2. Implementação do Modelo K-G no *software* PLAXIS

De seguida é discutida a implementação do modelo K-G no *software* PLAXIS, bem como a implementação dos algoritmos de integração do estado de tensão para um incremento de deformação imposto.

5.2.1. Estrutura da Subrotina do Modelo K-G

Conforme referido acima, na *IDTask 1* são iniciados os parâmetros de entrada e escritos no *vector Props*, bem como de valores intermédios que serão utilizados noutras secções do código. No caso do modelo K-G não existem variáveis de estado. No Quadro 5.1 são apresentados os parâmetros pedidos normalmente ao utilizador na interface do PLAXIS.

Quadro 5.1 Parâmetros de entrada do modelo K-G

Props	1	2	3	4	5
Parâmetro	K_i	G_i	α_k	φ	c'
Unidades	kPa	kPa	-	°	kPa

Na *IDTask 1* são também validados os parâmetros introduzidos na interface do PLAXIS. Por exemplo, se o utilizador inserir um valor de β_G maior que zero, a subrotina pára a simulação e invoca uma outra subrotina chamada *OK_MessageBox* que permite enviar uma pequena mensagem ao utilizador identificando o erro. Além disso utilizando as relações (5.6) e (5.7) é possível também calcular e guardar os valores de α_G e β_G , que serão utilizadas em *IDTask 2*.

Em *IDTask 2*, onde é determinado o estado de tensão após a aplicação de um incremento de deformação obedecendo ao modelo constitutivo, são calculadas a tensões principais ($Prs(i)$) no estado inicial e as respectivas direcções através da subrotina *PrnSig* providenciada na biblioteca de funções em *Fortran* aquando a instalação do PLAXIS. Depois, são calculados os invariantes de tensões utilizando as expressões em (5.1) e (5.2). No código os invariantes são identificados por *sigmed* e *sigdev*. Com estes parâmetros obtidos é assim possível determinar Kt e Gt tangenciais. Quando Gt é igual a um valor perto de zero conclui-se que o solo entra em rotura (critério de Mohr-Coulomb incorporado nas equações) e é fixado o valor de Gt em 1 para não existirem instabilidades numéricas.

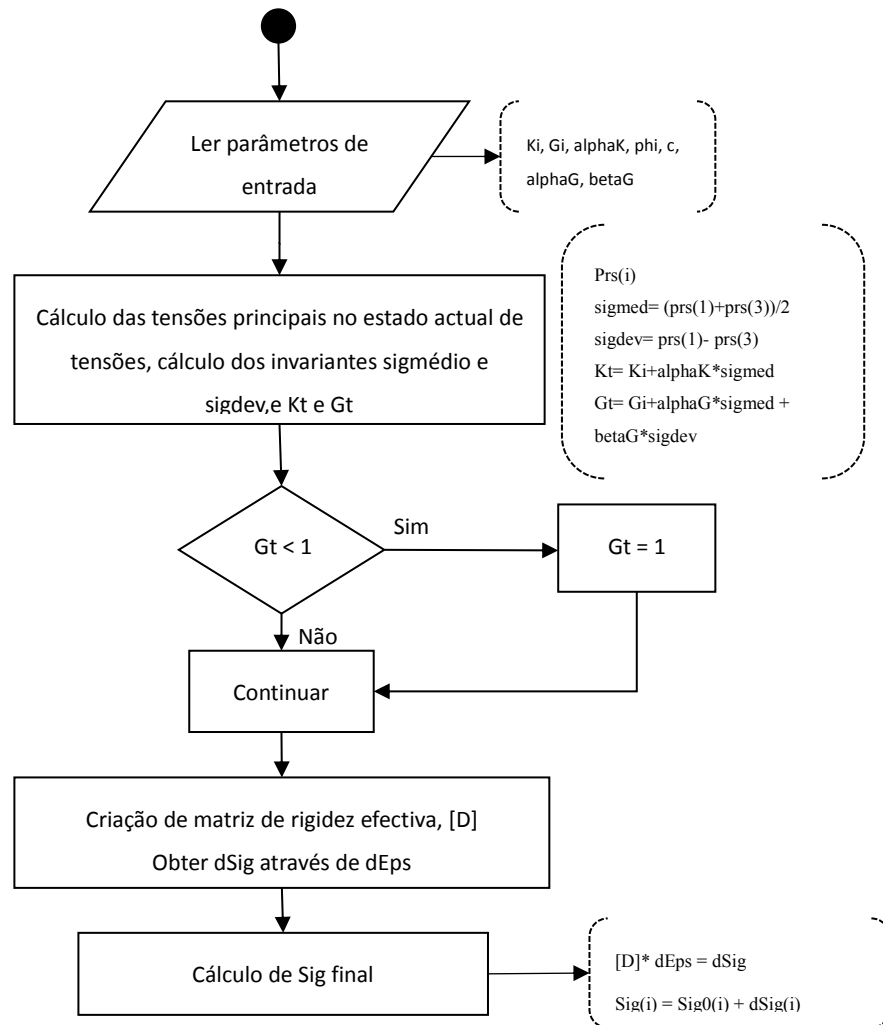


Figura 5.1 Fluxograma de IDTask 2 do modelo K-G

Caso esse valor seja superior a um, o programa de cálculo continua e procede à criação da matriz de rigidez efectiva, $[D]$. Todos os vectores e matrizes são iniciados primeiramente com valores de zero e posteriormente preenchidos com os valores pretendidos, como é sugerido no manual do *software*. Posto isto, é possível obter o vector $dSig$, que corresponde ao incremento de tensão elástico e adicioná-lo ao vector de tensões Sig . Este processo pode ser visualizado de forma resumida na Figura 5.1. Quando existe comportamento não drenado ($IsUndr = 1$), o incremento de pressões neutras ($dSwp$) é calculado através da expressão (4.1), e adaptando para a nomenclatura utilizada na subrotina fica:

$$dSwp = BulkW * dEpsV \quad (5.8)$$

Onde $BulkW$ representa o módulo volumétrico da água e $dEpsV$ é o incremento de deformação volumétrica imposto calculado pela soma das componentes normais, $dEps(i)$. Assim de forma a obter o valor resultante de excesso de pressão neutra Swp , $dSwp$ é somado a $Swp0$ (excesso de pressão neutra no início do *step*), conforme descrito de seguida:

$$Swp = Swp0 + dSwp \quad (5.9)$$

Em *IDTask 3* e *6*, onde a matriz criada é a mesma, optou-se por se utilizar o valor de K_i inserido previamente e multiplicá-lo por 10 (originando um novo K), e um valor de coeficiente de Poisson de 0,35 (xNu) para o cálculo de G . Desta forma obtém-se seguramente uma matriz de rigidez mais rígida do que a calculada em *IDTask 2*. É também nesta secção de código que é calculado o valor de $BulkW$ caso exista comportamento não drenado, admitindo um coeficiente não drenado de Poisson de 0,495 ($xNuU$):

$$BulkW = \left(\frac{1 + xNuU}{1 - 2 * xNuU} - \frac{1 + xNu}{1 - 2 * xNu} \right) \times \frac{2}{3} \times G \quad (5.10)$$

Restam assim, *IDTask 4* e *IDTask 5*. Na primeira existe apenas uma linha de código que identifica o número de variáveis de estado (não existem para o modelo em causa), e a segunda possui todos os *comutadores* referentes à matriz de rigidez iguais a zero, ou seja, não se considera matriz assimétrica, não existe dependência de tensões nem de tempo, e não é elastoplástica. Desta forma, o programa PLAXIS utiliza o Método Modificado de Newton-Raphson.

5.2.2. Implementação de Algoritmos (em *IDTASK 2*)

Verificou-se inicialmente dificuldade da parte do programa de cálculo em seguir o comportamento constitutivo especificado do modelo elástico não-linear K-G, devido ao facto do programa efectuar demasiados *steps* nos valores iniciais de tensão/deformação onde a variação é mínima (quase que se pode admitir que é linear) e *step* de tamanho elevado (e por isso menos pontos) em zonas onde ocorre uma mudança rápida de rigidez. Assim considerou-se necessário melhorar a integração do modelo constitutivo durante um incremento de deformação efectuando no *IDTask 2* aplicando alguns algoritmos de integração de forma a melhorar a solução final. A teoria inerente a estes métodos numéricos foi abordada de forma mais detalhada na secção 2.3. Desta forma será discutido a sua implementação no código da subrotina do modelo de solo (mais precisamente em *IDTask 2*).

i. **Substepping com Método de Euler**

O algoritmo desenvolvido é semelhante ao apresentado na Figura 5.1. Este algoritmo de integração considera um contador (n) no início de *IDTask 2* assim como um novo parâmetro de entrada, $ncycle$ que determina o número subdivisões em que o incremento de deformação vai ser dividido na subrotina. O incremento de tensões $dEps(i)$ é dividido por nf (nf corresponde ao valor de $ncycle$ dentro da subrotina), originando uma nova variável, $dEpsn(i)$.

Atribui-se também no início $SigOn(i)$ a $SigO(i)$, criando-se uma nova variável. É possível analisar graficamente a influência da divisão do incremento de deformações na Figura 5.2, sendo esta meramente ilustrativa. Em teoria, este método permite obter mais pontos em zonas de rápida mudança de rigidez.

Assim, criou-se uma condição para a subrotina executar enquanto n menor que nf ou igual a nf . Por exemplo, se nf for igual a 2 então $dEpsn(i)$ é dividido em dois subincrementos $dEpsn(i)$, e a secção referente à condição é executada duas vezes uma vez que no final desta é adicionado 1 ao valor de n . É possível observar com mais detalhe este ciclo na Figura 5.3. No final de cada ciclo são obtidos os valores do incremento de tensões ($dSig(i)$) a partir de $dEpsn(i)$, e calcula-se o valor de tensões, $Sig(i)$ final a partir do incremento $dSig(i)$ e $Sig0n(i)$. Este valor final deve ser actualizado no fim de cada ciclo ou seja, igual a $Sig0n(i)$.

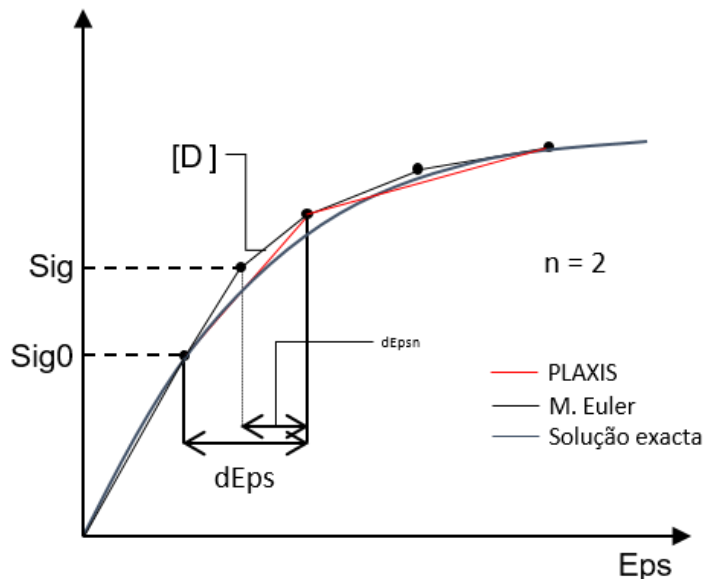


Figura 5.2 Esquema do Método de Euler no contexto do *software*

Quando o contador n é maior que nf , já não existe subincrementação para o incremento $dEps(i)$ e *IDTask 2* termina. A subrotina é invocada de novo quando o programa PLAXIS devolve outro incremento de deformações para o *step* actual ($dEps(i)$). Adicionalmente, foram criadas novas variáveis $Sig0n(i)$ e $dEpsn(i)$ pois julgou-se uma forma fácil de identificar as variáveis adicionadas referentes ao método de Euler sem modificar as variáveis já existentes do PLAXIS.

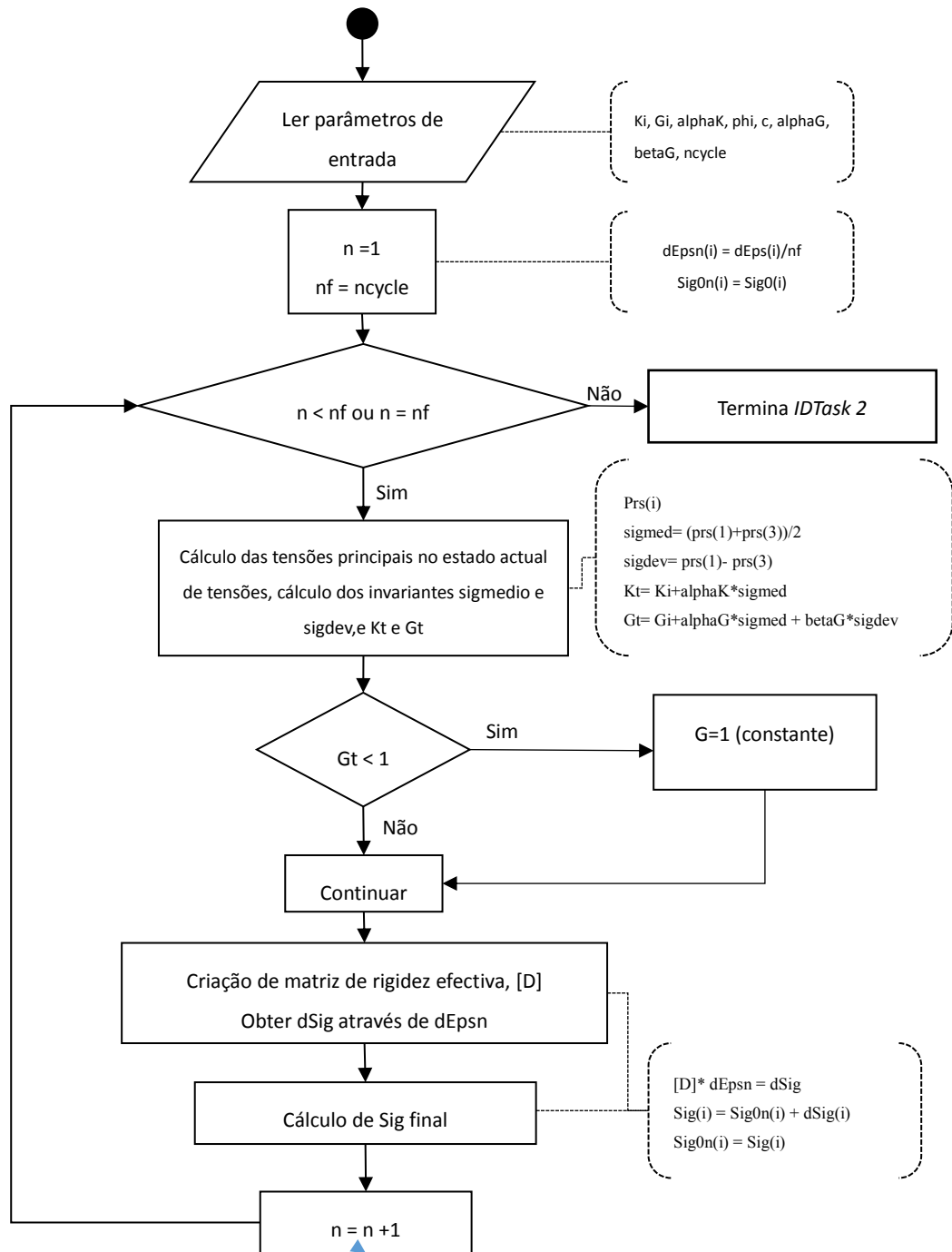


Figura 5.3 Fluxograma de *IDTask 2* do modelo K-G com Método de Euler

ii. *Substepping* com Método Modificado de Euler

O algoritmo desenvolvido é semelhante ao do Método de Euler, com a diferença de que é calculada a matriz de rigidez para um “ponto médio” no intervalo $dEpsn$ (que por si só é um subincremento de $dEps$). Esta premissa é facilmente observável na Figura 5.4, onde é pormenorizado o algoritmo quando se assume $n=2$. Primeiramente obtêm-se as tensões principais para o ponto $Sig0(i)$ ($=Sig0n(i)$) e calcula-se a matriz de rigidez $[Dn]$, sendo obtido com esta matriz uma estimativa do estado de tensão no ponto médio, ou seja, é calculado o incremento

de tensões correspondente, $dSigmid$. Este incremento é somado ao vector $Sig0(i)$ de forma a obter-se $Sigmid(i)$. Assim o processo de obtenção de tensões principais é repetido mas para $Sigmid(i)$, e calcula-se finalmente a matriz de rigidez para o “ponto médio”, $[Dmid]$. As fórmulas necessárias ao cálculo destas variáveis estão explícitas no fluxograma na Figura 5.5.

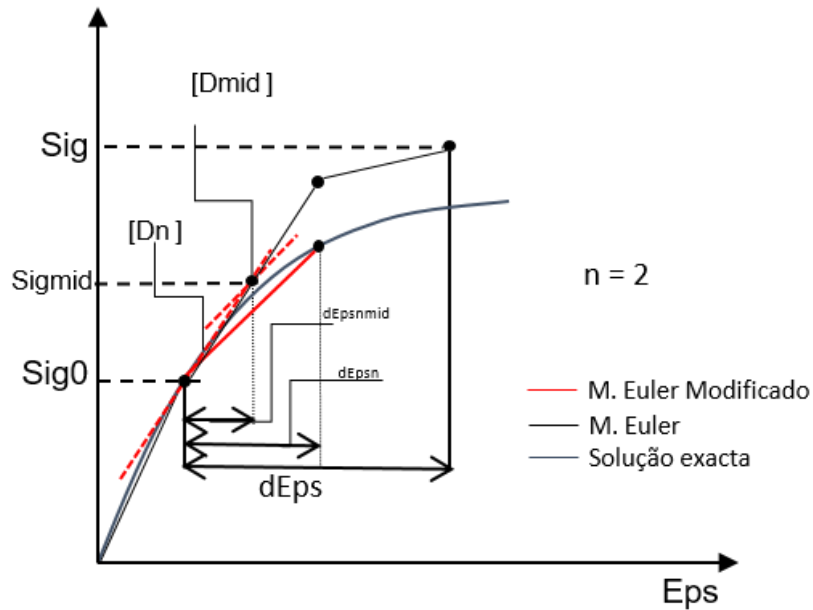


Figura 5.4 Esquema do Método Modificado de Euler no contexto do *software*

A matriz de rigidez $[Dmid]$ é aplicada ao intervalo $dEps_n$, obtendo-se assim os incrementos de tensão $dSig$. Desta forma, estes incrementos são adicionados ao vector $Sig0n(i)$ e obtém-se $Sig(i)$. Resta só actualizar $Sig(i)$ (para $Sig0n(i)$) para entrar no início de um novo ciclo já modificado. O resto da subrotina permanece igual às restantes.

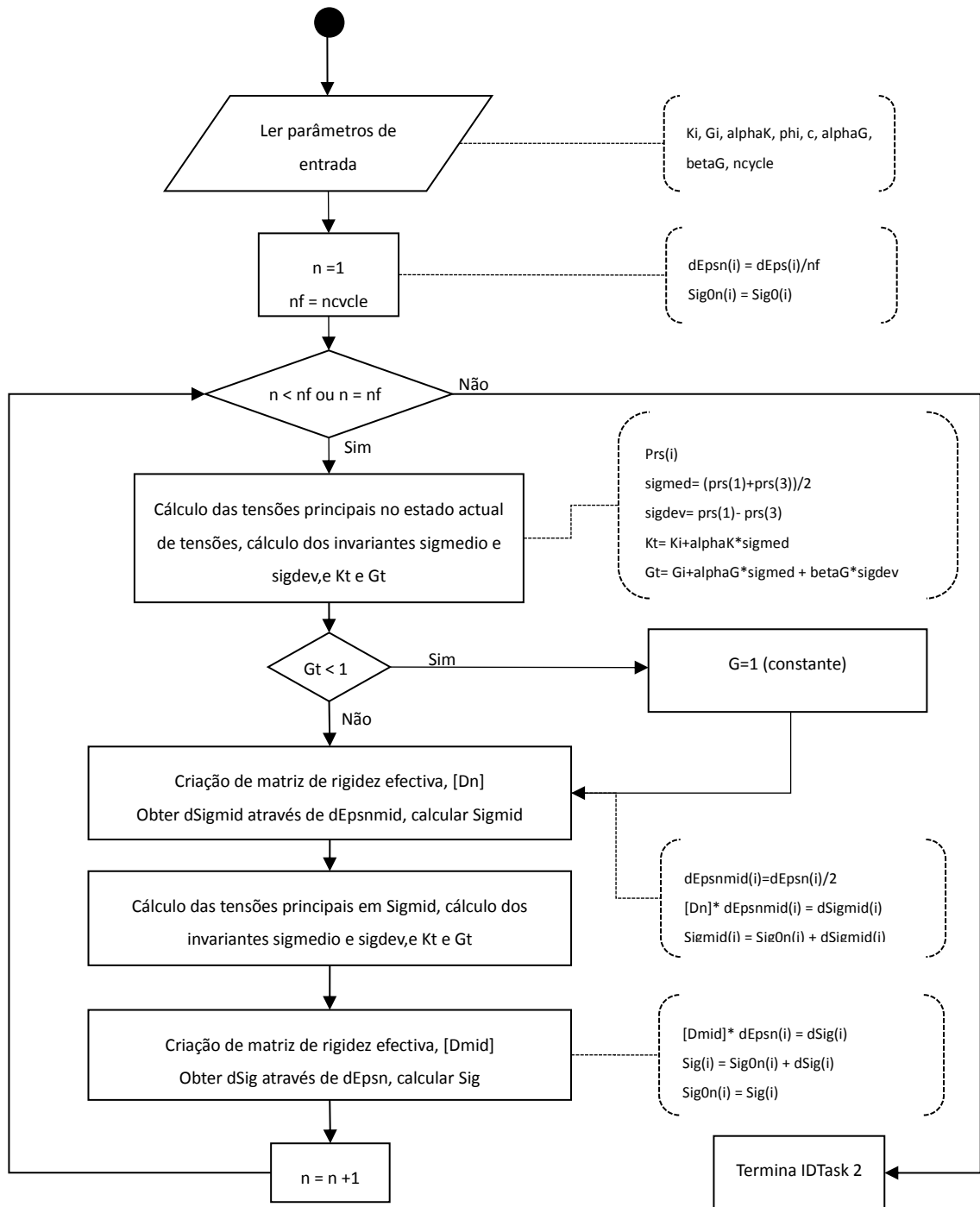


Figura 5.5 Fluxograma de IDTask 2 do modelo K-G com Método Modificado de Euler

5.2.3. Modelação de Ensaios de Corte em Compressão Triaxial

O trabalho aqui apresentado foi realizado com o programa de elementos finitos comercial PLAXIS versão 8.2. Esta versão não possui o módulo (presente em versões mais recentes) que permite a simulação directa do comportamento de um elemento de solo sujeito a trajectória de tensões correspondentes a ensaios de laboratório convencionais. Em seguida, é descrito brevemente como são modelados os ensaios triaxiais

drenados e não drenados no PLAXIS. As simulações destes ensaios são utilizadas na validação dos modelos constitutivos implementados no PLAXIS no âmbito desta dissertação.

- **Ensaio triaxiais drenados (CD)**

Na Figura 5.6 a) observa-se o esquema de um ensaio triaxial no PLAXIS. Este possui dimensões 1 m x 1 m (corresponde a $\frac{1}{4}$ do provete), sendo baseado num modelo axissimétrico. As dimensões não reflectem as dos provetes reais (a relação diâmetro-comprimento não é igual), no entanto estas não influenciam o resultado final, uma vez que se admite tratar de um ensaio ideal que após a deformação a amostra mantém forma cilíndrica. As dimensões da amostra podem influenciar o resultado se se tomar em consideração o peso volúmico do solo (neste modelo é zero). Este modelo foi escolhido porque se pretende a modelação de uma estrutura simétrica em relação ao eixo vertical com secção transversal circular (proвете cilíndrico). Assim, o estado de tensão e deformação são idênticos em qualquer direcção radial. Isto é evidenciado na Figura 5.6 b).

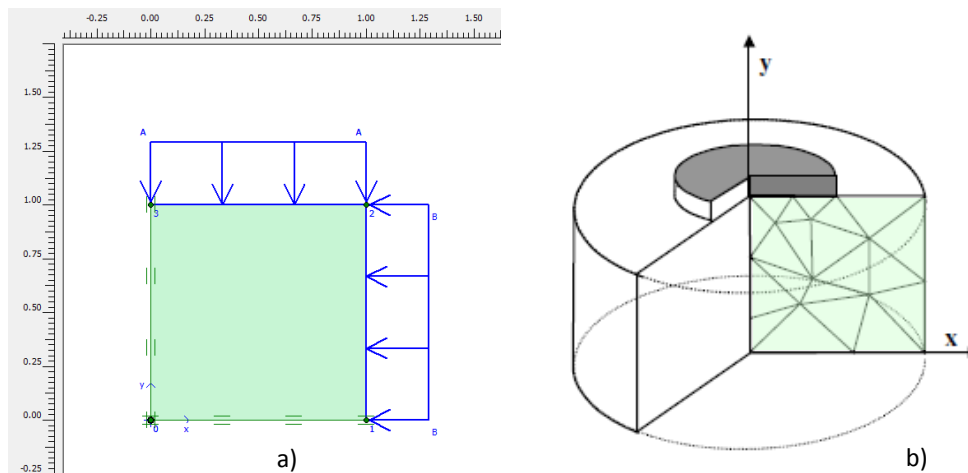


Figura 5.6 a) Esquema de um ensaio triaxial drenado no PLAXIS b) Exemplo de um problema axissimétrico (adaptado de Brinkgreve et al., 2002)

Assim, a fronteira do lado esquerdo (Figura 5.6 a)) coincide com eixo de simetria, onde os deslocamentos normais (horizontais) a esta são fixos e os deslocamentos tangenciais (verticais) são livres e a fronteira inferior (base) tem deslocamentos normais (verticais) impedidos. As restantes fronteiras são livres. O meio foi discretizado utilizando elementos triangulares de 15 nós para a malha. Esta não necessita de ser excessivamente refinada devido à geometria simples. Além disso, de forma a modelar as tensões principais, σ'_{axial} e σ'_{radial} , definiram-se respectivamente cargas uniformemente distribuídas, A e B, nas fronteiras do lado superior e direito.

O ensaio consiste em duas fases distintas. Na primeira fase (consolidação), a pressão de confinamento é aplicada activando a carga A e carga B, que deverão possuir valores iguais de forma a obter-se uma consolidação isotrópica. Utiliza-se o processo *Staged Construction*. Este permite ao utilizador introduzir um novo estado que deve ser alcançado no final da fase de cálculo, ou seja se se definir a carga A e B como 100 kPa (insere-se logo a carga final pretendida), o programa aplica estas cargas através de um multiplicador,

$\sum M_{Stage}$. Este multiplicador começa em zero e termina em 1 caso as cargas sejam aplicadas na totalidade. Quando se utiliza *Staged Construction*, o PLAXIS calcula o tamanho do *step* automaticamente (*Load Advancement Ultimate Level*). Segundo o manual o tamanho do *step* pode ser obtido de duas formas:

- O PLAXIS executa uma fase de cálculo com um *step* experimental e determina o tamanho adequado do *step* baseado nisso.
- O PLAXIS estabelece que o tamanho do *step* inicial deve ser igual ao tamanho do *step* final da fase de cálculo anterior.

Usualmente, o primeiro método é adoptado e o segundo somente é utilizado quando a carga aplicada durante o *step* actual é semelhante à aplicada no *step* anterior.

No início da fase de corte selecciona-se a opção de reiniciar os deslocamentos (*Reset Displacements to Zero*). Esta destina-se a evitar que os deslocamentos incrementais da fase anterior (consolidação) sejam adicionados a esta nova fase, de maneira a facilitar o tratamento dos resultados. O campo de tensões mantém-se inalterado, ou seja, as tensões no final da fase de consolidação são iguais às tensões no início da fase de corte. Desta forma, não se utiliza o mesmo processo de carregamento da fase anterior (*Staged Construction*) mas sim, *Incremental Multipliers*. Este processo é utilizado quando é necessário que um mecanismo de rotura ocorra durante a análise. O processo que calcula o tamanho do *step* automaticamente (designado por *Load Advancement Number of Steps*) executa o número de *steps*, de 1 a 1000, especificado na interface (*Additional Steps*) pelo utilizador. O utilizador insere também o tamanho do *step* inicial, porém para os *steps* seguintes é o algoritmo embutido do PLAXIS que calcula automaticamente o tamanho do *step*.

Após a conclusão da análise é possível retirar os valores dos multiplicadores M_{loadA} e M_{stage} , bem como dos deslocamentos verticais e horizontais em pontos previamente seleccionados, os quais são processados posteriormente numa folha de cálculo.

- **Ensaio Triaxiais não drenados (CU)**

A fase de consolidação é modelada de forma idêntica àquela descrita para o ensaio em condições drenadas. Primeiro cria-se na secção *Input* do programa um novo material idêntico aquele utilizado na fase de consolidação (condições drenadas) mas especificando o tipo de material como não drenado. Na secção *Calculations* insere-se uma nova fase depois da fase de consolidação com o único propósito de permitir a mudança entre modelo K-G com condições drenadas para o modelo K-G (criado anteriormente) em condições não drenadas, uma vez que o programa admite que existem sempre condições drenadas quando se transita da fase de consolidação (com *Staged Construction*) para fase de corte (com *Incremental Multipliers*).

5.3. Validação do Modelo K-G

Simularam-se ensaios triaxiais drenados com diferentes pressões de confinamento de 100 kPa, 200 kPa e 300 kPa com o Método de Euler e com o Método de Euler Modificado para diferentes n de 1, 5, 10 e 20. Adicionalmente, simularam-se ensaios triaxiais não drenados com as mesmas pressões de confinamento com os dois métodos de integração para n de 1 e 10. Apenas alguns dos resultados correspondentes aos ensaios para tensões de confinamento 200 kPa e 300 kPa são apresentados de forma a contornar redundância de resultados.

Comparam-se os resultados destas simulações com uma solução aproximada do modelo K-G calculada com as fórmulas (3.15) e (3.16) por via analítica aproximada.

Os parâmetros utilizados para este conjunto de simulações são apresentados no Quadro 5.2.

Quadro 5.2 Parâmetros de entrada do modelo K-G para ensaios triaxiais no PLAXIS

Parâmetro	Nome	Unidades	Valor
1	Ki	kPa	10000
2	Gi	kPa	100
3	alphaK	-	100
4	phi	Graus	30
5	coesão	kPa	1

5.3.1. Método de Euler com diferentes números de ciclos

- **Ensaio triaxiais drenados (CD)**

A Figura 5.7 mostra a fase de consolidação (com Staged Construction). Apesar de não ser muito relevante no contexto de problemas geotécnicos, julgou-se pertinente discutir o desempenho do modelo no *software*, relacionando a tensão média com a deformação volumétrica.

Como é expectável existe uma melhoria significativa entre $n=1$ para $n=5$, não existindo ganhos significativos de $n=10$ para $n=20$. Se se utilizasse *Incremental Multipliers* com um tamanho de *step* inicial pequeno, poder-se-ia obter mais pontos intermédios. No entanto nesta fase a não linearidade introduzida pelo modelo K-G é pequena, visto que apenas está associada ao aumento da tensão média.

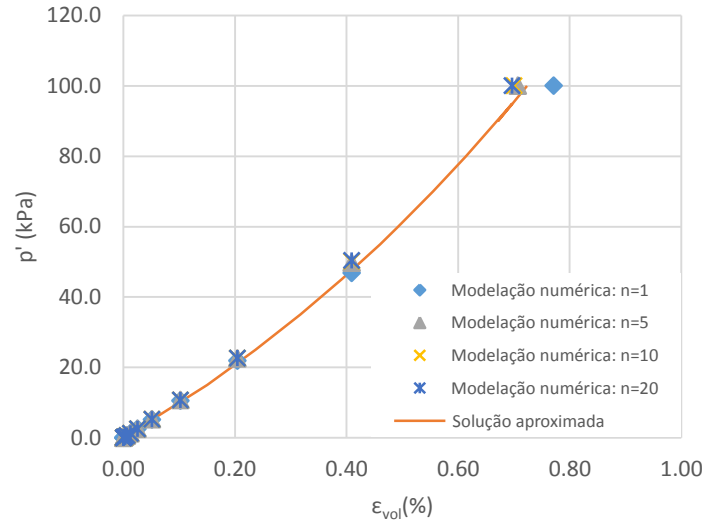


Figura 5.7 Relação entre deformação volumétrica e tensão média na fase de consolidação para diferentes números de ciclos para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)

A Figura 5.8 mostra as trajetórias de tensão durante a fase de corte para diferentes tensões de confinamento, juntamente com a envolvente de rotura de Mohr-Coulomb.

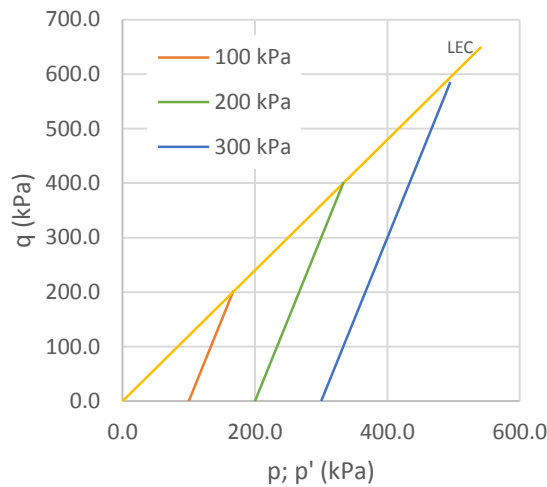


Figura 5.8 Trajectória das tensões para uma tensão de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Método de Euler, CD)

A trajetória das tensões totais coincide com a das tensões efectivas, uma vez que se trata de um ensaio triaxial drenado. Pode-se constatar que está de acordo com o critério de Mohr-Coulomb, não ultrapassando os valores dos invariantes que correspondem à rotura. Os invariantes aqui representados correspondem aos apresentados em (3.2) e (3.4), ou seja, p é a tensão média efectiva, p a tensão média total e q é a tensão deviatória.

Em relação à fase de corte verifica-se a mesma tendência presente na fase de consolidação. Para $n > 5$, não há uma alteração visível de resultados. Na Figura 5.9, onde se mostra o andamento da deformação volumétrica com a deformação de corte, é possível observar que existe uma boa concordância para as curvas correspondentes de $n=5$ a $n=20$ até 0,25% de deformação volumétrica. No entanto, existe sempre uma

pequena diferença (por exemplo, para $\epsilon_{vol} = 0,27\%$ existe uma diferença de 1% entre a solução aproximada e a modelação numérica que persiste para $n > 5$, provavelmente devido à imposição de $G \geq 1$).

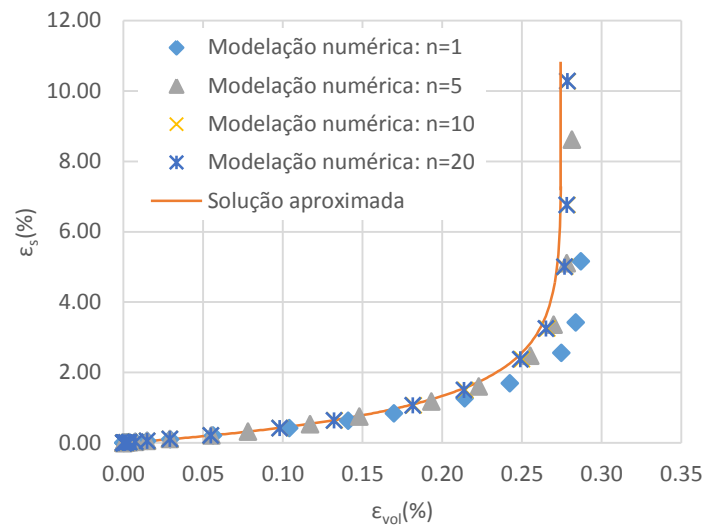


Figura 5.9 Relação entre deformação volumétrica e deformação de corte na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)

A Figura 5.10 mostra a relação entre a deformação de corte e a tensão deviatória para diferentes números de ciclos para uma tensão de confinamento de 100 kPa. Observa-se que a diferença máxima entre a solução aproximada e a solução numérica para $n=1$ é de cerca de 14 kPa quando $\epsilon_s=2,55\%$ e que para outros valores de n , as diferenças rondam os 1-2 kPa para o mesmo valor de deformação de corte. Assim conclui-se que resposta da modelação numérica para $n=10$ e $n=20$ é praticamente idêntica, não existindo ganhos em aumentar o número de ciclos para valores superiores a 10.

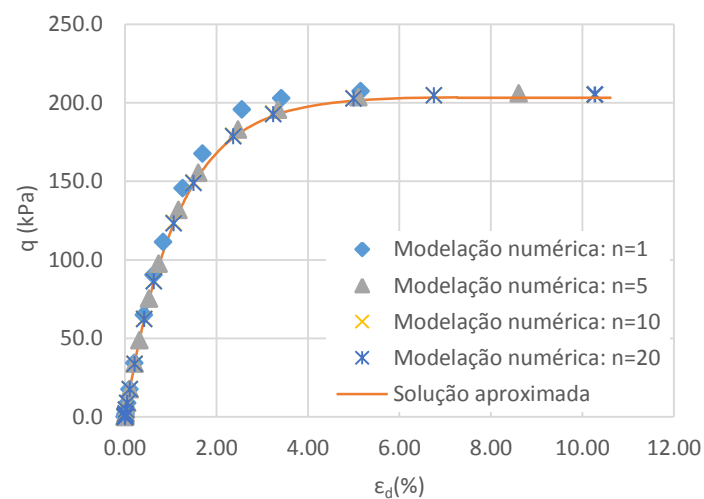


Figura 5.10 Relação entre deformação de corte e tensão deviatória na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)

A Figura 5.11 mostra a relação entre deformação volumétrica e tensão média para diferentes números de ciclos para uma tensão de confinamento de 100 kPa na fase de corte. Verifica-se uma boa correspondência

entre deformação volumétrica e tensão média, mesmo para $n=1$. Este resultado é expectável uma vez que a não linearidade é pouco acentuada.

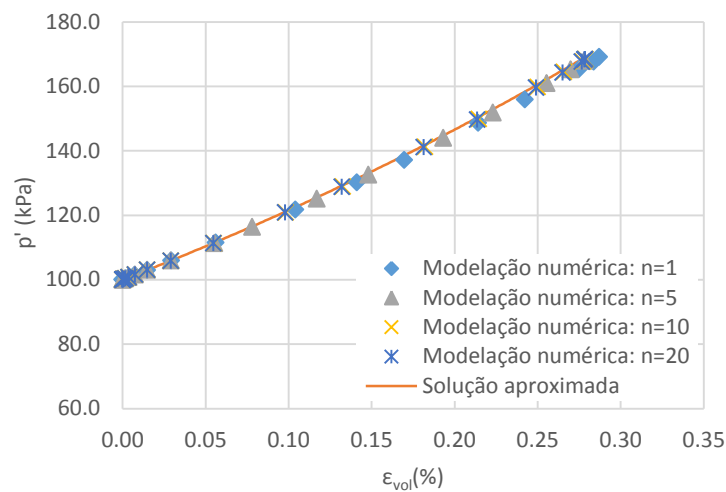


Figura 5.11 Relação entre deformação volumétrica e tensão média na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método de Euler, CD)

Os resultados para os ensaios triaxiais drenados com tensões de confinamento de 200 kPa e 300 kPa são apresentados resumidamente na Figura 5.12, uma vez que se obtiveram resultados semelhantes aos do ensaio triaxial com tensão de confinamento de 100 kPa. Estes resultados foram obtidos utilizando o método de Euler com $n=20$. Observa-se o efeito de diferentes tensões de confinamento na relação entre deformação de corte e deformação volumétrica, em que uma maior tensão de confinamento se traduz no aumento da deformação volumétrica (Figura 5.12 a)), e também na relação entre deformação de corte e tensão de corte, onde para uma maior tensão de confinamento existe naturalmente aumento da tensão de corte, q , (Figura 5.12 b)).

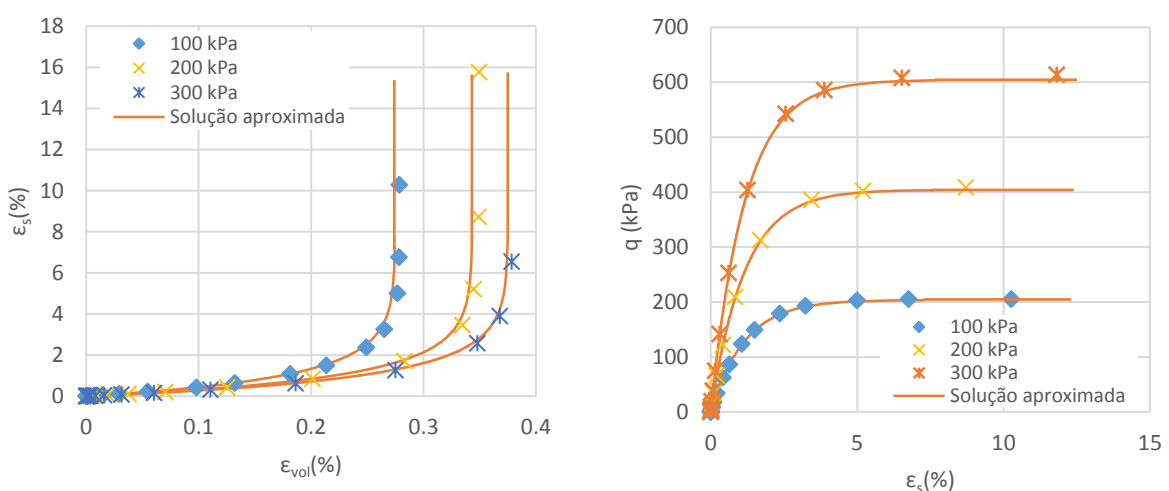


Figura 5.12 Efeito da tensão de confinamento na a) relação entre deformação de corte e deformação volumétrica e b) relação entre tensão de corte e deformação de corte

- **Ensaio Triaxiais não drenados (CU)**

Para os ensaios triaxiais não drenados decidiu-se apresentar os resultados de forma resumida, apresentando-se os ensaios para as tensões de confinamento de 100 kPa com diferentes n . Por esses motivos não se abordou de maneira exaustiva a variação de n , sendo apenas necessário confirmar se o comportamento não drenado é simulado de forma adequada. Assim, na Figura 5.13 observam-se as trajectórias de tensões totais e efectivas para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa.

Como é expectável, quando se aumenta o número de ciclos obtém-se uma maior precisão nos resultados. Isto é facilmente identificável pelo facto das trajectórias das tensões efectivas (TTE) para $n=10$ (representadas por linha contínua) verificarem com boa aproximação o critério de Mohr-Coulomb implementado no modelo pelos parâmetros adoptados enquanto isso não se verifica para $n=1$ (representado por pontos).

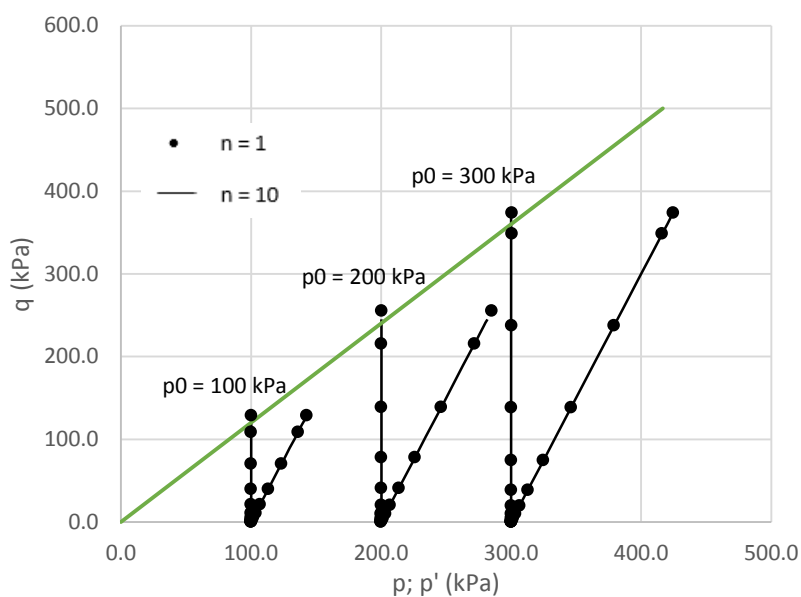


Figura 5.13 Trajectória das tensões efectivas e totais para diferentes tensões de confinamento (Método de Euler, CU)

Na Figura 5.14 observa-se que para $n=1$, existe um número reduzido de pontos intermédios. Quando se aumenta o valor de n ciclos para 10, obtém-se uma resposta muito mais fluída, sendo possível uma transição aceitável em zonas de rápida mudança de tangente.

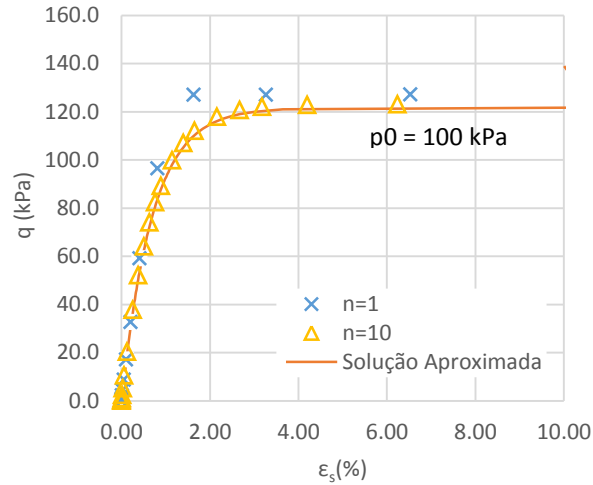


Figura 5.14 Relação entre deformação de corte e tensão deviatória para diferentes números de ciclos (Método de Euler, CU)

Também é possível computar o excesso de pressão neutra (Figura 5.15). Estes valores são confirmados observando as TTE e TTT na Figura 5.13, uma vez que estes são a diferença entre p e p' .

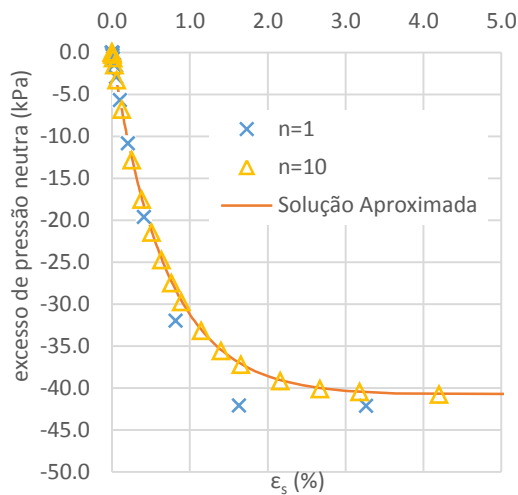


Figura 5.15 Relação entre deformação axial e excesso de pressão neutra para diferentes números de ciclo (Método de Euler, CU)

Finalmente com estes dados pode-se calcular o valor da resistência não drenada (C_u), utilizando a fórmula:

$$c_u = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{final}}{2} \quad (5.11)$$

Os valores da resistência não drenada para os ensaios com diferentes tensões de confinamento e valores de n são sumarizados no Quadro 5.3. Neste quadro é também apresentado a diferença destes valores em relação aos valores de resistência não drenada obtidos com a solução aproximada (para tensões de confinamento de 100 , 200 e 300 kPa estes são 70, 121 e 181 kPa).

Quadro 5.3 Valores para a resistência não drenada (C_u) para diferentes tensões de confinamento

P_0' (kPa)	Método Euler					
	100		200		300	
n	1	10	1	10	1	10
C_u (kPa)	64	66	128	123	189	184
ΔC_u (kPa)	- 6	- 4	+ 7	+ 2	+ 8	+ 3
Erro (%)	- 8,6	- 5,7	6	1,7	4,4	1,6

Apesar das discrepâncias observadas nas figuras anteriores nos resultados para diferentes n , é possível obter valores para a resistência não drenada na rotura bastante similares. Quando $n=1$, obtêm-se valores de C_u menos refinados com erro entre 4,4% e-8,6%. Como é expectável, este intervalo de valores para o erro, diminui quando se aumenta n , variando entre 5,7%-1,6%. Observou-se também que para uma maior pressão de confinamento o erro foi diminuindo.

5.3.2. Método de Modificado de Euler com diferentes números de ciclos

- **Ensaio triaxiais drenados**

Não são apresentados os resultados correspondentes a n igual a 10 e 20 para a fase de consolidação, uma vez que se verificou que os resultados eram idênticos a $n=5$. Assim, na Figura 5.16 observa-se uma boa correspondência entre as simulações para n menores ou iguais a 5 e solução aproximada até $\epsilon_{vol}=0,40\%$. Na fase isotrópica não existem diferenças palpáveis entre a utilização de n diferentes, obtendo-se curvas virtualmente coincidentes. O objectivo desta fase é alcançar um valor final de tensão de confinamento de 100 kPa. Comparando o valor de ϵ_{vol} no final da fase para a solução aproximada (0,72%) e modelação numérica (0,69%) verifica-se que existe apenas uma diferença de 0,03%.

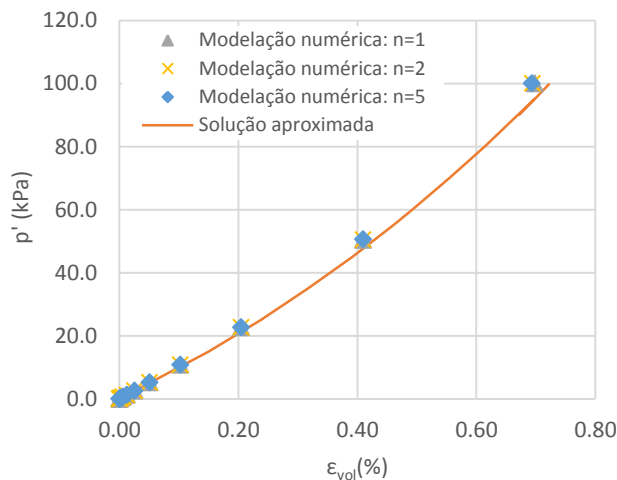


Figura 5.16 Relação entre tensão média efectiva e deformação deviatória na fase de consolidação para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)

A trajectória das tensões durante a fase de corte é apresentada de novo para uma tensão de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Figura 5.17), apesar de ser semelhante à presente em Figura 5.8, respeitando a envolvente de Mohr Coulomb.

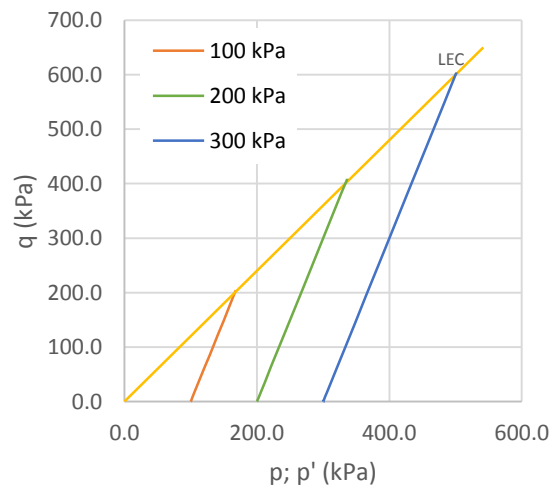


Figura 5.17 Trajectórias das tensões totais para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Método Modificado de Euler)

Na Figura 5.18 observa-se que a modelação numérica com $n=5$ permite obter um maior número de pontos, ajustando-se bem à solução aproximada, principalmente quando o solo atinge o ponto de rotura (a partir de 0,25 % da deformação volumétrica). No geral a correlação entre a deformação volumétrica e deviatórica para as simulações e a solução aproximada é bastante forte, especialmente para $n=5$. O algoritmo baseado no Método Modificado de Euler permite reduzir o número de ciclos realizados, obtendo-se uma resposta mais precisa, rapidamente.

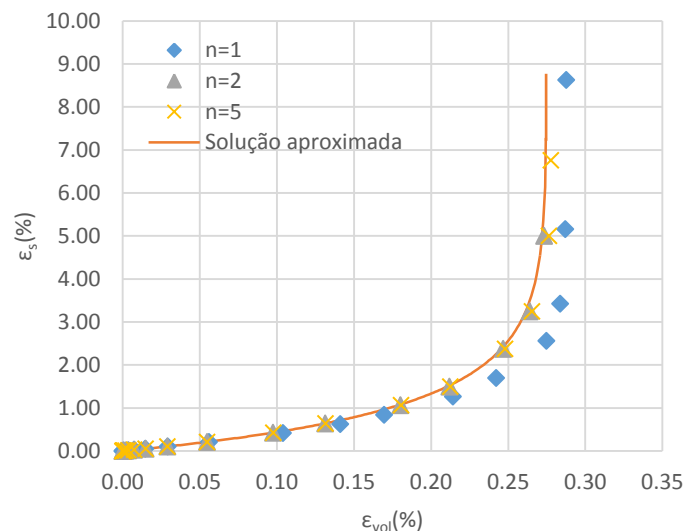


Figura 5.18 Relação entre deformação volumétrica e deformação deviatórica na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)

Ao contrário do que acontece para o algoritmo do Método de Euler, $n=1$ não corresponde a uma situação em que o PLAXIS calcula automaticamente a melhor solução. Na Figura 5.19 observa-se que a modelação numérica para $n=1$, apesar de bastante próxima da solução aproximada, falha em modelar a rápida mudança de tensões entre 2-4% da deformação deviatória.

Quando se aumenta o número de ciclos para 2, é possível observar uma coincidência entre soluções (modelação numérica: $n=2$ e solução aproximada) bastante boa, homologando um comportamento elástico não-linear desejado. Não existem diferenças significativas de $n=2$ para $n=5$, excepto no troço final onde a resposta de $n=5$ é prolongada.

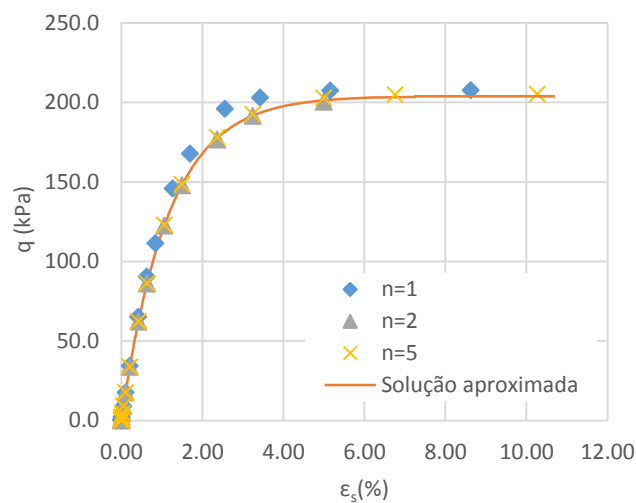


Figura 5.19 Relação entre deformação deviatória e tensão deviatória na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)

Em relação à Figura 5.20, não é possível notar uma diferença notória entre as modelações com diferentes n , devido à fraca não linearidade da relação entre a tensão média e deformação volumétrica.

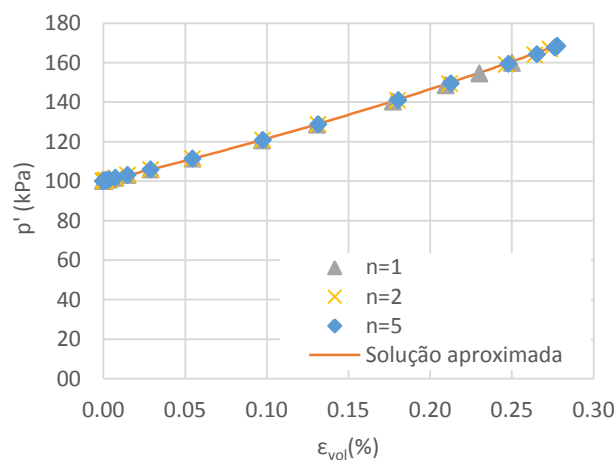


Figura 5.20 Relação entre deformação volumétrica e tensão média na fase de corte para diferentes números de ciclo para $p_0=100$ kPa (Método Modificado de Euler)

Os resultados para as restantes tensões de confinamento de 200 e 300 kPa (não apresentados nesta dissertação), são bastante semelhantes aos resultados anteriores com a diferença de existirem mais pontos criados especialmente perto da rotura (300 kPa). Na fase de corte, na relação entre deformação deviatória e volumétrica, verifica-se que para tensões de confinamento de 200 e 300 kPa, quando se aumenta o número de ciclos, obtém-se uma resposta significativamente superior comparada com a resposta para n menores. Como foi referido anteriormente existe a hipótese de refinar a resposta escolhendo um $MloadA$ menor para ambos os ensaios com diferentes tensões de confinamento.

- **Ensaio triaxiais não drenados (CU)**

Apresentam-se resumidamente os resultados dos ensaios triaxiais não drenados com o algoritmo do Método Modificado de Euler para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa.

À semelhança do algoritmo do Método de Euler, as trajectórias de tensões efectivas respeitam o critério de rotura de Mohr-Coulomb, inclusive não ultrapassam a recta delimitante (LEC) para nenhum dos ensaios (Figura 5.21).

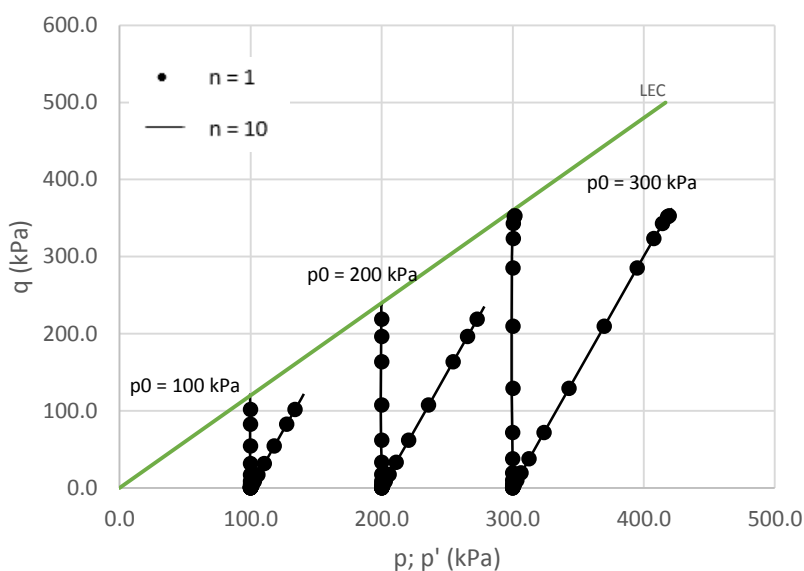


Figura 5.21 Trajectória das tensões efectivas e totais para diferentes tensões de confinamento (Método Modificado de Euler, CU)

Nas Figura 5.21 a) e b) é possível observar que, a curva de valores correspondente a $n=1$, começa a divergir face aos resultados obtidos para $n=10$ a partir de $\epsilon_s=0,81\%$.

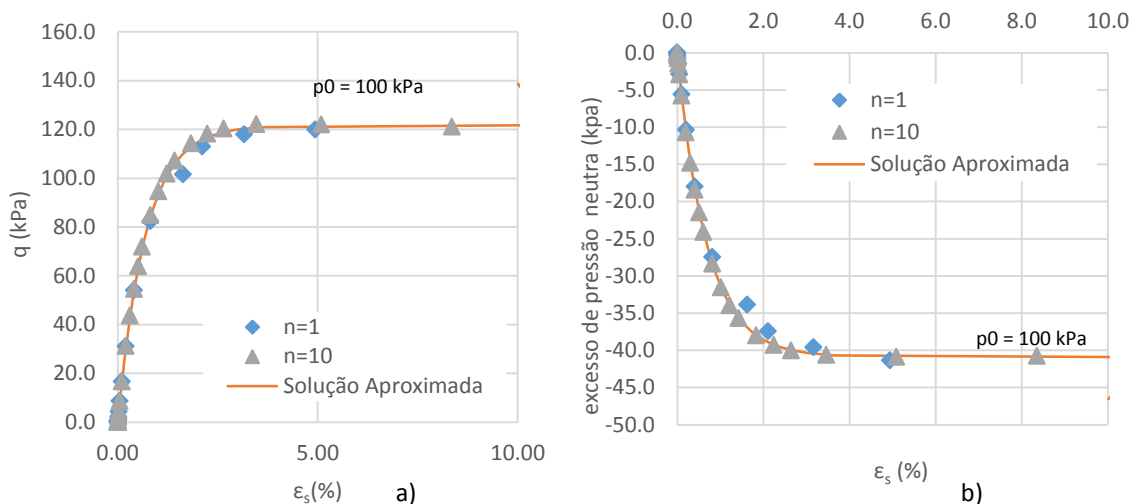


Figura 5.22 a) Relação entre deformação deviatória e tensão deviatória para diferentes números de ciclos b) Relação entre deformação axial e excesso de pressão intersticial para diferentes números de ciclos (Método Modificado de Euler, CU)

Os valores da resistência não drenada para os ensaios com diferentes tensões de confinamento e valores de n são sumarizados no Quadro 5.4.

Quadro 5.4 Valores para a resistência drenada na rotura (C_u) para diferentes tensões de confinamento com Método Modificado de Euler

p_0 (kPa)	Método Modificado de Euler					
	100		200		300	
n	1	10	1	10	1	10
C_u (kPa)	66	69	117	120	176	181
ΔC_u (kPa)	-4	-1	-4	-1	-5	0
Erro (%)	-5,7	-1,4	-3,3	-0,8	-2,8	0

No quadro acima nota-se uma tendência para valores de resistência não drenada inferiores quando $n=1$ comparada com os valores para $n=10$, ou seja, para modelações realizadas com $n=1$ é obtido uma resistência não drenada na rotura menos exacta. A diferença de valores entre as modelações ($n=1$ e $n=10$) é no máximo 5 kPa quando p_0 igual a 300 kPa, excepto quando as tensões de confinamento são de 100 e 200 kPa, onde é cerca de 3 kPa. Comparando os valores de C_u da solução aproximada com os da modelação numérica, observa-se que o valor máximo de erro ocorre para $n=1$ e $p_0 = 100$ kPa, e quando se aumenta o número de ciclos (n), este erro diminui para 1,4%. Existe também uma tendência para o erro diminuir à medida que se aumenta a tensão de confinamento (para $p_0=300$ kPa e $n=10$, obtém-se um erro quase inexistente).

5.3.3. Comparação entre algoritmos do Método de Euler e Método Modificado de Euler

- Ensaio triaxiais drenados (CD)

Na Figura 5.23 é possível observar os resultados da modelação para os dois algoritmos discutidos acima utilizando-se o mesmo número de ciclos. No geral verifica-se que o algoritmo MME permite obter resultados bastante adequados utilizando um número menor de n do que o algoritmo ME nas mesmas condições.

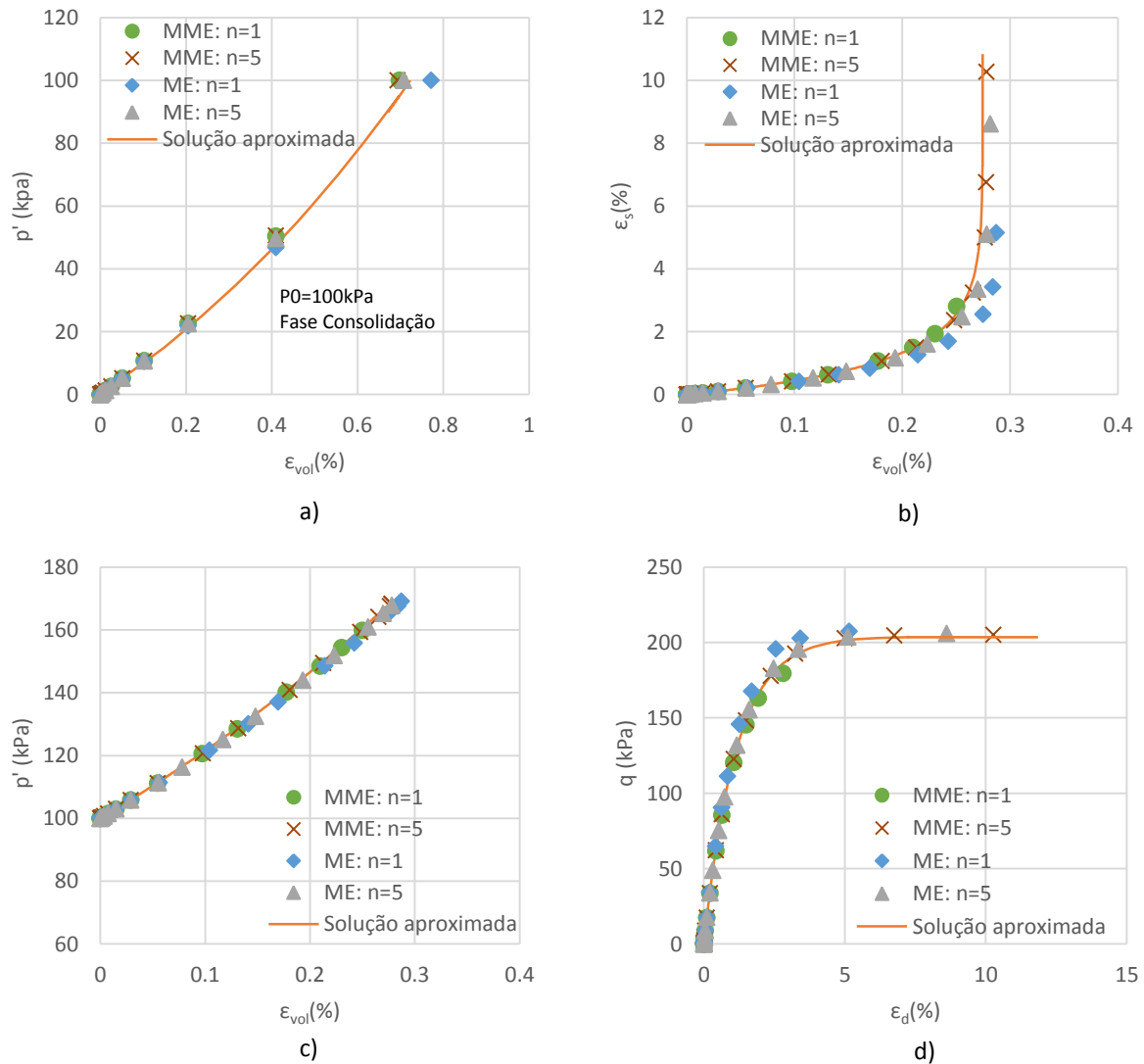


Figura 5.23 Resultados dos ensaios triaxiais drenados com tensão de confinamento 100 kPa para diferentes algoritmos com n iguais

Para a fase de corte não é possível analisar somente em função dos resultados finais das deformações obtidas. Há que considerar a forma como ambos os algoritmos se comportam para variações bruscas na matriz de rigidez do solo no decorrer da simulação. Por exemplo, quando se considera um número unitário de n para o Método de Euler, apesar de existir subincrementação e ser um método expedito, os resultados não são satisfatórios. Assim, os resultados destas simulações nesta fase, que correspondem a ME: $n=1$, não são

satisfatórios uma vez que as curvas obtidas apresentam dificuldade em se ajustar à da solução aproximada (a partir de deformações de corte superiores a 1,7%, Figura 5.23 b)).

Adicionalmente, é possível afirmar que o algoritmo MME permite obter resultados mais aproximados da solução para um valor menor de n , contudo a partir de um certo número deste não é possível refinar os resultados ($n=5$). Tal não se verifica para ME onde é possível melhorar a resposta até $n=10$.

- **Ensaio triaxiais não drenados (CU)**

A fase de consolidação destes ensaios é semelhante à dos ensaios drenados pelo que não será abordada.

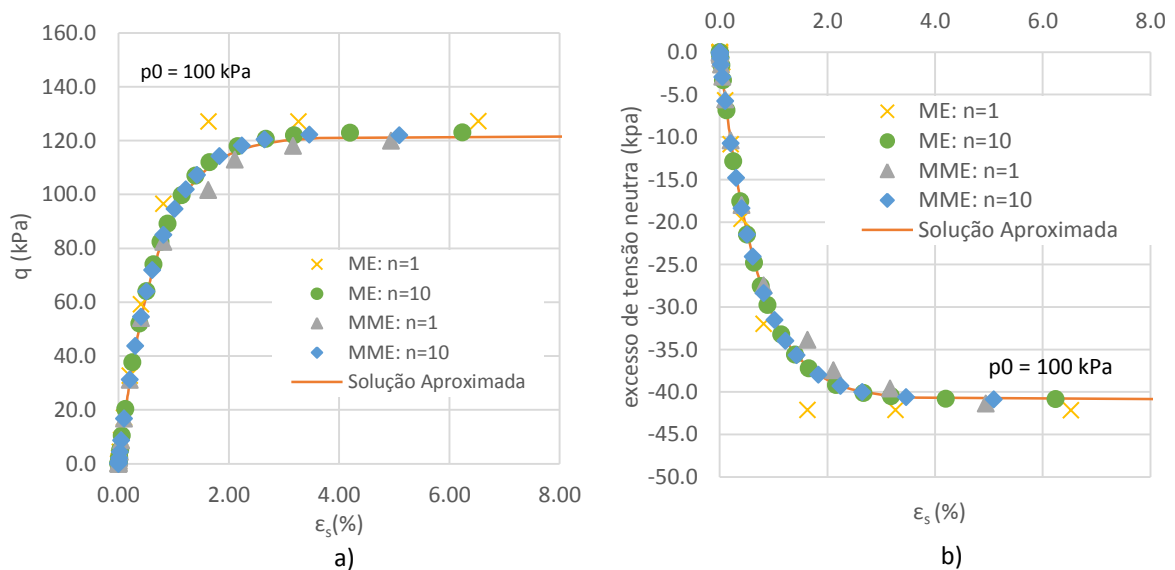


Figura 5.24 Resultados dos ensaios triaxiais não drenados com tensão de confinamento 100 kPa para diferentes algoritmos com n iguais

Observa-se que o algoritmo do Método Modificado de Euler para $n=1$ apresenta resultados satisfatórios quando comparado com os do algoritmo do Método de Euler para o mesmo número de ciclos e a solução. De facto, os pontos correspondentes ao algoritmo do Método de Euler para o mesmo número de ciclos ($n=1$), afastam-se dos outros resultados, ultrapassando em 10 kPa do valor médio das curvas (Figura 5.23 a)), não sendo razoável. Para $n=10$, ambos os algoritmos apresentam resultados satisfatórios, com curvas bem delimitadas com bastantes pontos em zonas de brusca variação de tangente. De notar também que para um valor intermédio de n , não apresentado aqui, o algoritmo MME converge muito rapidamente para uma solução do que o algoritmo ME.

6. Implementação e Validação do Modelo de Jardine

Neste capítulo é descrita a implementação de um modelo elástico perfeitamente plástico em que a componente elástica é descrita pelo modelo não linear de Jardine e a componente plástica pelo critério de rotura de Mohr-Coulomb, e a sua validação.

6.1. Formulação das Equações Constitutivas

Este modelo elástico não linear, já descrito em 3.3.2, é utilizado para descrever o comportamento dos solos no domínio das pequenas deformações, sendo frequentemente utilizado para descrever a parte elástica de um modelo elástico perfeitamente plástico. Em Jardine et al., (1986) foi utilizado o critério de rotura de Tresca enquanto em Puzrin et al, (1997) foi adoptado o critério de rotura de Mohr-Coulomb para descrever a componente plástica, sendo essa formulação adoptada nesta dissertação.

Os parâmetros necessários para definir este modelo podem ser determinados através de resultados de ensaios triaxiais com medição local. No total são utilizados dez parâmetros de entrada sendo cinco referentes ao módulo de deformabilidade volumétrica tangente, K_t , e os restantes ao módulo de distorção tangente, G_t . Recordando as equações para K_t e G_t ,

$$\frac{3G_t}{p'} = A + B \cos(\alpha X^\gamma) - \frac{B\alpha\gamma X^{\gamma-1}}{2.303} \sin(\alpha X^\gamma) \quad (6.1)$$

$$\frac{K_t}{p'} = R + S \cos(\delta Y^\eta) - \frac{S\delta\eta Y^{\eta-1}}{2.303} \sin(\delta Y^\eta) \quad (6.2)$$

E onde na equação (6.1), A , B , α e γ são parâmetros adimensionais e C é expresso em percentagem e na equação (6.2), R , S , δ e η são parâmetros adimensionais e T é expresso em percentagem.

Devido à natureza trigonométrica das equações (6.1) e (6.2) é necessário definir valores mínimos e máximos ε_{vol} e ε_{dev} . Por exemplo, quando ε_{vol} é menor que ε_{volmin} , assume-se o valor ε_{volmin} , sendo a mesma lógica aplicada a ε_{dev} .

Assim para calcular o valor de K e G tangenciais correntes é necessário calcular o invariante p' bem como os valores acumulados da deformação volumétrica, ε_{vol} e deformação deviatória, ε_{dev} .

Uma vez que este modelo incorpora o critério de rotura de Mohr-Coulomb é necessário definir os parâmetros associados a este: o ângulo de resistência ao corte, φ' , a coesão efectiva, c' , e o ângulo de dilatância, ψ , que define o potencial plástico.

6.2. Implementação do Modelo de Jardine no *software* PLAXIS

De seguida é discutido a implementação do modelo Jardine no *software* PLAXIS, em particular a modelação numérica intrínseca ao modelo que é realizada em *IDTask 2*, e os exercícios de validação realizados.

6.2.1. Estrutura da Subrotina do modelo de Jardine

Na subrotina *Jardine*, para além da modelação constitutiva respectiva do modelo de solo, são invocadas subrotinas de apoio. Estas subrotinas destinam-se, por exemplo, ao cálculo de valores intermédios (*KGcalc*), verificação dos valores atribuídos aos parâmetros do modelo por parte do utilizador, seguida de uma mensagem de aviso caso estes não sejam válidos (*msg_erro*) e cálculo das deformações volumétricas e deviatóricas acumuladas (*Deform*). O critério de rotura é também introduzido sob forma de uma subrotina denominada *mc*, sendo chamada na subrotina principal *Jardine*. Criaram-se estas subrotinas de apoio para que o código em *Jardine* permanecesse organizado e de fácil leitura.

De forma idêntica ao modelo K-G, a implementação do modelo de Jardine é dividida em seis tarefas ou *IDTasks*. Este modelo possui seis variáveis de estado correspondentes ao vector das componentes de deformações, *Eps0(i)*, o qual é iniciado em *IDTask 1*.

Conforme referido acima, para além de ser pedido ao utilizador a inserção dos dez parâmetros, é necessário introduzir outras constantes, nomeadamente os limites inferiores e superiores para ε_{vol} e ε_{dev} e os parâmetros referentes à componente plástica do modelo (φ' , c' e ψ). Assim, o utilizador insere as constantes presentes no Quadro 6.1 na *interface* do programa. Estes valores são escritos no vector *Props*.

Quadro 6.1 Parâmetros de entrada para o modelo de Jardine

<i>Props</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parâmetro	A	B	C	R	S	T	α	γ	δ	η
Unidades	-	-	%	-	-	-	-	-	-	-

<i>Props</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Parâmetro	Evmax	Evmin	Edmax	Edmin	Gnorm	Knorm	ncyle	ϕ	ψ	coesao
Unidades	%	%	%	%	kPa	kPa	-	(°)	(°)	kPa

Os primeiros 14 parâmetros em *Props* já foram abordados acima. No entanto é necessário alertar para uma particularidade no código referente à ordem de grandeza dos parâmetros *C*, *T*, *Evmax*, *Evmin*, *Edmax* e *Edmin*. Verificou-se que a interface do PLAXIS não aceita valores com mais de três casas decimais, e estes parâmetros (retirados de ensaios triaxiais de alta precisão) necessitavam de pelo menos cinco a seis casas decimais. Assim,

definiu-se que o valor a introduzir na interface do programa deverá ser multiplicado por 10^3 de forma a se obter alguma precisão no *input*. Posteriormente dentro da subrotina o valor é dividido por 100×10^3 .

Knorm e *Gnorm* são constantes utilizadas em *IDTask 3* e *6* e serão discutidas posteriormente. Os restantes parâmetros (18 a 20) são utilizados na subrotina *mc*, e correspondem ao ângulo de resistência ao corte (ϕ'), ângulo de dilatação (ψ) e coesão (c').

Em *IDTask 1* são também calculados constantes de apoio, nomeadamente *sPhi*, *sPsi* e *cCosPhi* que correspondem ao seno do ângulo de resistência ao corte, ao seno do ângulo de dilatação e à multiplicação da coesão pelo coseno do ângulo de atrito. Finalmente, é invocada a subrotina *msg_erro* que verifica se os parâmetros inseridos pelo utilizador se encontram válidos (apresentados no Quadro 6.1), e caso não o sejam envia uma mensagem para a interface a avisá-lo do mesmo.

Em *IDTask 2* define-se que o vector *Eps0(i)* corresponde a *StVar0(i)*, ou seja às variáveis de estado no início de cada *step*. De seguida, é invocada a subrotina *Deform*, onde através do vector *Eps0(i)* se extrai dados para calcular a deformação deviatória inicial, *Ed0*, e a deformação volumétrica inicial, *Ev0*, através das equações (3.6) e (3.7). É possível comparar estes valores com os limites mínimos e máximos da deformação volumétrica e deviatória que o utilizador inseriu na *interface*, e proceder a uma potencial correcção destes. Por exemplo, se o valor de *Ed0* for inferior a *Edmin*, então *Ed0* corresponde a *Edmin*, e a subrotina procede os cálculos com esse novo valor.

De seguida são calculados os valores intermédios *X* e *Y*, das equações (3.23) e (3.24) bem como as tensões principais através da subrotina *PrnSig*. Esta subrotina da biblioteca do PLAXIS também permite calcular o valor do invariante p (tensão média), que é posteriormente utilizado no cálculo de *K* e *G*. Há que ter especial atenção quando o valor de p' é menor que 1 kPa (onde tensões possuem valores perto de zero), uma vez que isso pode trazer instabilidade numérica. Como forma de contornar esse problema inseriu-se uma condição que garante um valor mínimo de p' de 1 kPa. Calculado *X*, *Y* e p , é invocada a subrotina *KGcalc*, que como o nome indica, calcula o valor dos módulos de deformabilidade volumétrico e deviatório tangentes (*Kt* e *Gt*). É aqui que se verifica se o valor de *Gt* é adequado (neste caso maior que 1) e se calcula o valor do coeficiente de Poisson, ν resultante. Seguidamente, cria-se a matriz de rigidez efectiva de forma análoga à do modelo K-G, multiplicando-a pelo vector dos incrementos de deformações, *dEps(i)*, para se obter o vector do incremento de tensões, *dSig(i)*. Este incremento é adicionado ao vector *Sig0(i)* de forma a calcular o vector das tensões, *Sig(i)*, após o incremento de deformação.

A partir daqui é inserido no código a parte correspondente ao critério de Mohr-Coulomb. São calculadas as tensões principais e respectivas direcções do estado de tensão após incremento de deformação através da subrotina *PrnSig*, que são guardadas no vector *Prs_E(i)*. Após isto, fixa-se o valor para o comutador *IArea* para 2 que corresponde a um caso regular (ou seja, quando a derivada da superfície de cedência é contínua). Este comutador permite avaliar o estado de tensões e identificar de entre três situações que envolvem a superfície de cedência (Ver Quadro 6.2).

Quadro 6.2 Diferentes estados de tensão e correspondente *comutador (IArea)*

<i>IArea</i> =1	Compressão triaxial, $\theta = -30^\circ$	$ \sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3 $
<i>IArea</i> =2	Superfície de cedência regular	$ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 $
<i>IArea</i> =3	Extensão triaxial, $\theta = 30^\circ$	$ \sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3 $

Conforme mencionado em 3.4.5, o critério de rotura de Mohr-Coulomb num espaço de tensões principais possui uma superfície de cedência cónica hexagonal. Nos cantos, em compressão ou extensão triaxial, a derivada não é contínua sendo estas situações identificadas através do *comutador IArea* 1 e 3.

Assume-se inicialmente que *IArea* é igual a 2 e a subrotina *mc* é invocada. Esta toma como *input IArea*, *G* (módulo de distorção), *xNu* (coeficiente de Poisson), *sPhi* (seno do ângulo de atrito), *sPsi* (seno do ângulo de dilatação), *cCosPhi* (coesão a multiplicar pelo coseno do ângulo de atrito), *Prs_E* (tensões principais elásticas), e como *output Prs* (tensões principais resultantes) e *ipl* (indicador de plasticidade). Na subrotina *mc* verifica-se se o comportamento é plástico ou elástico através do cálculo da função de cedência. Caso se conclua que o estado de tensão se encontra abaixo da superfície de cedência e o comportamento é elástico durante o incremento de deformação, então a subrotina aborta e as tensões calculadas assumindo comportamento elástico são aceites, caso contrário, diferencia-se a função de potencial elástico, *G*, e calculam-se os valores corrigidos das tensões principais, *Prs*, e em seguida o vector das tensões cartesianas, *Sig*. Este procedimento é semelhante para os outros casos (singularidades), podendo-se consultar o código desta subrotina no Anexo. Os valores do vector das tensões, *Sig*, são actualizados bem como os valores do vector de deformações, *Epsn*.

Para as restantes *IDTask*, 3 e 6, realiza-se algo semelhante ao da subrotina do modelo K-G em que se cria uma matriz de rigidez inicial de referência, para ser comparada com a matriz criada em *IDTask* 2. Em *IDtask* 5, os *comutadores* encontram-se todos a zero, excepto o *comutador iStrsDep*, referente à dependência das tensões da matriz do material. Conforme referenciado em 4.2, caso se defina este *comutador* como unitário, o PLAXIS utiliza o método modificado de Newton-Raphson.

Os algoritmos de integração descritos na secção 2.3 desta dissertação foram aplicados neste modelo, e observa-se novamente que o algoritmo baseado no Método Modificado de Euler produz resultados superiores para um número menor de *n* quando comparado com o Método de Euler. Isto é especialmente relevante quando se utiliza o procedimento *Staged Construction*. Assim, é altamente recomendado que as simulações na secção de cálculo utilizem o procedimento *Incremental Multipliers* de forma a aumentar os pontos de informação, uma vez que tal não se verificou quando se utiliza *Staged Construction*.

6.2.2. Ensaios Triaxiais

Em seguida, é descrito brevemente como são modelados os ensaios triaxiais drenados e não drenados no contexto do PLAXIS. Estes ensaios são utilizados no processo de validação do modelo de Jardine.

- **Ensaios triaxiais drenados (CD)**

A primeira fase do ensaio é modelada com um modelo linear elástico, uma vez que se concluiu após diversos testes que o modelo de solo de Jardine é especialmente formulado para situações em que o solo é sujeito a tensões de corte e não a consolidação isotrópica. É irrelevante se se utiliza *Staged Construction* ou *Incremental/Total Multipliers*.

Na fase de corte utiliza-se o procedimento *Incremental Multipliers* de forma semelhante àquela empregue em 5.3 para ensaios triaxiais consolidados. Os parâmetros utilizados foram retirados de Puzrin et al (1997) referentes a um cascalho arenoso aluvionar de Londres (Quadro 6.3).

Quadro 6.3 Parâmetros de entrada do modelo de Jardine para ensaios triaxiais

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parâmetro	A	B	C	R	S	T	α	γ	δ	η
Valor	1380	1248	0,0005	275	225	0,002	0,974	0,94	0,998	1,044
Unidades	-	-	%	-	-	-	-	-	-	-

Número	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Parâmetro	Evmax	Evmin	Edmax	Edmin	Gnorm	Knorm	ncyle	ϕ	ψ	coesao
Valor	0,2	0,0021	0,3464	0,0009	10000	10000	1-10	30	0-30	1
Unidades	%	%	%	%	kPa	kPa	-	(°)	(°)	kPa

- **Ensaios triaxiais não drenados (CU)**

Os parâmetros utilizados nestes ensaios são iguais aos apresentados no Quadro 6.3. As fases do ensaio são iguais às descritas anteriormente para os ensaios com o modelo K-G. A primeira fase é drenada, e a segunda fase assume-se comportamento não drenado.

6.3. Validação do Modelo de Jardine

Foram realizadas simulações de ensaios triaxiais drenados com o modelo de Jardine com critério de rotura para diferentes tensões de confinamento (100, 200 e 300 kPa). Variou-se o ângulo de dilatância (ψ) para valores de 0°, 15° e 30°, fixando-se o valor do ângulo de atrito (ϕ) a 30°. Foi utilizado o algoritmo do Método Modificado de Euler com $n=10$. Adicionalmente, foi possível aferir uma solução aproximada do modelo de Jardine utilizando as fórmulas (3.21) e (3.22) em função dos módulos de deformabilidade volumétrica e deviatória normalizados e respectivas deformações.

De forma semelhante, foram realizados no PLAXIS ensaios triaxiais não drenados para diferentes tensões de confinamento (100, 200 e 300 kPa).

6.3.1. Modelo de Jardine com Critério de Rotura de Mohr-Coulomb

- **Ensaio triaxiais drenados (CD)**

Na Figura 6.1 é possível observar as curvas de rigidez normalizadas (em escala logarítmica) do modelo de Jardine obtidas através do programa PLAXIS e compará-las com as da solução aproximada. Os pontos obtidos através da modelação numérica coincidem com os da solução aproximada no geral. Observa-se claramente a degradação acentuada da rigidez (normalizada pela tensão média efectiva, p') com a ocorrência de deformação.

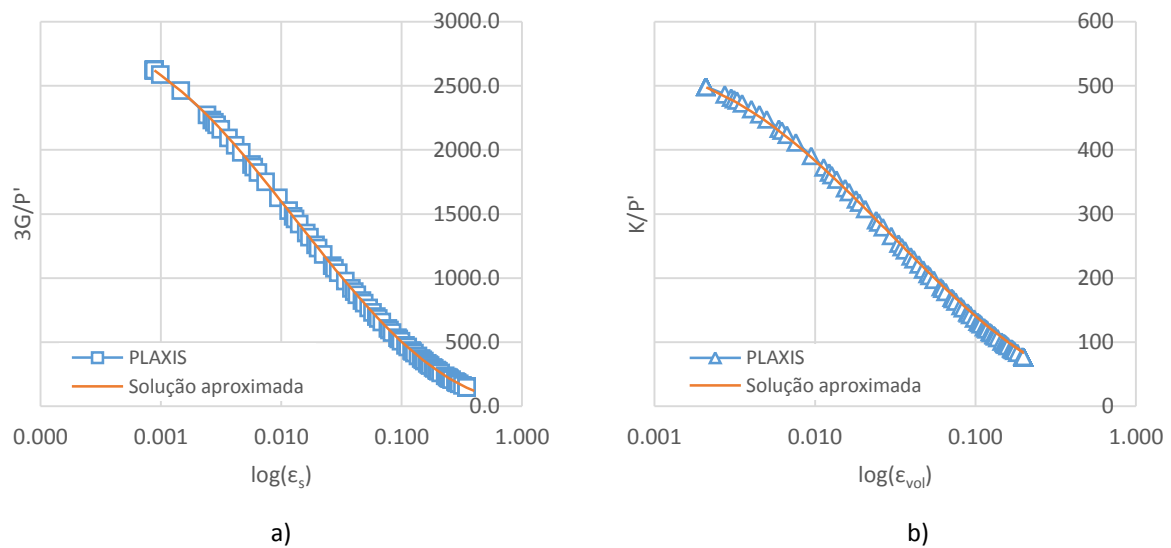


Figura 6.1 Comparação da variação do módulo de deformabilidade volumétrica e de corte normalizado entre modelação numérica e solução aproximada do modelo de Jardine

Na Figura 6.1 a) são apresentadas as trajectórias das tensões totais e efectivas para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa bem como o envelope de tensões admissíveis para o critério de rotura de Mohr-Coulomb. Verifica-se que as trajectórias de tensão ultrapassam ligeiramente o envelope de tensões admissíveis de Mohr-Coulomb. Por exemplo, a tensão de rotura teórica para uma tensão de confinamento de 100 kPa é de 303,46 kPa e a tensão de rotura obtida através da modelação foi de 304,61 kPa, ou seja, existe um erro de 0,37%.

O comportamento deste modelo face à variação do ângulo de dilatância (0° , 15° e 30°) é observável na Figura 6.1 b), onde $\psi < \varphi'$ resulta em condições não-associadas (ou seja, lei de fluxo não associada).

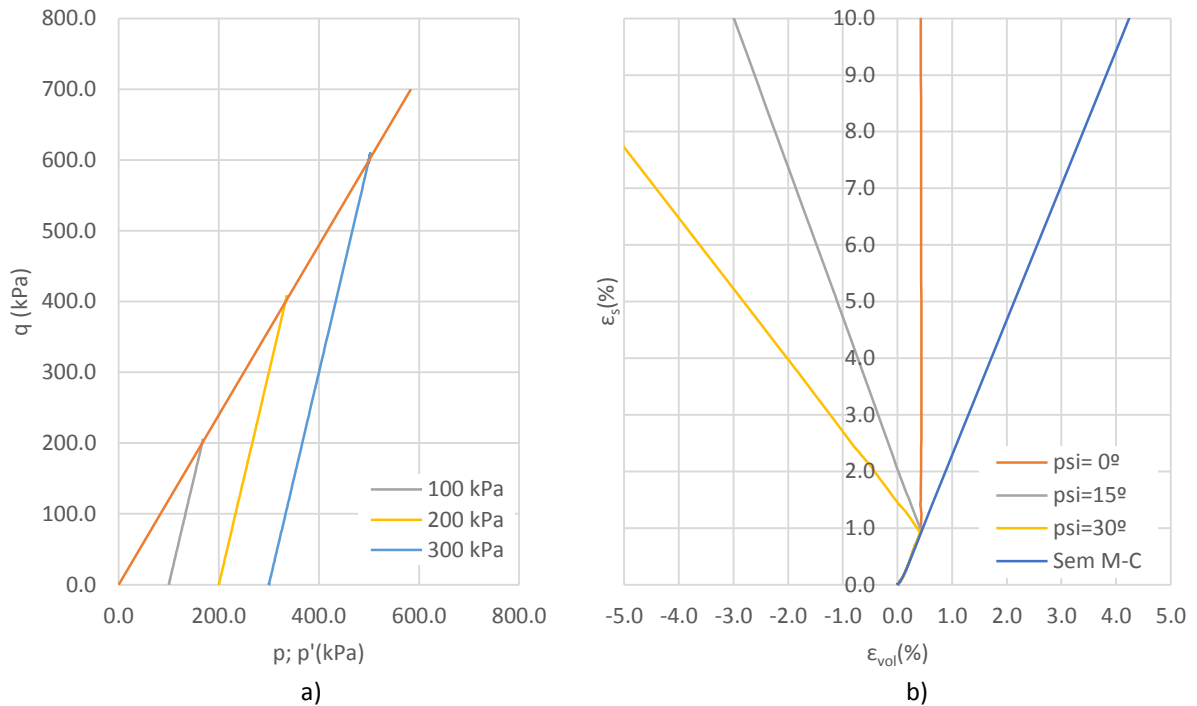


Figura 6.2 Trajetórias das tensões para tensões de confinamento de 100, 200 e 300 kPa (Modelo de Jardine com Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb b) Relação entre deformação volumétrica e deformação deviatória na fase de corte para $p_0=100$ kPa (CD)

Verificou-se que independentemente do valor adoptado para a dilatância após se atingir a ruptura, as tensões no elemento de solo mantêm-se constantes. Em termos de deformação, para ângulos de dilatância superiores a 0° , verifica-se que após se atingir a ruptura a deformação volumétrica começa a diminuir (ou seja, o solo dilata). Se se admitir um ângulo de dilatância de 0° , não existe dilatância plástica e não ocorre deformação volumétrica plástica (Figura 6.3).

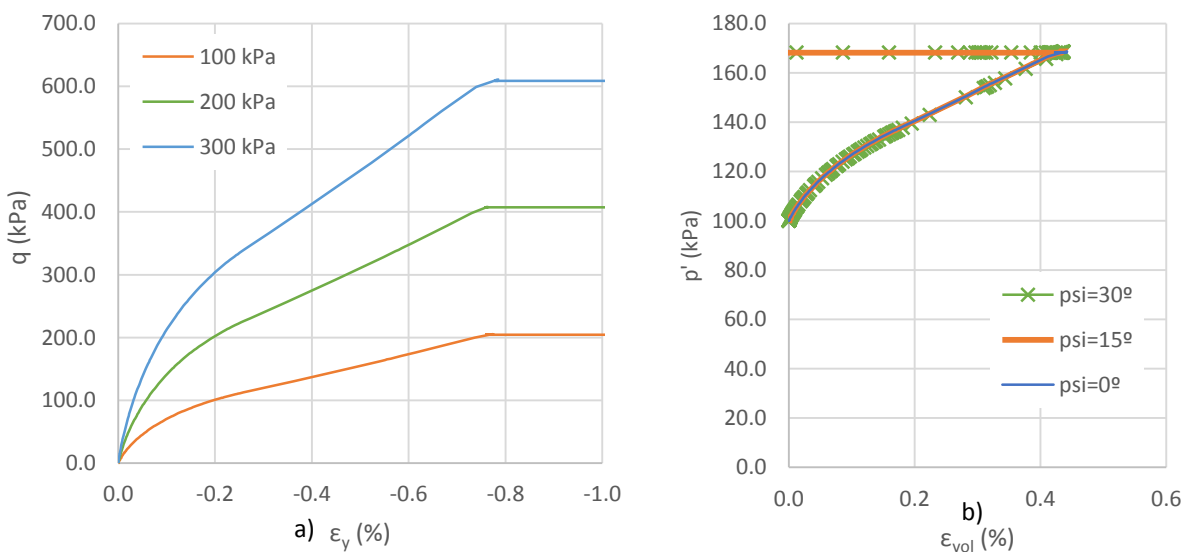


Figura 6.3 Resultados dos ensaios triaxiais drenados na fase de corte para $p_0=100, 200$ e 300 kPa do Modelo de Jardine com Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb (CD)

- **Ensaaios triaxiais não drenados (CU)**

As trajetórias da tensão efectiva e total para uma tensão de confinamento de 100 kPa com ângulos de dilatância de 0° e 15° são apresentadas na Figura 6.4 a) e b). A trajetória onde se define um ângulo de dilatância de 30° não é apresentada uma vez que é semelhante à de 15°.

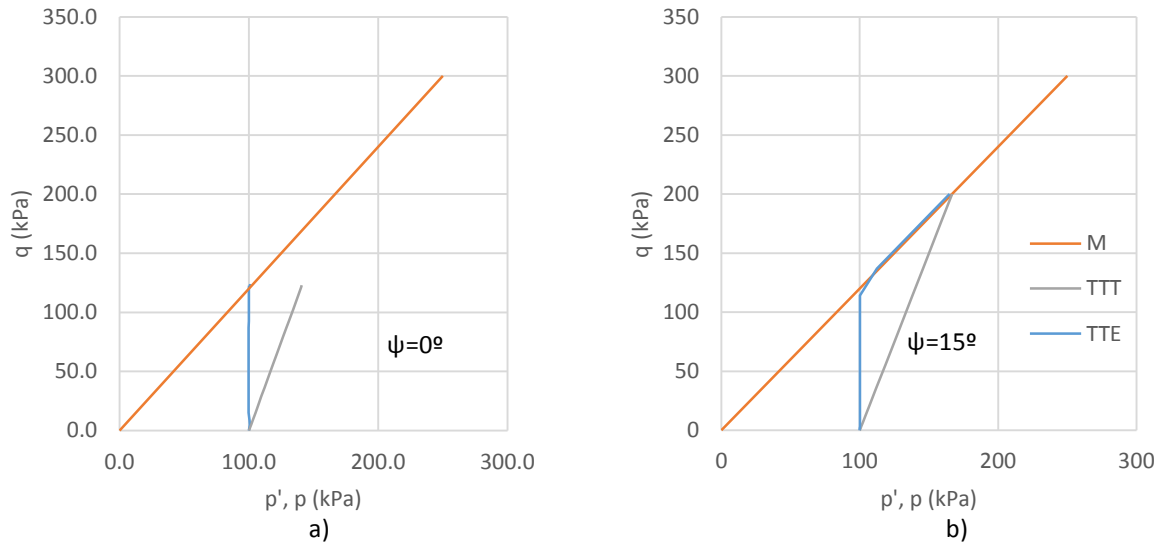


Figura 6.4 a) Trajetórias das tensões para tensão de confinamento de 100 kPa para $\psi=0^\circ$ e b) $\psi=15^\circ$

Sabe-se que um solo com tendência para dilatar durante a fase de corte drenada, exhibe igualmente tendência para diminuição da tensão neutra durante a fase de corte não drenada, o que resulta num aumento das tensões efectivas. Similarmemente um solo com tendência para comprimir durante corte em condições drenadas, exhibe um aumento no excesso de tensão neutra durante corte em condições não drenadas, resultando numa diminuição da tensão efectiva. Este modelo constitutivo consegue modelar este comportamento quando se atinge a rotura, onde o parâmetro de entrada, ψ_{si} , governa a dilatância do modelo de solo (Figura 6.5 a) e b)).

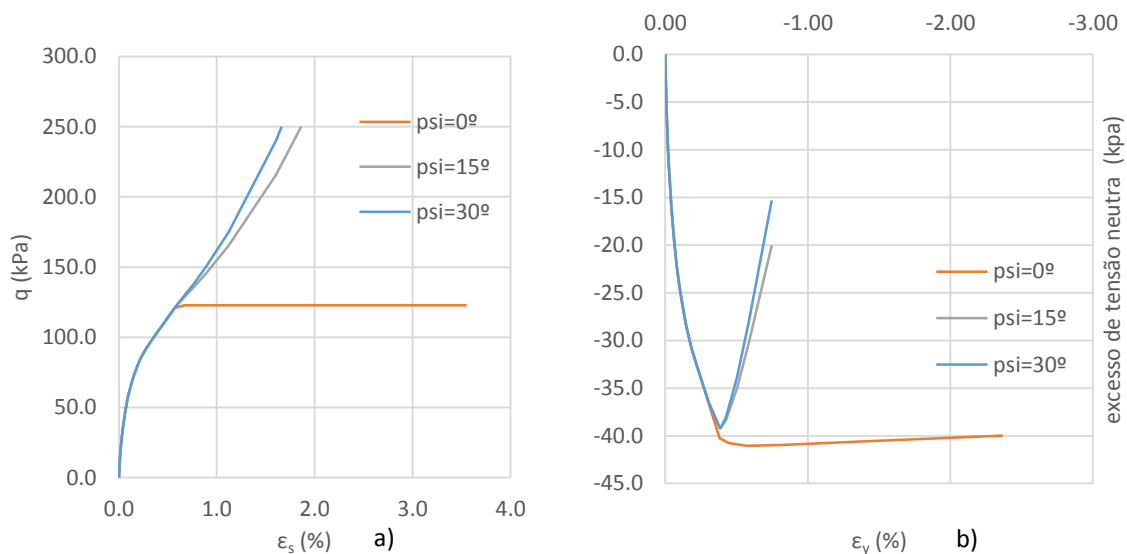


Figura 6.5 a) Relação entre deformação deviatórica e tensão b) Relação entre excesso de tensão neutra e deformação vertical (CU)

Assim, quando o ângulo de dilatância é maior que zero (o solo dilata), observa-se que a deformação de corte e tensão de corte, bem como a resistência ao corte não drenada aumentam indefinidamente. Este modelo falha em modelar o comportamento de solo real em que geralmente este dilata inicialmente perto da rotura mas para grandes deformações atinge uma condição de volume constante.

7. Conclusão

7.1. Considerações Finais

O principal propósito desta dissertação, a implementação e validação de modelos constitutivos do solo, foi alcançado através do desenvolvimento de dois modelos constitutivos do solo elásticos não-lineares para um programa de uso comercial (PLAXIS). Os objectivos definidos no início desta dissertação foram parcialmente alcançados, uma vez que não foi possível calibrar totalmente estes modelos com dados experimentais de ensaios laboratoriais e assim realizar uma comparação detalhada entre resultados de modelação numérica e resultados experimentais. Contudo, é possível afirmar que a modelação numérica e validação dos modelos constitutivos do solo bem como a acoplagem com um critério de rotura foi realizada com resultados satisfatórios para a versão do PLAXIS utilizada.

Adicionalmente, no decorrer da presente dissertação foi possível adquirir um conhecimento mais aprofundado do *software* PLAXIS, nomeadamente a forma como utiliza o Método de Newton-Raphson, os procedimentos de cada fase (*Staged Construction*, *Incremental Multipliers* e *Total Multipliers*) e como estes influenciam os resultados das modelações. No geral, para a fase de corte dos ensaios modelados, obtiveram-se melhores resultados com *Incremental Multipliers* e *Total Multipliers* devido à sua natureza incremental que favorece a formulação dos modelos, enquanto para a fase de consolidação recomenda-se *Staged Construction*, pois permite obter um valor final definido no início da fase. O utilizador necessita de aferir o objectivo da fase a criar de forma a escolher o procedimento adequado. De referir que existiram dificuldades iniciais com os resultados obtidos com o PLAXIS para o modelo K-G, designadamente a quantidade de pontos de informação ser escassa em zonas de variação rápida de rigidez e existir um erro considerável entre a solução modelada e a aproximada. Isto deve-se ao facto de não ser possível escolher o número e tamanho dos *steps* que o programa executa, sendo este processo automatizado. Além disso a versão utilizada do programa não está otimizada para modelos de solo elásticos não-lineares, uma vez que utiliza um esquema de integração de tensões para modelos elastoplásticos (com comportamento elástico linear). Desta forma, foi necessário o desenvolvimento de dois algoritmos de integração de tensões. Estes permitiram melhorar bastante os resultados dos ensaios laboratoriais simulados. O algoritmo que se concluiu possuir melhor desempenho para um número menor de ciclos foi o baseado no Método Modificado de Euler.

Em relação ao comportamento do modelo K-G, não foi possível acoplar verdadeiramente um modelo plástico (Modelo Mohr-Coulomb), devido à sua formulação que incorpora um critério de rotura de Mohr-Coulomb quando G é igual ou perto de zero. Como forma de contornar este constrangimento fixou-se o valor de G_{min} igual a 1 quando perto da rotura, e assim o programa só termina quando o número de *steps* total for atingido. Assim é possível simular um patamar de cedência, assumindo-se um valor de dilatância fixo de 0° . Sabe-se da literatura que este modelo constitutivo apresenta como limitação o facto de não conseguir incorporar dilatância negativa/positiva do solo, uma vez que se trata de um modelo elástico. Desta forma só há variação

da ε_{vol} se existir variação da tensão média, subestimando a deformação compressiva volumétrica (observável em gráficos $\varepsilon_v: \varepsilon_d$). Verificou-se que o modelo não possui uma forma expedita de obter parâmetros de entrada, sendo necessário correlacionar parâmetros entre si, o que se pode traduzir em simplificação excessiva e perda no refinamento da resposta quando comparada com a real. Alternativamente também é possível calibrar os parâmetros com ensaios de consolidação isotrópica e ensaios triaxiais drenados (onde se medem vários valores de G através das curvas de tensão-deformação), contudo é necessário um método de tentativa e erro, que não se revela muito atraente. De forma a validar o modelo foram realizados no PLAXIS ensaios triaxiais drenados e não drenados para diferentes tensões de confinamento com resultados satisfatórios.

Verificou-se ainda que o Modelo de Jardine apresenta um comportamento elástico altamente não-linear no espectro das pequenas deformações (1%) como é expectável, sendo que a partir deste valor assumem-se valores constantes para as relações $\frac{3G_t}{p'}$ e $\frac{K_t}{p'}$ e a rigidez passa a variar apenas com a tensão média. Para os vários ensaios realizados com diferentes tensões de confinamento constatou-se que os parâmetros da rigidez dependem da tensão de confinamento aplicada (tal como acontece num ensaio de solo real).

A obtenção dos parâmetros de entrada é expedita, apesar da quantidade requerida, uma vez que consiste em utilizar uma folha de cálculo com as duas equações de origem matemática e alterar os parâmetros de forma a ajustar as curvas teóricas às duas curvas de degradação da rigidez normalizada em função da deformação. Contudo é necessário equipamento laboratorial altamente especializado, com disponibilidade limitada.

Ainda no modelo de Jardine foi possível acoplar com sucesso um modelo plástico com critério de rotura de Mohr-Coulomb. Ao contrário do que aconteceu para o modelo K-G, já foi possível variar o ângulo de dilatância para valores de 0° , 15° e 30° , fixando-se o valor do ângulo de resistência ao corte em 30° . Assim foi possível simular situações com regra de fluxo associada e não-associada em condições drenadas e não drenadas, com resultados idênticos aos esperados teoricamente. Uma limitação do uso do modelo plástico Mohr-Coulomb é que, mesmo com condições não-associadas, onde é possível definir a razão entre deformação volumétrica e de corte, para um ângulo de dilatância diferente de zero, o modelo prevê um aumento de deformações volumétricas após rotura através de corte, um comportamento pouco realista. Uma forma de contornar este problema seria variar o valor do ângulo de dilatância, ψ , de acordo com a deformação deviatória plástica, ε_d^p , como sugerido por Potts (2001).

Apesar de ter sido necessário desenvolver dois algoritmos de integração das tensões como forma de melhorar a resposta do programa, demonstrou-se que é possível utilizar modelos de solos presentes na literatura mas pouco utilizados em programas comerciais, e implementá-los com sucesso num programa de elementos finitos. Esta característica pode ser vantajosa para qualquer utilizador, uma vez que se aumenta o nível de personalização numa simulação de um projecto, pois é possível seleccionar qual o modelo mais adequado, e permite compreender o comportamento do modelo em profundidade. Também possibilita ao utilizador ganhar um conhecimento mais aprofundado sobre os cálculos e procedimentos efectuados pelo programa PLAXIS.

7.2. Propostas de Desenvolvimentos Futuros

A seguinte dissertação efectuou uma resumida abordagem da potencialidade da modelação de solos definidos pelo utilizador no programa PLAXIS. Seguidamente são sumarizadas algumas propostas de desenvolvimentos futuros.

- É possível automatizar o cálculo de *ncycle* de forma eficiente tanto para o algoritmo de integração de tensões MME e ME. Existiu uma tentativa (não mencionada anteriormente) de o realizar na presente dissertação, todavia não foi possível alcançar resultados satisfatórios pelo que não foi incluído. Alternativamente, deveria desenvolver-se um algoritmo baseado num esquema de integração de Runge-Kutta de ordem superior, uma vez que é mais refinado e permite obter melhores resultados.
- É relevante efectuar uma comparação dos modelos K-G e Jardine com modelos utilizados frequentemente em software comercial, desde modelos linear elásticos perfeitamente plásticos (Modelo de Mohr-Coulomb), modelos baseados na mecânica dos solos dos estados críticos (Cam Clay, Cam Clay modificado), e não lineares elastoplásticos (*Hardening soil model* baseado na função hiperbólica de Duncan-Chang). Deve ser realizada uma análise do seu comportamento em diversos casos de estudo teóricos (sapata, túnel, parede de contenção, escavação, estacas) em condições drenadas e não drenadas. Os modelos escolhidos devem ser adaptados para o tipo de caso de estudo. Por exemplo, para um túnel ou escavação, onde é relevante uma análise ao estado limite de serviço, deverão ser utilizado modelos mais refinados e complexos, que permitem uma análise precisa da deformação.

Para o Modelo K-G:

- Calibração do modelo K-G para solos mais comuns em Portugal (aferir a que tipos de solos este é mais adequado através de ensaios laboratoriais. Teoricamente é possível ajustar as curvas, contudo Maranha das Neves (1990) refere dificuldade em modelar solos granulares com tendência a dilatar.)

Em relação ao Modelo de Jardine:

- Calibração do modelo de Jardine para solos mais comuns em Portugal (tanto solos coesivos como não-coesivo) através de ensaios triaxiais não-convencionais avançados onde seja possível medir no espectro das pequenas deformações, e consequente modelação numérica no PLAXIS dos ensaios. Deve ser realizada uma comparação de resultados.
- Como melhoramento do modelo deve ser considerado acoplamento do critério de Tresca em detrimento do critério de Mohr-Coulomb, de forma a modelar o comportamento não drenado de um solo. Recomenda-se a variação do ângulo de dilatância com a deformação deformativa plástica como referido acima.
- Uma das limitações mencionada na literatura é a de que este modelo não foi criado para lidar com comportamento do solo para grandes deformações. Assim, para além do modelo plástico de Mohr-Coulomb devem existir esforços no sentido de implementar um modelo plástico com leis de amolecimento e endurecimento.

Referências

- Abaqus. (2010). Abaqus 6.10 Analysis User's Manual.
- Abbo, A. J., & Sloan, S. W. (1995). Mohr-Coulomb yield criterion, *Computers & Structures*, 54(3), 427–441.
- Atkinson, K. (1989). An introduction to numerical analysis (2nd edition). University of Iowa. John Wiley & Sons, Inc.
- Azevedo, Á. F. M. (2003). Método dos elementos finitos. Engineering Computations. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Benz, T., & Nordal, S. (2010). Numerical methods in geotechnical engineering. Proceedings of the seventh *European conference on numerical methods in geotechnical engineering*. Trondheim, Norway.
- Benz, T., Schwab, R., & Vermeer, P. (2009). Small-strain stiffness in geotechnical analyses. *Bautechnik*, 89(Special Issue), 16–27. doi:10.1002/bate.200910038
- Brinkgreve, R. B. J., Broere, W., & Waterman, D. (2002). *Plaxis 2D - Version 8*. Plaxis B.V.
- Burland, J. B., Fourie, a. B., Potts, D. M., & Jardine, R. J. (1986). Studies of the influence of non-linear stress-strain characteristics in soil-structure interaction. *Géotechnique*, 36(3), 377–396. doi:10.1680/geot.1986.36.3.377
- Drucker D. C. & Prager W. (1952) Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Q Appl Mech*, 10(2), 157-164.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). Numerical methods for engineers. *Mathematics and Computers in Simulation*, 33(3), 260. doi:10.1016/0378-4754(91)90127-0
- Clayton, C. R. I. (2011). Stiffness at small strain: research and practice. *Géotechnique*, 61(1), 5–37. doi:10.1680/geot.2011.61.1.5
- Cogliati, B. (2011). Modelos Viscosos em Mecânica dos Solos: Análise de uma equação visco-hipoplástica. Dissertação de Mestrado em Engenharia Geotécnica. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. W. (2002). Concept and Applications of Finite Element Analysis (4th Edition). John Wiley & Sons, Inc.
- Gavel-solberg, V. (2014). Development and Implementation of Effective Stress Soil Models. Dissertação de Mestrado em Engenharia Geotécnica. Norwegian University of Science and Technology .
- Griffiths, D. V., & Willson, S. M. (1986). An explicit form of the plastic matrix for a Mohr-Coulomb material. *Communications in Applied Numerical Methods*, 2, 523–529.
- Holtz, R. D., & Kovacs, W. D. (1981). An Introduction to Geotechnical Engineering. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice Hall.
- Jardine, R. J., Burland, J. B., Fourie, a. B., & Potts, D. M. (1986). Studies of the influence of non-linear stress-strain characteristics in soil-structure interaction. *Géotechnique*, 36(3), 377–396. <http://doi.org/10.1680/geot.1986.36.3.377>

- Krabbenhøft, K. (2002). Basic Computational Plasticity. Department of Civil Engineering. Technical University of Denmark.
- Lade, P. V. (2005). Overview of Constitutive Models for Soils. *Calibration of Constitutive Models*, 1–34. Austin, Texas. [http://dx.doi.org/10.1061/40786\(165\)1](http://dx.doi.org/10.1061/40786(165)1)
- Maranha das Neves, E. (1990). Advances in Rockfill Structures. *NATO Science Series, volume 200*, Lisboa.
- Martins, P. C. C. (2008). Site-effect assessment using acceleration time series, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Faculdade de Ciências e Tecnologia Departamento de Engenharia Civil.
- Menétrey, P., & Willam, K. J. (1995). Triaxial Failure Criterion for Concrete and Its Generalization. *ACI Structural Journal*, 92(2), 311–318.
- Prager, W. (1949). Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *J. Appl. Physics*, 20, 235-241.
- Potts, D. M., & Ganendra, D. (1994). An evaluation of substepping and implicit stress point algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 119(3-4), 341–354.
- Potts, D., & Zdravkovic, L. (1999). Finite element analysis in geotechnical engineering. Technology. Thomas Telford.
- Potts, D., & Zdravkovic, L. (2001). Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: application. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. Thomas Telford Publishing. <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:No+Title#0>
- Puzrin, a. M., Addenbrooke, T. I., & Potts, D. M. (1997). The influence of pre-failure soil stiffness on the numerical analysis of tunnel construction. *Géotechnique*, 47(3), 693–712. <http://doi.org/10.1680/geot.1997.47.3.693>
- Roberts, A. (1977). Geotechnology. An Introductory Text for Students and Engineers. Elsevier Ltd, Pergamon Press.
- Schofield, A. N., & Wroth, C. P. (1968). Critical state soil mechanics. McGraw-Hill. http://people.seas.harvard.edu/~viesca/articles/Schofield_&_Wroth_CriticalStateSoilMechanics.pdf
- van Langen, H., & Vermeer, P. A. (1990). Automatic step size correction for non-associated plasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 579–598.
- Vermeer P.A. (1979). A modified initial strain method for plasticity problems. *Proc. 3rd Int. Conf. Meth. Geomech.* Balkema, Rotterdam, 377-387.

Anexos

Anexo A Código da subrotina *Usrmod* e subrotinas de apoio

Anexo B Código da subrotina *K-G*

Anexo B.1 Código de subrotina *K-G* com algoritmo ME

Anexo B.2 Código de subrotina *K-G* com algoritmo MME

Anexo C Código da subrotina *Jardine*

Anexo C.1 Código de subrotina *Jardine* com algoritmo MME

Anexo C.2 Código das subrotinas *MC*, *KGCalc* e *Deform*

A) Código da subrotina Usrmod e subrotinas de apoio

A.1) Código da subrotina *usrmod*

```
Subroutine User_Mod ( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, X, Y, Z,
Time0, dTime, Props, Sig0, Swp0, StVar0, dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ipl,
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep,iTang, iPrjDir, iPrjLen, iAbort )
```

```
Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
```

```
Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6),Sig(*), StVar(*),
iPrjDir(*)
```

```
Character*255 PrjDir, Dbg_Name
```

```
Data iounit / 0 /
```

```
Save iounit
```

```
include 'impexp'
```

```
If (iounit.Eq.0) Then
```

```
PrjDir=' '
```

```
Do i=1,iPrjLen
```

```
PrjDir(i:i) = Char( iPrjDir(i) )
```

```
End Do
```

```
Dbg_Name=PrjDir(:iPrjLen)//'udsmex'
```

```
nErr=0
```

```
1 Continue
```

```
Open( Unit= 1, File= Dbg_Name,iostat=ios)
```

```
If (ios.Eq.0) Close(Unit=1,Status='delete',iostat=ios)
```

```
If (ios.Ne.0) Then
```

```
nErr=nErr+1
```

```
dbg_name=PrjDir(:iPrjLen)//'udsmex'//char(48+nErr)
```

```
If (nErr.Lt.10) Goto 1
```

```
End If
```

```
Open( Unit= 1, File= Dbg_Name,blocksize=4096)
```

```
Write(1,*)'File 1 opened'
```

```
iounit = 1
```

```
Call WriVec(1,'Props',Props,100)
```

```
End If
```

```
Call WriIvl( -1, 'iounit',iounit )
```

```
Call WriIvl( -1, 'IDTask',IDTask )
```

```
Select Case (iMod)
```

```
Case (1) ! linelastic
```

```
Call linelastic ( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int,
```

```
* X, Y, Z, Time0, dTime,
```

```
* Props, Sig0, Swp0, StVar0,
```

```

*           dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ipl,
*           nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang,
*           iAbort )
Case (2)    ! K-G
    Call K_G ( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int,
*           X, Y, Z, Time0, dTime,
*           Props, Sig0, Swp0, StVar0,
*           dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ipl,
*           nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang,
*           iAbort )
Case (3)    ! Jardine
    Call Jardine( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int,
*           X, Y, Z, Time0, dTime,
*           Props, Sig0, Swp0, StVar0,
*           dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ipl,
*           nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang,
*           iAbort )
Case Default
    Write(1,*) 'invalid model number in UsrMod', iMod
    Write(1,*) 'IDTask: ',IDTask
    Stop 'invalid model number in UsrMod'
    iAbort=1
    Return
End Select ! iMod
If (IDTask .Eq. 5.And.iel+int.Eq.2) Then
    Write(1,*) 'nStat    : ',nStat
    Write(1,*) 'NonSym   : ',NonSym
    Write(1,*) 'StrsDep  : ',iStrsDep
    Write(1,*) 'TimeDep  : ',iTimeDep
    Write(1,*) 'Tangent  : ',iTang
End If
If (IDTask .Eq. 3.And.iel+int.Eq.2) Then
    Write(1,*) 'IDTask: ',IDTask,' iStep,iTer',iStep,iTer
    Call Flush(1)
End If
If (IDTask .Eq. 2.And.iel+int.Eq.2) Then
    Write(1,*) 'IDTask: ',IDTask,' iStep,iTer',iStep,iTer
    Call Flush(1)

```

```

End If
Call WriIvl( -1, 'IDTask end',IDTask )
Return
End ! User_Mod

include 'Jardine.for'
include 'linelastic.for'
include 'K_G.for'
include 'Deform.for'
include 'msg_erro.for'
include 'KGcalc.for'
include 'mc.for'
include 'usr_add.for'

```

B) Código da subrotina do modelo K-G, K_G

B.1) Código de subrotina K-G com algoritmo ME

```

Subroutine K_G ( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, X, Y, Z,
Time0, dTime, Props, Sig0, Swp0, StVar0, dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ipl,
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang,iAbort )

```

```

Implicit Double Precision (A-H, K, N, O-Z)

```

```

Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), Sig(*), StVar(*),
dEpsn(6), Sig0n(6)

```

```

!--- Local variables

```

```

Dimension dSig(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), prs(3), prs_E(3)

```

```

Data Pi/3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399d0/

```

```

io=0

```

```

If (iEl.Eq.1 .And. Int.Eq.1) io=1

```

```

nStatV = 0

```

```

If (IDTask .Eq. 1) then ! Initialize state variables

```

```

    Call MZeroR( StVar0, nStatV)

```

```

    Call MZeroR( StVar, nStatV)

```

```

    Rad = 180d0 / Pi

```

```

    Ki = Props (1)

```

```

    Gi = Props (2)

```

```

    alphaK = Props (3)

```

```

    phi = Props (4) / Rad !phi in rads

```

```

    c = Props (5)

```

```

    psi = Props (6) / Rad

```

```

    ncycle = Props (7)

```

```

    betaG = - (Gi/(2.0*c*DCOS(phi)))

```



```

    alphaG = 2*DSIN(phi)*(- betaG)
    sPhi = Sin(phi)
    sPsi = Sin(Psi)
    cCosPhi = c*Cos(phi)
    Props (8) = alphaG
    Props (9) = betaG
    Props (10) = sPhi
    Props (11) = sPsi
    Props (12) = cCosPhi
If (alphaK.Lt.0) Then
    Call OK_MessageBox(' Invalid value for "alphak" ')
    iAbort = 1
Return
    End If
If (alphaG.Lt.0) Then
    Call OK_MessageBox(' Invalid value for "alphaG" ')
    iAbort = 1
    Return
End If
If (betaG.Gt.0) Then
    Call OK_MessageBox(' Invalid value for "betaG" ')
    iAbort = 1
    Return
End If
If (Gi.Eq.0) Then
    Call OK_MessageBox(' Invalid value for "Gi" ')
    iAbort = 1
    Return
End If
If (psi.Eq.0) Then
    Call OK_MessageBox(' Invalid value for "psi" ')
    iAbort = 1
    Return
End If
If (ncycle.Eq.0) Then
    Call OK_MessageBox(' Invalid value for "ncycle" ')
    iAbort = 1
    Return

```

```

End If

Call WriVal( io, 'Phi', phi)
Call WriVal( io, 'psi', psi)
Call WriVal( io, 'alphaG', alphaG)
Call WriVal( io, 'alphaK', alphaK)
Call WriVal( io, 'betaG', betaG)
Call WriVal( io, 'Ki', Ki)
Call WriVal( io, 'ncycle', ncycle)
Call WriVec( io, 'Props', Props, 12)
Call WriVal( io, 'sPhi', sPhi)
Call WriVal( io, 'sPsi', sPsi)
Call WriVal( io, 'cCosPhi', cCosPhi)
Call WriVec( io, 'Props', Props, 12)
end If !id task 1

If (IDTask .Eq. 2) then !stress calculation
    ipl = 1
    Rad = 180d0 / Pi
    Ki = Props (1)
    Gi = Props (2)
    alphaK = Props (3)
    phi = Props (4) / Rad !phi in rads
    c = Props (5)
    Psi = Props (6) / Rad
    ncycle = Props (7)
    alphaG = Props (8)
    betaG = Props (9)
    sPhi = Props (10)
    sPsi = Props (11)
    cCosPhi = Props (12)

    n= 1
    nf = ncycle
    Do i=1, 6
        dEpsn(i) = dEps(i)/nf
        Sig0n(i) = Sig0(i)
    End do
    Call WriVec (io, 'dEps', dEps, 6)

```

```

Do while (n.lt.nf .or. n.eq.nf) !initialize cycle
  iOpt = 1 ! calculate principal stresses and directions
Call PrnSig(iOpt, Sig, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
  prs(1) = - S1 ! minus sign
  prs(2) = - S2
  prs(3) = - S3

!remember that -S1<-S2<-S3, S1 is the largest compressive stress and
S3 the smallest compressive stress
Call WriVec( io, 'Principal stresses', prs, 3)
sigmed = DABS(( prs(1)+prs(3))/2.0)
sigdev = DABS(prs(1)-prs(3))
Call WriVal( io, 'sigmedio', sigmed)
Call WriVal( io, 'sigdev', sigdev)
K = Ki + DABS(alphaK*sigmed)
G = Gi + (alphaG * sigmed) + (betaG * sigdev)
Call WriVal( io, 'K', K)
Call WriVal( io, 'G', G)
If (G.Lt.1.0) Then
  G = 1.0
End If

If (IsUndr.Eq.1) Then !undrained switch
  dEpsV = dEpsn(1) + dEpsn(2) + dEpsn(3) !dEpsn
  dSwp = BulkW * dEpsV
  Swp = Swp0 + dSwp
Else
  Swp = Swp0
End If

!Fill elastic matrix
Term1 = K + ((4.0*G)/3.0)
Term2 = K - ((2.0*G)/3.0)
Call MzeroR( D, 36)

Do i =1,3
  Do j =1, 3
    D(i, j) = Term2
  End do
  D (i, i) = Term1
  D(i+3,i+3) = G
End Do

```

```

Call WriMat ( io, 'D_Usr', D, 6, 6, 6 )
Call MatVec( D, 6, dEpsn, 6, dSig
Call AddVec( Sig0n, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig
Do i=1, 6
    Sig0n(i)= Sig(i)
end do

Call WriVec (io, 'Sig', Sig, 6)
Call WriVec (io, 'dEpsn', dEpsn, 6) !dEpsn
Call WriVec (io, 'dSig', dSig, 6) !write dSig
Call WriVec (io, 'Sig0', Sig0, 6)
n = n + 1
End do !n cycle
End if !id task 2

If (IDTask .Eq. 3 .OR. IDTask .Eq. 6) Then !create effective material
stiffness matrix D

Rad = 180d0 / Pi
Ki = Props (1)
Gi = Props (2)
xNu = 0.35
K = 10 * Ki
E = K * 3.0 * (1- (2 * xNu))
G = E/ (2*(1 + xNu))
Call WriVal( io, 'K3', K)
Call WriVal( io, 'G3', G)
If (G.Lt.0) Then
    Call OK_MessageBox('G less than zero (idtask3)')
    iAbort = 1
Return
End If

Term1 = K + ((4.0*G)/3.0)
Term2 = K - ((2.0*G)/3.0)
Call MzeroR( D, 36)

Do i =1,3
    Do j =1, 3
        D(i, j) = Term2
    End do
    D (i, i) = Term1

```

```

        D(i+3,i+3) = G
    End Do

    BulkW = 0

    If (IsUndr.Eq.1) then !if undrained
        xNuU = 0.495d0 !undrained poisson ratio
        F=(1+xNuU)/(1-2.0*xNuU) - (1+xNu)/(1-2.0*xNu)
        F=2.0*G/3.0 * F
        BulkW = F
    end If

end if !idtask 3

If (IDTask .Eq. 4) then !number of state parameters
    nStat= nStatV
end if !idtask=4

If (IDTask .Eq. 5) then !matrix type
    NonSym = 0
    iStrsDep = 0
    iTang = 0
    iTimeDep = 0
end if !idtask=5

return

end !end of modelo K_G

```

B.2) Código de subrotina K-G com algoritmo MME (IDTask =2)

```

If (IDTask .Eq. 2) then !stress calculation
    ipl = 1 !forces MNR
    Rad = 180d0 / Pi
    Ki = Props (1)
    Gi = Props (2)
    alphaK = Props (3)
    phi = Props (4) / Rad !phi in rads
    c = Props (5)
    ncycle = Props (8)
    betaG = - (Gi/(2.0*c*DCOS(phi)))
    alphaG = 2*DSIN(phi)*(- betaG)
    Props (6) = alphaG
    Props (7) = betaG
    Call CopyRVec( StVar0, StVar, nStatV )

```

```

n= 1
nf = ncycle
Do i=1, 6
    dEpsn(i) = dEps(i)/nf
    Sig0n(i) = Sig0(i)
End do

Call WriVec (io, 'dEps', dEps, 6)
Do while (n.lt.nf .or. n.eq.nf) !initialize cycle
iOpt = 1
    Call PrnSig(iOpt, Sig, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
    prs(1) = - S1 ! minus sign
    prs(2) = - S2
    prs(3) = - S3
Call WriVec( io, 'Principal stresses', prs, 3)
sigmed = DABS(( prs(1)+prs(3))/2.0)
sigdev = DABS(prs(1)-prs(3))
Call WriVal( io, 'sigmedio', sigmed)
Call WriVal( io, 'sigdev', sigdev)
K = Ki + DABS(alphaK*sigmed)      !at start of the sub-step
G = Gi + (alphaG * sigmed) + (betaG * sigdev)
Call WriVal( io, 'K', K)
Call WriVal( io, 'G', G)
If (G.Lt.1) Then
    Call OK_MessageBox('G less than zero (idtask2)')
    iAbort = 1
    Return
End If
If (IsUndr.Eq.1) Then
    dEpsV = dEpsn(1) + dEpsn(2) + dEpsn(3) !dEpsn
    dSwp = BulkW * dEpsV
    Swp = Swp0 + dSwp
Else
    Swp = Swp0
End If

Term1 = K + ((4.0*G)/3.0) !Fill elastic matrix

```

```

Term2 = K - ((2.0*G)/3.0)
Call MzeroR( Dn, 36)
Do i =1,3
    Do j =1, 3
        Dn(i, j) = Term2
    End do
    Dn (i, i) = Term1
    Dn(i+3,i+3) = G
End Do
If (iEl+Int+iter.Eq.3 .And. iStep.Lt.10) Then
    Call WriMat ( io, 'D_Usr', Dn, 6, 6, 6 )
End if
Do i=1, 6
    dEpsnmid(i)=dEpsn(i)/2
End do
Call MatVec( Dn, 6, dEpsnmid, 6, dSigmid)
Call AddVec( Sig0n, dSigmid, 1d0, 1d0, 6, Sigmid )
Call PrnSig(iOpt, Sigmid, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
    prs(1) = - S1 !principal stresses at mid point
    prs(2) = - S2
    prs(3) = - S3
Call WriVec( io, 'Principal stresses', prs, 3)
sigmed = DABS(( prs(1)+prs(3))/2.0)
sigdev = DABS(prs(1)-prs(3))
Call WriVal( io, 'sigmedio', sigmed)
Call WriVal( io, 'sigdev', sigdev)
K = Ki + DABS(alphaK*sigmed) !at mid point
G = Gi + (alphaG * sigmed) + (betaG * sigdev)
Call WriVal( io, 'K', K)
Call WriVal( io, 'G', G)
If (G.Lt.1) Then
    Call OK_MessageBox('G less than zero (idtask2)')
    iAbort = 1
Return
End If
If (IsUndr.Eq.1) Then
    dEpsV = dEpsn(1) + dEpsn(2) + dEpsn(3) !dEpsn
    dSwp = BulkW * dEpsV

```

```

        Swp = Swp0 + dSwp
    Else
        Swp = Swp0
    End If

    Term1 = K + ((4.0*G)/3.0) !Fill elastic matrix for mid point
    Term2 = K - ((2.0*G)/3.0)
    Call MzeroR( Dmid, 36)
    Do i =1,3
        Do j =1, 3
            Dmid(i, j) = Term2
        End do
        Dmid (i, i) = Term1
        Dmid(i+3,i+3) = G
    End Do

    Call MatVec( Dmid, 6, dEpsn, 6, dSig)
    Call AddVec( Sig0n, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig )
    Do i=1, 6
        Sig0n(i)= Sig(i)
    end do

    Call WriVec (io, 'Sig', Sig, 6)
    Call WriVec (io, 'dEpsn', dEpsn, 6) !dEpsn
    Call WriVec (io, 'dSig', dSig, 6) !write dSig
    Call WriVec (io, 'Sig0', Sig0, 6)

    n = n + 1
    End do !n cycle

    End if !id task 2

```

C) Código da subrotina Jardine

C.1)Código de subrotina Jardine com algoritmo MME

```

Subroutine Jardine ( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, X, Y, Z,
Time0, dTime, Props, Sig0, Swp0, StVar0, dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ipl,
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang,iAbort )

```

```

    Implicit Double Precision (A-H, K, O-Z)
    Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), Sig(*),StVar(*)
!--- Local variables!
    Dimension dSig(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), Eps0(6), prs(3)
!para o explicit modified euler
    Dimension dEpsn(6), Sig0n(6), StVar0n(6) !ciclo
    Dimension Dn(6,6), dEpsnmid(6), dSigmid(6), Sigmid(6) !mod euler

```



```

Dimension Dmid(6,6) !mod euler
Data Pi/3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399d0/
io=0
If (iEl.Eq.1 .And. Int.Eq.1) io=1
    nStatV = 6
If (IDTask .Eq. 1) then ! Initialize state variables
    Rad = 180d0 / Pi
    A = Props (1)
    B = Props (2)
    C = Props (3) !*10^(-3)%
    C1 = C/(1000*100)
    R = Props (4)
    S = Props (5)
    T = Props (6) !*10^(-3)%
    T1 = T/(1000*100)
    alpha = Props (7)
    gamma = Props (8)
    delta = Props (9)
    eta = Props (10)
    Evmax = Props (11) !*10^(-3)%
    Evmax1 = Evmax/(1000*100)
    Evmin = Props (12) !*10^(-3)%
    Evmin1 = Evmin/(1000*10)
    Edmax = Props (13) !*10^(-3)%
    Edmax1 = Edmax/(1000*100)
    Edmin = Props (14) !*10^(-3)%
    Edmin1= Edmin/(1000*100)
    Gnorm = Props (15)
    Knorm= Props (16)
    ncycle = Props (17)
    Call msg_erro (Props)
    Call WriVal( io, 'C1',C1)
Call WriVal( io, 'T1',T1)
    Call WriVal( io, 'Evmax1', Evmax1)
    Call WriVal( io, 'Evmin1', Evmin1)
    Call WriVal( io, 'Edmax1', Edmax1)
    Call WriVal( io, 'Edmin1', Edmin1)
    Call WriVec( io, 'Props', Props, 22)

```

```

end If !id task 1

If (IDTask .Eq. 2) then
    ipl = 1
    Evmax = Props (11) !*10^(-3)%
    Evmax1 = Evmax/(1000*100) !Valor absoluto
    Evmin = Props (12) !*10^(-3)%
    Evmin1 = Evmin/(1000*10) !Valor absoluto
    Edmax = Props (13) !*10^(-3)%
    Edmax1 = Edmax/(1000*100) !Valor absoluto
    Edmin = Props (14) !*10^(-3)%
    Edmin1 = Edmin/(1000*100) !Valor absoluto
    If (IsUndr.Eq.1) Then
        dEpsV = dEps(1) + dEps(2) + dEps(3)
        dSwp = BulkW * dEpsV
        Swp = Swp0 + dSwp
    Else
        Swp = Swp0
    End If

    n= 1 !inicializar o ciclo
    nf = ncycle
    Do i=1, 6
        dEpsn(i) = dEps(i)/nf
        Sig0n(i) = Sig0(i)
        StVar0n(i) = StVar0(i)
    End do

    Do while (n.lt.nf .or. n.eq.nf)
do i = 1, 6
        Eps0(i) = StVar0n(i)
    end do

    Call WriVec( io, 'Stvar0', StVar0, 6)
    Call WriVec( io, 'Stvar', StVar, 6)
    Call WriVec( io, 'Eps0', Eps0, 6)
    Call WriVec( io, 'dEps', dEps, 6)
    Call WriVec(io, 'dEpsn', dEpsn, 6)
    Call Deform (Eps0, Ed0, Ev0)
    Call WriVal( io, 'Ed0', Ed0)
    Call WriVal( io, 'Ev0', Ev0)

```

```

If (Ed0.lt. Edmin1) then
    Ed0 = Edmin1
end if
If (Ed0.gt.Edmax1) then
    Ed0 = Edmax1
end if
If (Ev0.lt. Evmin1) then
    Ev0 = Evmin1
end if
If (Ev0.gt.Evmax1) then
    Ev0 = Evmax1
end if
Call WriVal( io, 'Ed0', Ed0)
Call WriVal( io, 'Ev0', Ev0)
Call PrnSig(iOpt, Sig, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Call WriVal( io, 'p', P)

```

```

If (P.gt. -1.0) then
    P = -1.0
end if !condiçao para p >-1 ->p=-1kPa
Call WriVal( io, 'p', P)
X = DLog10(DABS(Ed0)/(C1*1.732050808))
Y = DLog10(DABS(Ev0)/T1)
Call WriVal( io, 'X', X)
Call WriVal( io, 'Y', Y)
Call KGcalc (Props, X, Y, P, K, G)
Call WriVal( io, 'G0', G)
Call WriVal( io, 'K0', K)
xNu = (3.0*K - 2.0*G)/(2.0*(3.0*K + 1.0*G))
Call WriVal( io, 'xNu', xNu) !controlo do xNu
Term1 = K + ((4*G)/3) !preencher matriz n-elastica
Term2 = K - ((2*G)/3)
Call MzeroR( Dn, 36)
Do i =1,3
    Do j =1, 3
        Dn(i, j) = Term2
    End do
    Dn(i, i) = Term1
    Dn(i+3,i+3) = G

```

```

end do
Call WriMat ( io, 'Dnaoelastica', Dn, 6, 6, 6 )
Do i=1, 6
    dEpsnmid(i) = dEpsn(i)/2
End do !midpoint
Call MatVec( Dn, 6, dEpsnmid, 6, dSigmid
Call AddVec( Sig0n, dSigmid, 1d0, 1d0, 6, Sigmid)
Call PrnSig(iOpt, Sigmid, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Call WriVal( io, 'pmid', P)
    If (P.gt. -1.0) then
        P = -1.0
    end if !condiçao para p >-1 ->p=-1kPa
Call WriVal( io, 'pmid', P)
X = DLog10(DABS(Ed0)/(C1*1.732050808))
Y = DLog10(DABS(Ev0)/T1)
Call WriVal( io, 'Xmid', X)
Call WriVal( io, 'Ymid', Y)
Call KGcalc (Props, X, Y, P, K, G)
Call WriVal( io, 'Gmid', G)
Call WriVal( io, 'Kmid', K)
xNu = (3.0*K - 2.0*G)/(2.0*(3.0*K + 1.0*G))
Call WriVal( io, 'xNumid', xNu) !controlo do xNu
Term1 = K + ((4*G)/3) !preencher matriz n-elastica
Term2 = K - ((2*G)/3)
Call MzeroR( Dmid, 36)
Do i =1,3
    Do j =1, 3
        Dmid (i, j) = Term2
    End do
    Dmid (i, i) = Term1
    Dmid (i+3,i+3) = G
end do
Call WriMat ( io, 'Dmid', Dmid, 6, 6, 6 )
Call MatVec( Dmid, 6, dEpsn, 6, dSig)
Call AddVec( Sig0n, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig)
Do i=1, 6
    Sig0n(i)= Sig(i)
    StVar0n(i) = StVar0n(i) + dEpsn(i)

```

```

end do
n = n + 1
End do !n cycle
Do i=1, 6
    StVar(i) = StVar0(i) + dEps(i) !fora do ciclo
end do
end if !id task 2

If (IDTask .Eq. 3 .OR. IDTask .Eq. 6) Then
    Gnorm = Props (15)
    Knorm = Props (16)
    Call PrnSig(iOpt, Sig, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
    Call WriVal(io, 'p3', P)
    Gmax = -Gnorm * (P/3.0)
    Kmax = -Knorm * P
    Call WriVal( io, 'Gmax', Gmax)
    Call WriVal( io, 'Kmax', Kmax)
    Term1 = Kmax + ((4*Gmax)/3)
    Term2 = Kmax - ((2*Gmax)/3)
    Call MzeroR( D, 36)
    Do i =1,3
        Do j =1, 3
            D(i, j) = Term2
        End do
        D (i, i) = Term1
        D(i+3,i+3) = Gmax
    end do
    BulkW = 0
    If (IsUndr.Eq.1) then !undrained
        xNu = (3.0*K - 2.0*G)/(2.0*(3.0*K + 1.0*G))
        xNu_U = 0.495d0 !coeficiente de poisson nao drenado
        F=(1+xNu_U)/(1-2*xNu_U) - (1+xNu)/(1-2*xNu)
        F=2D0*G/3D0 * F
        BulkW = F
    end If
end if !idtask=3

If (IDTask .Eq. 4) then !number of state parameters

```

```

        nStat= nStatV
    end if !idtask=4

    If (IDTask .Eq. 5) then !matrix type
        NonSym = 0
        iStrsDep = 1
        iTang = 0
        iTimeDep = 0
    end if !idtask=5

    return

end !modelo jardine

```

C.2) Código da subrotina das subrotinas *mc*, *KGCalc* e *Deform*

i) *Mc*

```

Subroutine mc( IArea, G, xNu, sPhi, sPsi, cCosPhi, Prs_E, Prs, ipl, io)
    Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

! Routine to solve stresses according to Coulomb / tension criterion
! Caution : compression positive
!     Sig = Sig^E - xLamM * DdGmdS
!     f_m = f_m^e - xLamM * a_mm
!     I/O Type

! iArea   I   I   : 1 : Triax compression corner      Sig1 > Sig2 = Sig3
!           : 2 : Regular yield surface              Sig1 > Sig2 > Sig3
!           : 3 : Triax extension                    Sig1 = Sig2 > Sig3

! G       I   R   : Shear modulus

! xNu     I   R   : Poisson's ratio

! sPhi    I   R   : Sine of friction angle

! sPsi    I   R   : Sine of dilation angle

! cCosPhi I   R   : Cohesion * Cos(phi)

! Prs_E   I   R(3) : Elastic principal stresses   Sig1E >= Sig2E >= Sig3E
! Prs     O   R(3) : Resulting principal stresses

! ipl     O   I   : Plasticity indicator

!           : 0 : elastic
!           : 1 : Coulomb surface

! Local:

! fme, fm : Value of yield functions m=Coulomb, e=elastic

! xLamM   : Plastic multipliers

! DdG#dS(3) : Elastic D matrix times derivative of plastic potential

! PrsE(3) : Copy of Prs_E with possible correction for corners

    Dimension Prs_E(3), Prs(3)

```

```

Dimension DdGmdS(3), PrsE(3)
integer(4) :: ipl
Do i=1,3
  PrsE(i) = Prs_E(i)
  Prs (i) = Prs_E(i)
End Do
ipl = 1
xLamM = 0
fm=-1
Select Case (IArea)
  Case (1) ! Triax compression ! Sig1 > Sig2 = Sig3
    ! first correct sig2=sig3
    PrsE(2) = (Prs_E(2) + Prs_E(3) ) / 2
    PrsE(3) = PrsE(2)
    Prs (2) = PrsE(2)
    Prs (3) = PrsE(3)
    fme = ( 2*PrsE(1) - PrsE(2) - PrsE(3) ) / 4
*      -( 2*PrsE(1) + PrsE(2) + PrsE(3) ) / 4 * sPhi - cCosPhi
    If (fme.Lt.-1d-6) Goto 999 ! Return elastic
    DdGmdS(1) = G/(1-2*xNu)/2 * ( 2*(1-2*xNu)  -(2      ) *sPsi )
    DdGmdS(2) = G/(1-2*xNu)/2 * ( - (1-2*xNu)  -(1+2*xNu)*sPsi )
    DdGmdS(3) = G/(1-2*xNu)/2 * ( - (1-2*xNu)  -(1+2*xNu)*sPsi )
    amm =G/4 * (3  - sPsi - sPhi + sPhi*sPsi*(3+2*xNu)/(1-2*xNu) )
    xLamM = fme / amm ! assume only coulomb surface

    ! Calculate stresses Prs = Prs - xLamM*DdGmdS
    Call AddVec( PrsE, DdGmdS, 1d0, -xLamM, 3, Prs )
    ipl = 2 ! Coulomb
    Call WriVal (io, 'ipl no mc', ipl)
    Goto 999 ! Return

  Case (2) ! Regular
    fme=(PrsE(1)-PrsE(3))/2-(PrsE(1)+PrsE(3))*0.5*sPhi-cCosPhi
    Call WriVal (io, 'Fme,case2', fme)
    Call WriVec (io, 'prse, case 2', PrsE, 3)
    Call WriVal (io, 'sphi,case 2', sPhi)
    Call WriVal (io, 'spSi, case 2', sPsi)

```

```

If (fme.lt.-1d-6) Goto 999 ! Return elastic
DdGmdS(1) = G/(1-2*xNu) * ( 1-2*xNu - sPsi )
DdGmdS(2) = G/(1-2*xNu) * ( -2*xNu*sPsi )
DdGmdS(3) = G/(1-2*xNu) * (-1+2*xNu - sPsi )
amm = G * ( 1 + sPhi*sPsi/(1-2*xNu) )
xLamM = fme / amm
! Prs = PrsE - xLamM * DdGmdS
  Call AddVec( PrsE, DdGmdS, 1d0, -xLamM, 3, Prs )
  ipl = 2! Coulomb
  Call WriVal (io, 'ipl no mc', ipl)
  Goto 999 ! Return

Case (3) ! Triax extension
  ! first correct sig1=sig2
  PrsE(2) = (Prs_E(1) + Prs_E(2) ) / 2
  PrsE(1) = PrsE(2)
  Prs (1) = PrsE(1)
  Prs (2) = PrsE(2)

  fme = ( PrsE(1) + PrsE(2) - 2*PrsE(3) ) / 4
*   -( PrsE(1) + PrsE(2) + 2*PrsE(3) ) / 4 * sPhi - cCosPhi

If (fme.lt.-1d-6) Goto 999 ! Return elastic
DdGmds(1) = G/(1-2*xNu)/2 * ( (1-2*xNu) - (1+2*xNu)*sPsi )
DdGmds(2) = G/(1-2*xNu)/2 * ( (1-2*xNu) - (1+2*xNu)*sPsi )
DdGmds(3) = G/(1-2*xNu)/2 * (-2*(1-2*xNu) - (2) ) * sPsi )
amm =G/4 * (3 + sPsi + sPhi + sPhi*sPsi*(3+2*xNu)/(1-2*xNu) )
xLamM = fme / amm
! Prs = PrsE - xLamM * DdGmdS
  Call AddVec( PrsE, DdGmdS, 1d0, -xLamM, 3, Prs )
  ipl = 2 ! Coulomb
  Call WriVal (io, 'ipl no mc', ipl)
  Goto 999 ! Return

End Select

999 Continue
Return

End ! MC

ii) KG_CALC
Subroutine KGcalc (A, B, gamma, alpha,X, Y, K, G, R, S, delta, eta)

```


Implicit Double Precision (A-H, O-Z)

```
partel = A + B * DCos(dble(alpha * (X**gamma)))
parte2 = B * alpha * gamma * (X**(gamma-1.0))
parte3 = DSin(dble(alpha * (X**(gamma))))
parte4 = (1.0/2.303)
G = - P * (partel - (parte2 * parte3) * (parte4))/3.0
Call WriVal( io, 'G0', G)
parte5 = R + S * DCos(dble(delta * (Y**eta)))
parte6 = S * delta * eta * (Y**(eta-1.0))
parte7 = DSin(dble(delta * (Y**(eta))))
parte8 = (1.0/2.303)
K = - P * (parte5 - (parte6 * parte7) * (parte8))
Call WriVal( io, 'K0', K)
```

iii) Deform

Subroutine Deform (Eps0, Ed0, Ev0)

Implicit Double Precision (A-H, O-Z)

Dimension Eps0(*)

Call WriVec(io, 'Eps0defor', Eps0, 6) !volumetric strain

Ev01 = (Eps0(1) + Eps0(2) + Eps0(3)) !small strain hypothesis

Ev0 = ABS(Eps0(1) + Eps0(2) + Eps0(3))

comp1 = (Eps0(1) - ((Ev01)/3.0))**2.0

comp2 = (Eps0(2) - ((Ev01)/3.0))**2.0

comp3 = (Eps0(3) - ((Ev01)/3.0))**2.0

comp4 = 0.5 * Eps0(4)**2.0

comp5 = 0.5 * Eps0(5)**2.0

comp6 = 0.5 * Eps0(6)**2.0

t1 = (2.0)*(comp1 + comp2 + comp3 + comp4 + comp5 + comp6)

Ed0 = dsqrt(dble(t1))

return

end subroutine