

Efeitos geometricamente não-lineares em pórticos metálicos

Ricardo Mendes Nogueira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Civil

Orientadores: Professor Francisco Baptista Esteves Virtuoso

Professor Ricardo José de Figueiredo Mendes Vieira

Júri

Presidente: Prof. José Joaquim Costa Branco de Oliveira Pedro

Orientadores: Prof. Ricardo José de Figueiredo Mendes Vieira

Vogal: Prof. Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Dezembro 2015

Agradecimentos

Gostaria de assinalar o meu agradecimento aos meus professores e orientadores Francisco Virtuoso e Ricardo Vieira pela sua contribuição para o aperfeiçoamento do conteúdo deste trabalho.

Não poderia deixar de também agradecer à minha família, namorada e amigos pelo apoio que me proporcionaram, sem os quais não seria possível obter os resultados académicos que consegui.

Resumo

A presente dissertação de mestrado tem como objectivo estudar a influência dos efeitos geometricamente não-lineares no comportamento de estruturas metálicas através de um modelo numérico de elementos finitos desenvolvido para o efeito. No contexto da verificação de segurança de estruturas metálicas (vigas-coluna e pórticos) os resultados obtidos do modelo foram comparados com os resultados que se obtêm por aplicação das disposições regulamentares do Eurocódigo 3.

No estudo desenvolvido são efectuadas análises elásticas-lineares, análises lineares de estabilidade e análises de 2ª ordem geometricamente não-lineares, pelo que se apresenta uma breve formulação teórica do modelo, apresentando-se os respectivos fundamentos e conceitos implícitos.

Nas análises efectuadas foram modelos de elementos finitos que permitiram efectuar análises elásticas-lineares de vigas e colunas e análises geometricamente não-lineares de vigas-coluna (através de matriz rigidez geométrica e/ou matriz de rigidez total). A dedução das matrizes de rigidez de cada elemento é efectuada aplicando o método de Rayleigh-Ritz.

No estudo de vigas-coluna foram considerados o caso de uma viga-coluna simplesmente apoiada e uma viga contínua de 3 tramos iguais, tendo sido efectuado um conjunto de análises que permitiu observar como o respectivo comportamento estrutural é influenciado quer pelas imperfeições quer pelos carregamentos aplicados. Os resultados foram comparados com as curvas de interacção indicadas no Eurocódigo 3.

No estudo dos pórticos é efectuada uma análise da influência das imperfeições globais e locais no comportamento global, tendo os resultados obtidos através das análises de segunda ordem sido comparados com aqueles que se obtêm por aplicação do Método da Amplificação dos Efeitos de “Sway”.

Ainda no âmbito do estudo de pórticos é estudada a influência do contraventamento no comportamento global do pórtico, analisando-se como a imperfeição local e a rigidez das barras de contraventamento podem alterar o comportamento global do pórtico. É também estudado o efeito da variação da rigidez do contraventamento na configuração dos modos de instabilidade do pórtico e das respectivas cargas críticas.

Palavras-chave: *Efeitos geometricamente não-lineares em vigas-coluna; Análise de estabilidade de vigas-coluna; Verificação de segurança de pórticos e vigas-coluna; Influência das imperfeições geométricas.*

Abstract

The present master's dissertation aims to study the influence of geometrically non-linear effects on steel structures behaviour, by a finite element model programmed for the effect. On the context of the safety verification of beam and frames, the obtained results by the developed model were compared with similar results obtained through the application of Eurocode 3.

In the developed study are performed linear-elastic analysis, linear stability analysis and 2nd order geometrically non-linear analysis, so it is presented a brief theoretical formulation of the model, presenting the implicit concepts and fundamentals.

In the performed analysis, was through a finite elements model formulation which allow to make linear-elastic analysis of beam and columns and geometrical non-linear analysis of beam-columns. The deduction of the stiffness matrices of each element is done applying the energetic method of Rayleigh-Ritz.

On the case studies of beam-column structures it was considered a beam column doubly pinned and a beam-column with 3 equal spans for which was done a set of analysis which allowed observe how the structural behaviour is influenced by geometrical imperfections and applied loads, comparing obtained results with the interaction formulas provided by Eurocode 3.

In frames case studies it is analysed the influence of local and global imperfections on the global structural behaviour comparing results with the Amplified "Sway" Method, being the obtained results through the developed non-linear second order analysis compared with results obtained by application of the Amplification of the Sway Effects Method.

For frames with bracing system is studied the influence of local imperfections and the stiffness of bracing bar's on the global frame behaviour, analysing how affected is the global structural behaviour. It is also studied the effect of the variation of the bracing system's stiffness on the instability modes and respective critical loads.

Keywords: *Geometrical non-linear effects in beam-columns; Stability analysis of beam-columns; Safety verification of frames and beam-columns; Influence of geometrical imperfections.*

Índice

Agradecimentos.....	i
Resumo	iii
Abstract.....	v
Índice	vii
Índice de Tabelas	ix
Índice de Figuras	xi
Nomenclatura	xv
1. Introdução	1
1.1. Enquadramento	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Organização da dissertação.....	2
2. Análises, conceitos e formulação do modelo numérico.....	5
2.1. Introdução.....	5
2.2. Método dos elementos finitos.....	5
2.3. Análise elástica-linear.....	6
2.4. Análises geometricamente não-lineares	13
2.4.1. Análise de 1ª ordem geometricamente não-linear	13
2.4.2. Análise de 2ª ordem elástica geometricamente não-linear	20
2.5. Integração numérica.....	24
2.6. Algoritmo computacional	24
2.6.1. Introdução de dados.....	25
2.6.2. Análise de estruturas.....	26
2.6.3. Rotinas de cálculo	28
3. Disposições regulamentares (EN1993-1-1).....	31
3.1. Análises globais.....	31
3.2. Imperfeições geométricas	32
3.3. Verificação da segurança ao Estado Limite Último de Encurvadura	33
3.3.1. Elementos uniformes em compressão	33
3.3.2. Vigas-coluna de secção uniforme	37
4. Exemplos de aplicação do modelo numérico	39
4.1. Análises lineares de estabilidade	39
4.1.1. Coluna bi-encastrada	39
4.1.2. Coluna bi-encastrada com deslocamentos de “sway” no topo	41
4.1.3. Pórtico simples de um piso.....	42
4.1.4. Coluna em consola de secção bi-simétrica variável	44
4.2. Análise de 2ª ordem geometricamente não-linear	47
5. Casos de Estudo	51
5.1. Vigas-coluna.....	51

5.1.1.	Viga-coluna simplesmente apoiada	51
5.1.2.	Viga-coluna contínua	58
5.2.	Estrutura em pórtico	63
5.2.1.	Pórtico não-contraventado	63
5.2.2.	Pórtico contraventado.....	71
6.	Conclusões.....	79
6.1.	Considerações finais	79
6.2.	Perspectiva de desenvolvimentos futuros.....	81
	Referências e Bibliografia.....	83
	ANEXOS.....	a
	ANEXO 1	a

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 – Definição da imperfeição geométrica de barra.	33
Tabela 3.2 – Factores de imperfeição associados às curvas de dimensionamento.	37
Tabela 4.1 – Propriedades da barra bi-encastrada.	39
Tabela 4.2 – Valores de carregamentos críticos e respectivos erros relativos em %.	40
Tabela 4.3 - Carregamentos críticos e respectivo erro relativo.	41
Tabela 4.4 - Propriedades e geometria do pórtico.	42
Tabela 4.5 - Carregamentos críticos e respectivo erro relativo.	43
Tabela 4.6 – Coluna de secção variável: propriedades geométricas.	44
Tabela 4.7 – Resultados obtidos pela Abordagem 1.	45
Tabela 4.8 - Resultados obtidos pela Abordagem 2.	46
Tabela 4.9 – Variação dos deslocamentos em função do erro relativo máximo.	48
Tabela 5.1 – Geometria.	52
Tabela 5.2 – Propriedades geométricas.	52
Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas.	52
Tabela 5.4 – Imperfeições adoptadas a meio vão.	52
Tabela 5.5 - Conjunto de análises – Estudo 1.	54
Tabela 5.6 – Parâmetros de encurvadura do perfil.	56
Tabela 5.7 - Conjunto de análises não-lineares.	56
Tabela 5.8 – Imperfeições adoptadas a meio vão.	59
Tabela 5.9 – Parâmetros de encurvadura do perfil.	60
Tabela 5.10 – Conjunto de análises – Viga continua; Estudo 3.	61
Tabela 5.11 – Deslocamentos iniciais a meio-vão.	63
Tabela 5.12 - Propriedades mecânicas dos pórticos considerados no estudo.	65
Tabela 5.13 – Carregamentos: estudo 4.	65
Tabela 5.14 – Diferenças nos resultados.	67
Tabela 5.15 – Imperfeições adoptadas a meio vão.	68
Tabela 5.16 – Resumo das propriedades geométricas do pórtico tipo.	68
Tabela 5.17 – Definição dos carregamentos aplicados ao pórtico.	69
Tabela 5.18 – Propriedades mecânicas dos pórticos considerados no estudo.	72
Tabela 5.19 – Valores da inércia e área da barra de contraventamento.	75
Tabela 5.20 – Imperfeições geométricas adoptadas.	77

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Aproximação com funções de grau 0, 1, 2 e 3.	6
Figura 2.2 – Aproximação com funções lineares e diferentes discretizações.	6
Figura 2.3 - Coluna.	7
Figura 2.4 – Elemento finito de coluna.	9
Figura 2.5 – Funções de forma $\psi(x)$	9
Figura 2.6 – Representação de viga.	10
Figura 2.7 – Elemento finito de barra axialmente solicitada.	11
Figura 2.8 – Funções de forma $\psi(x)$	12
Figura 2.9 – Instabilidade bifurcacional. (Reis & Camotim, 2001)	13
Figura 2.10 – Fenómenos de instabilidade bifurcacional em barras. (Reis & Camotim, 2001)	14
Figura 2.11 – Elemento de viga-coluna e respectiva deformada. (Reis & Camotim, 2001)	15
Figura 2.12 – Elemento infinitesimal da coluna. (Reis & Camotim, 2001)	16
Figura 2.13 – Determinação de cargas críticas através de matriz de rigidez exacta (Reis & Camotim, 2001).	18
Figura 2.14 – Representação gráfica das funções de estabilidade. (Reis & Camotim, 2001)	20
Figura 2.15 – Comportamento não-linear estrutura, tendendo para a trajectória de pós-encurvadura.	21
Figura 2.16 – Aproximação numérica ao comportamento não-linear de estruturas por via incremental iterativa. Adaptado de (Chan & Chui, 2000).	22
Figura 2.17 – Definição dos efeitos de “sway”. (Reis & Camotim, 2001)	24
Figura 18 – Fluxograma do algoritmo computacional.	30
Figura 3.1 – Imperfeições geométricas da EN1993-1-1.	33
Figura 3.2 – Curvas de dimensionamento do EC3. (Reis & Camotim, 2001)	37
Figura 4.1 - Representação da barra bi encastrada.	39
Figura 4.2 - Discretizações da estrutura.	40
Figura 4.3 - Determinante da matriz de rigidez exacta.	40
Figura 4.4 – Erro relativo obtido para o primeiro modo de instabilidade.	40
Figura 4.5 – Erro relativo obtido para o segundo modo de instabilidade.	40
Figura 4.6–Representação da barra bi-encastrada com deslocamentos de “sway” no topo.	41
Figura 4.7 – Determinante da matriz de rigidez.	41
Figura 4.8 – Erro relativo obtido para o primeiro modo de instabilidade.	42
Figura 4.9 – Erro relativo obtido para o segundo modo de instabilidade.	42
Figura 4.10 – Pórtico e respectivo carregamento.	42
Figura 4.11 - Discretizações da estrutura.	43
Figura 4.12 – Determinante da matriz de rigidez.	43
Figura 4.13 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 1º modo de instabilidade.	43
Figura 4.14 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 2º modo de instabilidade.	43
Figura 4.15 - Coluna de secção variável encastrada (Theodore Von Kármán, 1940).	44
Figura 4.16 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 1º modo de instabilidade.	46

Figura 4.17 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 2º modo de instabilidade.	46
Figura 4.18 – Exemplo de aplicação de viga-coluna.	47
Figura 4.19 – Determinação da carga crítica da viga-coluna.....	47
Figura 4.20 – Trajectória de equilíbrio numérica e analítica.	49
Figura 4.21 – Erro relativo medido em deslocamentos.....	49
Figura 4.22 – Erros relativos medidos em momentos flectores e em forças axiais aplicadas.	50
Figura 5.1 – IPE200.....	52
Figura 5.2 – Viga-coluna: flexão em y.....	53
Figura 5.3 – Viga-coluna: flexão em z.....	53
Figura 5.4 - Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em y – (imperfeição de L/300).	53
Figura 5.5 - Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em z – (imperfeição de L/250).	53
Figura 5.6 – Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em y – (imperfeição de L/667).	53
Figura 5.7 – Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em z – (imperfeição de L/571).	53
Figura 5.8 – Carregamentos tipo.....	53
Figura 5.9 – Trajectórias de equilíbrio (P vs δ): Análises 1 a 4.....	54
Figura 5.10 - Trajectórias de equilíbrio (q vs δ): Análises 5 a 8.....	54
Figura 5.11 – Viga-coluna simplesmente apoiada.....	55
Figura 5.12 – Curva de interação P- M_y e pontos de cedência obtidos através do § 5.3.2 do EC3.....	57
Figura 5.13 – Curva de interação P- M_y e pontos de cedência obtidos através do § 6.3.1.2 do EC3... ..	57
Figura 5.14 – Viga-coluna de 3 tramos com imperfeição para verificação do tramo intermédio.....	58
Figura 5.15 – Viga-coluna de 3 tramos com imperfeição para verificação dos tramos de extremidade.	58
Figura 5.16 - Modelo de viga-coluna de 3 tramos para flexão em y - (imperfeição - L/300). Imperfeições à escala 1:1000.	59
Figura 5.17 - Modelo de viga-coluna de 3 tramos para flexão em y – (imperfeição de L/667). Imperfeições à escala 1:1000.	59
Figura 5.18 – Métodos de comparação.....	60
Figura 5.19 – Diagrama de momentos flectores da viga-coluna.....	60
Figura 5.20 – Tramo de extremidade: curva de interação P- M_y e pontos de cedência numéricos (Comparação 1).....	61
Figura 5.21 – Tramo intermédio: curva de interação P- M_y e pontos de cedência numéricos (Comparação 1).....	61
Figura 5.22 – Tramo de extremidade: curva de interação P- M_y e pontos de cedência numéricos (L/667).....	62
Figura 5.23 – Tramo intermédio: curva de interação P- M_y e pontos de cedência numéricos (L/667)..	62
Figura 5.24 – Trajectórias de equilíbrio para o tramo intermédio.	62

Figura 5.25 – Pórtico em estudo.	64
Figura 5.26 – Representação geométrica do modelo do pórtico tipo.	65
Figura 5.27 – Carregamento crítico do primeiro modo de instabilidade em função de α e de β	66
Figura 5.28 – Pórtico e respectivo carregamento.	67
Figura 5.29 – Comparação de resultados: $L/300$	70
Figura 5.30 – Comparação de resultados: $L/667$	70
Figura 5.31 – Pórtico contraventado.	71
Figura 5.32 – Carregamentos críticos para os 6 primeiros modos de instabilidade do pórtico em função de η	72
Figura 5.33 – Modos de instabilidade.	73
Figura 5.34 - Variação da configuração deformada do modo B.	73
Figura 5.35 – Acoplamento do modo de “sway” com outros modos do pórtico.	73
Figura 5.36 – Pórtico genérico e respectivo carregamento.	74
Figura 5.37 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,001$	75
Figura 5.38 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,002$	75
Figura 5.39 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,003$	76
Figura 5.40 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,004$	76
Figura 5.41 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,005$	76
Figura 5.42 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,006$	76
Figura 5.43 – Trajectórias de equilíbrio: $k = 0,06$ e $\lambda = 1,50$	77
Figura 5.44 - Trajectórias de equilíbrio: $k = 0,06$ e $\lambda = 1,5$	78

Nomenclatura

k_{ij}	Coeficientes de interação entre N , M_y e M_z
n	Carregamento axial uniformemente distribuído no vão
q	Carregamento uniformemente distribuído no vão
q_i	Deslocamento independente
u	Deslocamento paralelo ao eixo do elemento finito
w	Deslocamento perpendicular ao eixo do elemento finito
A	Área de secção transversal
E	Módulo de Young
I	Inércia de secção transversal
L	Comprimento de barras ou pórticos
L_{cr}	Comprimento de encurvadura
K	Matriz de rigidez
P	Carregamento axial
$P_{cr,i}$	Carga axial correspondente ao modo de instabilidade i
Q	Força nodal
Q_0	Força de fixação
W	Trabalho das forças exteriores
U	Energia de deformação
α	Relação entre carregamentos axiais de 2 montantes de um pórtico
α_{cr}	Relação entre carregamento axial e respectivo valor crítico
β	Parâmetro adimensional que relaciona rigidez de flexão da travessa com rigidez de flexão dos montantes
ε	Extensão axial média
ζ_i	Função de peso
ϕ_i	Funções de estabilidade
ϕ	Imperfeição geométrica global de pórticos
δ	Deslocamento nodal
η	Parâmetro adimensional que relaciona rigidez transversal de um pórtico com a rigidez transversal do respectivo contraventamento
κ	Parâmetro adimensional que relaciona rigidez lateral do pórtico com a rigidez lateral do contraventamento
λ	Parâmetro de carga; esbelteza geométrica
λ_1	Esbelteza padrão
$\bar{\lambda}$	Esbelteza normalizada
χ_i	Coeficiente de redução de resistência axial para verificação da segurança ao ELU de encurvadura no plano i
ψ_i	Função de forma

1. Introdução

1.1. Enquadramento

As estruturas transmitem às fundações os carregamentos aplicadas verificando condições de segurança, funcionalidade, estética e economia.

Dentro das verificações de segurança adoptadas pelas actuais filosofias de segurança distinguem-se os requisitos de não-colapso, ou Estados Limites Últimos (E.L.U.), e os requisitos de funcionalidade ou Estados Limites de Serviço.

A verificação dos Estados Limites, que deverá ser cumprida com um nível de probabilidade bem definido, traduz-se usualmente numa inequação em que as acções (F) majoradas por um coeficiente de segurança (γ_F) deverão ser inferiores às respectivas resistências (R) as quais são minoradas por um coeficiente γ_R .

$$R/\gamma_R \geq \gamma_F F \quad (1.1)$$

O Projectista tem que verificar a equação (1.1), analisando rigorosamente a resistência e as acções a que a estrutura está sujeita. Assim o projectista deverá considerar modelos de análise estrutural que tenham capacidade para uma modelação adequada do comportamento real da estrutura em estudo.

As análises habitualmente adoptadas por Projectistas consistem em análises elásticas-lineares pela sua rápida e fácil implementação numérica, sendo numa fase inicial do projecto uma adequada metodologia para analisar o comportamento estrutural. Porém, em certas situações esta metodologia poderá conduzir a uma quantificação incorrecta dos esforços e deslocamentos, pelo que será necessário quantificar de forma mais rigorosa os efeitos não-lineares na resposta da estrutura.

Neste contexto, as estruturas de aço, habitualmente esbeltas, necessitam de uma quantificação cuidada dos efeitos geometricamente não-lineares. Os efeitos geometricamente não-lineares têm como consequência a existência de deformações não proporcionais às forças aplicadas, os quais podem causar os fenómenos de instabilidade estrutural.

Assim, para uma correcta modelação do comportamento estrutural as análises deverão contabilizar os efeitos não-lineares quer directamente através matrizes de rigidez não-lineares, ou indirectamente através de factores que corrijam os resultados obtidos por análises elásticas-lineares.

1.2. Objetivos

Na presente dissertação pretende desenvolver-se, através de um algoritmo numérico implementado em Matlab, uma ferramenta de cálculo com capacidade para efectuar análises geometricamente não-lineares de vigas e pórticos planos, utilizando a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

O modelo numérico desenvolvido será adoptado para efectuar análises lineares de estabilidade e análises de 2ª ordem geometricamente não-lineares.

As análises lineares de estabilidade permitirão identificar cargas críticas e respectivos modos de encurvadura com base em matrizes de rigidez geometricamente não-lineares, as quais poderão ser aproximadas (matriz de rigidez geométrica) ou exactas (matriz de rigidez total).

A diferença obtida na precisão dos resultados quando se opta por análises de estabilidade aproximadas será também objecto de estudo da actual dissertação, analisando-se o efeito da discretização na convergência da solução aproximada para o seu valor exacto.

As análises de 2ª ordem deverão ter capacidade para determinar trajectórias de equilíbrio não-lineares através de um processo incremental e iterativo com base no método de Newton-Raphson, sendo estas adoptadas para determinar a influência das imperfeições geométricas e de diferentes tipos de carregamentos no comportamento geometricamente não-linear de vigas e pórticos metálicos.

Os resultados obtidos através dos modelos numéricos serão comparados com as metodologias do EC3.

1.3. Organização da dissertação

A dissertação é constituída por um total de 6 capítulos e pode considerar-se dividida em duas partes. Na primeira parte, constituída pelos capítulos 2 e 3, são introduzidos os conceitos teóricos utilizados no desenvolvimento do modelo de cálculo, e são apresentadas as disposições regulamentares aplicadas nos casos de estudo. Na parte final da dissertação, constituída pelos capítulos 4 e 5, são apresentados os exemplos de aplicação e casos de estudo desenvolvidos, descrevendo os resultados obtidos numericamente.

Capítulo 2: Análises, conceitos e formulação do modelo

Neste capítulo apresentam-se os conceitos teóricos utilizados na implementação do modelo numérico, sendo formuladas as análises estruturais aplicadas nos casos de estudo. Assim, no contexto do MEF, e através do princípio da energia potencial mínima, foram definidas três matrizes de rigidez:

1. Matriz de rigidez elástica;
2. Matriz de rigidez geométrica (efeitos geométricos linearizados);

3. Matriz de rigidez total exacta.

O modelo de elementos finitos desenvolvido foi adoptado para efectuar as seguintes análises:

1. Análise elástica-linear: identificação de esforços e deslocamentos com base num comportamento elástico linear;
2. Análise de estabilidade aproximada: identificação de cargas críticas e de modos de encurvadura com base em matrizes de rigidez geometricamente não-lineares, considerando os efeitos geométricos linearizados (matriz de rigidez geométrica);
3. Análise de estabilidade exacta: identificação de cargas críticas com base em matrizes de rigidez geometricamente não-lineares, considerando os efeitos geométricos de forma exacta (matriz de rigidez total);
4. Análise de 2ª ordem geometricamente não-linear: identificação de trajectórias de equilíbrio não-lineares através de processos incrementais e iterativos, com base no método de Newton-Raphson, considerando matrizes de rigidez exactas ou aproximadas.

No final do capítulo identificam-se os principais passos de cálculo do algoritmo, apresentando-se um fluxograma da sua metodologia.

Capítulo 3: Disposições regulamentares (EN1993-1-1)

No capítulo 3 introduzem-se as várias disposições estipuladas pelo EC3 para a análise e verificação da segurança de estruturas metálicas, identificando-se essencialmente as cláusulas do regulamento a que se fará referência no desenvolvimento dos casos de estudo, descrevendo-se os tipos de análises globais, as imperfeições geométricas a adoptar e a metodologia de verificação de segurança de elementos uniformes.

Capítulo 4: Exemplos de aplicação do modelo numérico

No quarto capítulo apresenta-se um conjunto de quatro exemplos de aplicação do método numérico desenvolvido.

Os exemplos de aplicação são constituídos por quatro análises lineares de estabilidade, ou problemas de estabilidade bifurcacional, e por uma análise de 2ª ordem geometricamente não-linear.

As análises de estabilidade aplicam-se a vigas e pórticos com diferentes condições de apoio, tendo sido efectuado um estudo da convergência de resultados do modelo numérico.

As análises efectuadas têm como objectivos:

1. Determinar cargas críticas através da análise de estabilidade exacta, comparando o resultado com soluções analíticas, e confirmando desta forma a fiabilidade dos resultados obtidos através da análise adoptada;

2. Comparar a solução exacta, obtida no ponto anterior, com soluções determinadas através de análises de estabilidade aproximadas, que consideram diferentes discretizações; pretende-se deste modo analisar o erro obtido em função do nível de discretização das barras.

A análise de 2ª ordem aplicada a uma viga-coluna simplesmente apoiada tem como objectivo comparar os resultados obtidos numericamente com a respectiva solução analítica (correspondente à expressão de amplificação dos deslocamentos por aplicação de esforços de compressão – aproximação por série de Fourier).

A trajectória de equilíbrio, ou a relação entre os deslocamentos e a carga axial aplicada, é determinada por ambas as metodologias, tendo sido efectuada uma comparação entre os respectivos resultados.

Capítulo 5: Casos de estudo

Neste capítulo são efectuadas análises de 2ª ordem que determinam como o comportamento geometricamente não-linear de estruturas metálicas planas pode ser influenciado pelas condições de carregamento e imperfeições geométricas, comparando os resultados obtidos numericamente com as metodologias do EC3.

Os estudos dividem-se por quatro tipos de estruturas planas, as quais são analisadas para um ou mais casos de estudo: “Viga-coluna simplesmente apoiada”, “Viga-coluna contínua”, “Pórtico não-contraventado” e “Pórtico contraventado”.

2. Análises, conceitos e formulação do modelo numérico

2.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se os tipos de análise de estruturas implementadas no modelo numérico. Inicialmente, são identificados os princípios e conceitos teóricos sobre os quais aqueles se fundamentam, sendo no final de cada secção demonstrada a aplicação destes princípios ao Método dos Elementos Finitos (MEF).

No presente estudo serão considerados três tipos de análise:

1. Análise de 1ª ordem elástica-linear;
2. Análises lineares de estabilidade exacta e aproximada;
3. Análises de 2ª ordem geometricamente não-linear,

abordando-se as respectivas formulações teóricas e identificando para cada: as matrizes de rigidez, vectores de forças aplicadas.

2.2. Método dos elementos finitos

No presente trabalho as soluções numéricas foram obtidas através de um modelo baseado no Método de Elementos Finitos.

Para a formulação do modelo aplicou-se o princípio da energia potencial mínima através do método de Rayleigh-Ritz, sendo necessário definir uma aproximação do campo de deslocamentos a qual tem de satisfazer as condições de fronteira cinemáticas bem como as condições de ligação entre os elementos estruturais.

O problema da determinação do campo de deslocamentos, de carácter contínuo, é transformado num problema discreto que tem como incógnitas os deslocamentos independentes da estrutura, os quais em conjunto com funções de aproximação permitem a construção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos da estrutura, podendo este ser ou não exacto dependendo das funções de aproximação utilizadas.

As funções de aproximação associadas aos deslocamentos independentes da estrutura, têm como definição os deslocamentos a que a estrutura é sujeita quando o deslocamento independente associado é unitário e os restantes são nulos.

A qualidade da solução obtida por este modelo está relacionada com a capacidade das funções de aproximação em representar o campo de deslocamentos real da estrutura. Usualmente são adoptadas funções polinomiais para a construção das funções de aproximação, o que para certos tipos de análise, como no caso da análise elástica geometricamente linear de barras, correspondem, desde logo, à solução geral exacta das equações diferenciais que a definem.

Constate-se que no entanto existem casos, que se identificarão posteriormente, em que a utilização de funções de aproximação que respeitem as equações diferenciais de equilíbrio requer o uso de funções complexas. O recurso a este tipo de funções requer tempos e esforços computacionais elevados quando se pretendem análises mais elaboradas pelo que é muito vantajoso fazer recurso a funções mais simples considerando simultaneamente uma discretização mais fina do problema.

De modo a ilustrar-se o conceito referido considere-se o exemplo da função $f(x)$ representada na Figura 2.1 e 2.2 a linha tracejada. Pretende aproximar-se $f(x)$ de forma qualitativa através de duas metodologias. Na primeira, tirando partido de uma discretização do domínio num único intervalo, aproxima-se $f(x)$ com recurso a funções de aproximação polinomiais de grau 0, 1, 2 e 3, representadas por uma linha contínua na Figura 2.1.

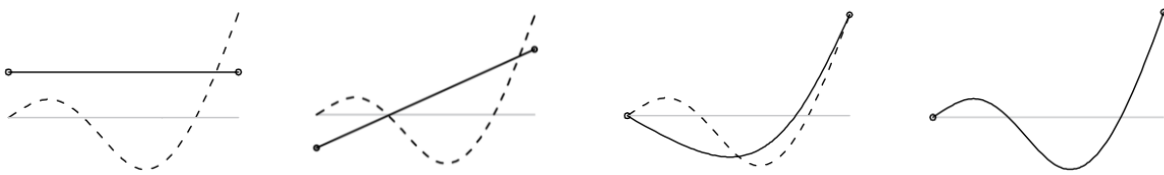


Figura 2.1 – Aproximação com funções de grau 0, 1, 2 e 3.

Na segunda metodologia, tirando partido de funções de aproximação lineares consideram-se quatro discretizações do domínio de $f(x)$ com 1, 2, 3 e 4 intervalos, como indicado na Figura 2.2.

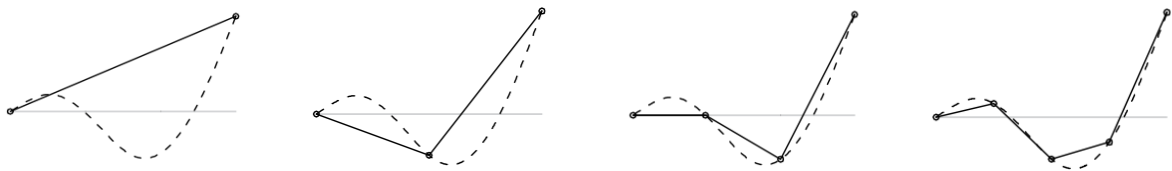


Figura 2.2 – Aproximação com funções lineares e diferentes discretizações.

Como se pode verificar pelas representações gráficas a qualidade de uma solução aproximada pode ser garantida quer tirando partido de funções de aproximação mais exigentes do ponto de vista matemático, quer recorrendo a maiores discretizações do domínio. A decisão de qual a metodologia a adoptar deverá ser tomada tendo em conta a rapidez e a qualidade da solução que se pretenda.

De seguida, são apresentadas as várias análises consideradas na elaboração do modelo numérico sendo identificados os princípios fundamentais demonstrando-se como formular um elemento finito a partir destes por aplicação do princípio da mínima energia potencial através do Método de Rayleigh-Ritz (Reis & Camotim, 2001).

2.3. Análise elástica-linear

A análise elástica-linear de estruturas fundamenta-se nos princípios da:

1. Linearidade Física: adopção de relação constitutiva elástica-linear para o material estrutural (componentes do tensor das tensões proporcionais às componentes do tensor das deformações), a qual para o caso de barras estruturais estabelece uma relação linear entre os esforços e respectivas deformações;
2. Linearidade Geométrica: os deslocamentos e respectivas derivadas que ocorrem na estrutura são considerados suficientemente pequenos para que a análise possa ser efectuada na posição indeformada.

De seguida, elabora-se a formulação dos elementos finitos de coluna e de viga, considerados na definição do comportamento estrutural de barras em análises elásticas-lineares.

Elemento de coluna elástica-linear

Considere-se a barra de secção variável de comprimento L , representada na Figura 2.3, axialmente solicitada por duas forças concentradas nas extremidades, um carregamento de vão $n(x)$, e sujeita a um campo de deslocamentos $u(x)$.

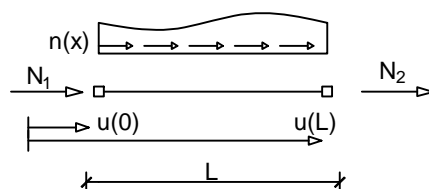


Figura 2.3 – Coluna.

O comportamento da coluna é definido pelo conjunto de equações: (2.1) a equação de equilíbrio na posição indeformada da barra, definida através do Princípio da Mínima Energia Potencial em função da variação da energia potencial total (V); (2.2) relação cinemática, a qual estabelece a relação entre deformações (ϵ) e deslocamentos axiais (u); e (2.3), a relação constitutiva da secção, definida em função do módulo de elasticidade (E) e da área da secção (A).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condição de Equilíbrio: } dV = 0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relação cinemática: } \epsilon(x) = \frac{du}{dx} \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relação constitutiva: } N(x) = \epsilon(x) E(x) A(x) \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

A equação de equilíbrio definida pelo mínimo da energia potencial total da barra pode ser reescrita em função da energia de deformação da estrutura (U) e do trabalho das forças exteriores (W).

$$dV = d(U - W) \quad (2.4)$$

A energia de deformação de um sistema estrutural é determinada pela integração do produto dos esforços internos com as respectivas deformações no comprimento das barras (Fish & Belytschko, 2007). Tirando partido da relação cinemática e da relação constitutiva, a energia de deformação da coluna é definida em função do campo de deslocamentos por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E(x) A(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (2.5)$$

Tendo em consideração o carregamento genérico ilustrado na Figura 2.3, o trabalho das forças exteriores, definido também em função do campo de deslocamentos $u(x)$, é dado pela expressão:

$$W = \int_0^L u(x) \cdot n(x) dx + N_1 u(0) + N_2 u(L) \quad (2.6)$$

Tendo quantificada a energia potencial total da coluna, a equação de equilíbrio pode ser reescrita como a variação de um funcional do campo de deslocamentos.

$$dV = d \left(\frac{1}{2} \int_0^L E(x) A(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L u(x) \cdot n(x) dx - N_1 u(0) - N_2 u(L) \right) = 0 \quad (2.7)$$

Para a resolução da equação de equilíbrio energético é necessário o recurso a um incremento infinitesimal no campo de deslocamentos axiais. Para tal, considere-se a função arbitrária $\zeta(x)$ com valores tão pequenos quanto se queira, a qual representará o incremento infinitesimal da função $u(x)$.

Posto isto, a equação de equilíbrio pode ser redefinida em função de $u(x)$ e $\zeta(x)$, como indicado nas expressões (2.8) e (2.9).

$$\delta V = V(u(x) + \zeta(x)) - V(u(x)) \quad (2.8)$$

$$\delta V = \int_0^L E(x) A(x) \frac{d\zeta(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx - \int_0^L \zeta(x) \cdot n(x) dx - N_1 \zeta(0) - N_2 \zeta(L) = 0 \quad (2.9)$$

Considere-se agora o elemento finito de barra axialmente solicitado, ilustrado na Figura 2.4, onde se identificam as forças e deslocamentos nodais (respectivamente, Q_1 , Q_2 e q_1 , q_2) a partir dos quais será feita a definição do campo de deslocamentos com recurso a funções de aproximação.

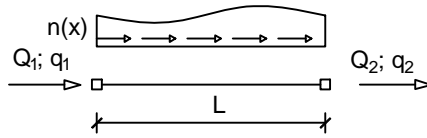


Figura 2.4 – Elemento finito de coluna.

Para elementos finitos de coluna, as funções de aproximação adoptadas são os polinómios de primeiro grau indicados nas equações (2.10) e (2.11) e na Figura 2.5, que correspondem à solução geral exacta da equação de equilíbrio da barra expressa na equação (2.7) .

$$\psi_1(x) = 1 - x/L \quad (2.10)$$

$$\psi_2(x) = x/L \quad (2.11)$$

Figura 2.5 – Funções de aproximação $\psi_i(x)$.

A solução aproximada de $u(x)$ obtida pelo MEF é construída a partir da combinação linear das várias funções de aproximação multiplicadas pelos respectivos deslocamentos independente (q_1 e q_2) representados na Figura 2.5, tal como indicado na equação (2.12) .

$$u(x) = q_1 \psi_1(x) + q_2 \psi_2(x) = [\psi_1 \quad \psi_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \{\psi\}\{q\} \quad (2.12)$$

A função de incremento do campo de deslocamentos $\zeta(x)$ pode ser definida por:

$$\zeta(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_j \psi_j q_j \right) dq_i = [\psi_1 \quad \psi_2] \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} = \{\psi\}\{dq\} = \{\psi\}\{\zeta\} \quad (2.13)$$

em que os coeficientes ζ_i representam os infinitésimos dos deslocamentos independentes dq_i .

Introduzindo as equações (2.12) e (2.13) nas equações (2.5) e (2.6) é possível definir a variação da energia de deformação e a variação do trabalho das forças exteriores a partir das funções de aproximação e respectivos deslocamentos independentes.

$$dU = \int_0^L E(x)A(x) \frac{d(\{\psi\}\{\zeta\})}{dx} \frac{d(\{\psi\}\{q\})}{dx} dx \quad (2.14)$$

$$dW = \int_0^L \{\psi\}\{\zeta\} n(x) dx + \sum_I Q_i \{\psi(0)\} \{\zeta\} - \sum_J Q_j \{\psi(L)\} \{\zeta\} \quad (2.15)$$

Note-se que o vector $\{\zeta\}$, estando presente em todas as parcelas da variação da energia de deformação e da variação do trabalho das forças exteriores, poderá ser eliminado da equação de equilíbrio energético do elemento, reescrevendo-se a equação (2.9) na forma seguinte.

$$\delta V = \underbrace{\left[\int_0^L E(x) A(x) \{\psi'\}^T \{\psi'\} dx \right]}_{=[K]} \{q\} - \underbrace{\left[\int_0^L \{\psi\} n(x) dx \right]}_{=\{Q_0\}} - \underbrace{\sum_i Q_i \{\psi(0)\} + \sum_j Q_j \{\psi(L)\}}_{=Q} = 0 \quad (2.16)$$

Como se pode verificar, colocando o vector dos deslocamentos independentes fora da integração da energia de deformação, a equação de equilíbrio fica reescrita na sua forma corrente, em função de uma matriz de rigidez (K), um vector de forças de fixação (Q₀) e um vector de forças nodais (Q).

Conclui-se assim a formulação do elemento finito de coluna elástica-linear para o caso geral de barras com secção variável ao longo do eixo, apresentando-se a aplicação ao caso de barras de secção constante.

Para barras prismáticas as funções que definem a inércia e a área das secções ao longo do eixo do elemento de barra possuindo valores constantes, permitem a sua consideração fora da integração da energia de deformação pelo que a equação (2.16) poderá ser reescrita na forma:

$$\delta V = EA \underbrace{\left[\int_0^L \{\psi'\}^T \{\psi'\} dx \right]}_{[K]} \{q\} - \underbrace{\left[\int_0^L \{\psi\} n(x) dx \right]}_{\{Q_0\}} - \underbrace{\sum_{i=1} Q_i \{\psi(0)\} + \sum_{j=1} Q_j \{\psi(L)\}}_Q = 0 \quad (2.17)$$

sendo as componentes da matriz de rigidez definidas pela expressão:

$$[K] = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Elemento de viga elástica-linear

Considere-se a viga de secção variável de comprimento L representada na Figura 2.6, sujeita a um carregamento genérico constituído por forças e momentos concentrados aplicados nas extremidades juntamente com um carregamento distribuído no vão q(x). O campo de deslocamentos transversais é definido pela função w(x).

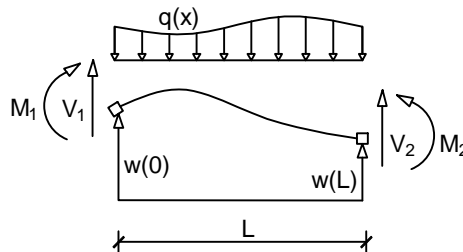


Figura 2.6 – Representação de viga.

O comportamento da viga é definido pelo conjunto de equações: (2.19) a equação de equilíbrio na posição indeformada da barra, definida através do Princípio da Mínima Energia Potencial em função da variação da energia potencial total (V); (2.20) relação cinemática, a qual estabelece a relação

entre deformações ($1/R$) e deslocamentos transversais (w); e (2.21), a relação constitutiva da secção, definida em função do módulo de elasticidade (E) e da inércia da secção (I).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condição de Equilíbrio: } dV = 0 \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relação cinemática: } \frac{1}{R}(x) \cong -\frac{d^2w}{dx^2} \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relação Constitutiva: } M(x) = E(x) I(x) \frac{1}{R} \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

A energia de deformação da viga determinada pela integração do produto das curvaturas com os respectivos momentos flectores no comprimento é definida pela expressão:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E(x)I(x) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.22)$$

Tendo em consideração o carregamento distribuído no vão e as forças aplicadas nas extremidades da viga, o trabalho das forças exteriores é dado por:

$$W = \int_0^L w(x) p(x) dx + Q_1 w(0) + Q_2 w'(0) + Q_3 w(L) + Q_4 w'(L) \quad (2.23)$$

A variação da energia potencial do elemento para um incremento infinitesimal no campo de deslocamentos, permite reescrever a equação de equilíbrio do elemento de viga na forma:

$$\delta V = \int_0^L E(x)I(x) \frac{d^2\zeta}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} dx - \int_0^L \zeta(x) \cdot p(x) dx - Q_1 \zeta(0) - Q_2 \zeta'(0) - Q_3 \zeta(L) - Q_4 \zeta'(L) = 0 \quad (2.24)$$

Considere-se o elemento finito de viga, ilustrado na Figura 2.7, onde se identificam os deslocamentos independentes (q_1 a q_4) e os carregamentos a que o elemento pode ser sujeito (forças nodais, Q_1 a Q_4 e carregamento de vão $p(x)$).

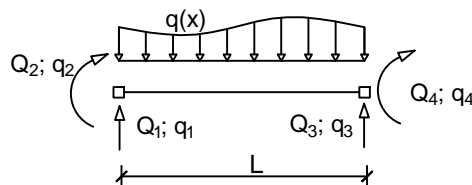
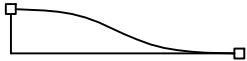


Figura 2.7 – Elemento finito de barra axialmente solicitada.

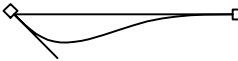
A aproximação do campo de deslocamentos do elemento de viga é efectuada através dos polinómios do terceiro grau de Hermite, que para uma análise elástica-linear correspondem à solução geral

exacta (Fish & Belytschko, 2007). Na Figura 2.8 representam-se as funções de aproximação consideradas.



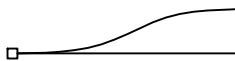
$$\psi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

(2.25)



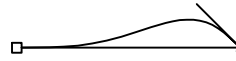
$$\psi_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

(2.26)



$$\psi_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

(2.27)



$$\psi_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

(2.28)

Figura 2.8 – Funções de forma $\psi_i(x)$.

A aproximação de $w(x)$ e de $\zeta(x)$ são definidas através de uma combinação linear das funções de aproximação, em que as respectivas amplitudes correspondem aos deslocamentos independentes e aos coeficientes $\{\zeta\}$ (representando os infinitésimos dos deslocamentos independentes), como indicado nas expressões (2.29) e (2.30).

$$w(x) = \{\psi\}\{q\} \quad (2.29)$$

$$\zeta(x) = \{\psi\}\{\zeta\} \quad (2.30)$$

Refira-se que de acordo com o método de Galerkin as funções de peso correspondem a funções construídas a partir das mesmas funções de aproximação, ψ (Fish & Belytschko, 2007).

Introduzindo a equação (2.29) e (2.30) na formulação da variação da energia potencial (equação (2.24)), e colocando os vectores $\{\zeta\}$ e $\{w\}$ em evidência, fica definida a equação de equilíbrio de um elemento finito de viga.

$$\delta V = \underbrace{\left[\int_0^L E(x)I(x) \{\psi''\}^T \{\psi''\} dx \right]}_{=[K]} \{q\} - \underbrace{\left[\int_0^L \{\psi\} \cdot p(x) dx \right]}_{=Q_0} - \underbrace{\left[\sum_{i=1,2} Q_i \cdot \{\psi(0)\} - \sum_{j=3,4} Q_j \cdot \{\psi(L)\} \right]}_{=Q} = 0 \quad (2.31)$$

Conclui-se neste ponto a formulação do elemento de viga elástico-linear, apresentando-se o resultado da integração da matriz de rigidez no caso de barras de secção constante.

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

2.4. Análises geometricamente não-lineares

As análises de geometricamente não-lineares desenvolvidas no âmbito deste trabalho baseiam-se nos princípios da:

1. Linearidade física: adopção de relação constitutiva elástica-linear para o material estrutural (componentes do tensor das tensões proporcionais às componentes do tensor das deformações);
2. Não-linearidade geométrica: as equações de equilíbrio são estabelecidas na posição deformada.

A aplicação destes princípios conduz a diferentes tipos de análises de estabilidade conforme o carregamento e o tipo de estrutura (ideal, sem imperfeições; real, com imperfeições). Das várias análises de estabilidade possíveis distinguem-se as aplicadas na elaboração deste estudo:

1. Análise de estabilidade (aproximada e exacta);
2. Análise de 2ª ordem.

Nos tópicos seguintes faz-se uma breve descrição de cada tipo de análise de estabilidade com a formulação dos respectivos elementos finitos utilizados no modelo numérico.

2.4.1. Análise de 1ª ordem geometricamente não-linear

As análises lineares de estabilidade, considerando a variação da energia potencial definida na sua forma linearizada constituída pelos termos lineares da série de Taylor, permitem a determinação de modos de encurvadura e respectivas cargas críticas de estruturas que apresentem um comportamento com fenómenos de instabilidade bifurcacional, como ilustrado na Figura 2.9.

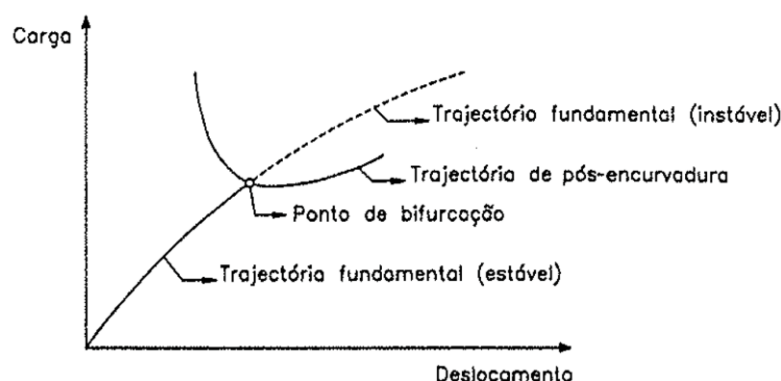


Figura 2.9 – Instabilidade bifurcacional. (Reis & Camotim, 2001)

Este tipo de comportamento caracterizado por duas trajectórias de equilíbrio: a trajectória fundamental, classificada como estável para carregamentos abaixo do ponto de bifurcação; e a trajectória de pós-encurvadura que pode ser estável ou instável.

Para estruturas com peças lineares, este fenómeno torna-se relevante pois os níveis de deformação aos quais a estrutura é sujeita após ultrapassado o carregamento crítico são muito elevados quando

o equilíbrio se situa na trajetória de pós-encurvadura, como se ilustra na Figura 2.10, conduzindo rapidamente a estrutura à rotura.

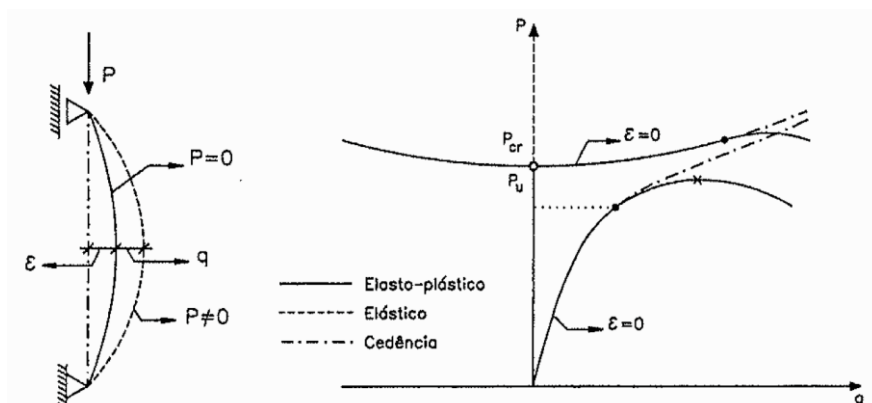


Figura 2.10 – Fenómenos de instabilidade bifurcacional em barras. (Reis & Camotim, 2001)

Como se pode observar na Figura 2.10, no caso de uma análise linear de estabilidade elástica após ultrapassado o nível de carga axial correspondente ao seu valor crítico existe um aumento muito significativo das deformações sofridas pela estrutura na trajetória de equilíbrio de pós-encurvadura, pelo que, como correntemente considerado, a resistência residual da trajetória de pós-encurvadura é desprezada em elementos de barra.

Em análises lineares de estabilidade a equação de equilíbrio (2.33), sendo estabelecida na configuração deformada, inclui na matriz de rigidez os efeitos geometricamente não lineares produzidos pelos esforços axiais de compressão.

$$[K]\{w\} = 0 \quad (2.33)$$

A equação de equilíbrio possui duas soluções possíveis: uma obtida através do anulamento dos deslocamentos independentes, correspondendo à trajetória fundamental; a segunda dada pelo anulamento do determinante da matriz de rigidez, correspondendo à trajetória de pós-encurvadura linearizada a qual permite a determinação dos carregamentos críticos e respectivos modos de instabilidade.

Dependendo da maior aproximação da matriz de rigidez na quantificação dos efeitos geometricamente não-lineares as análises lineares de estabilidade dividem-se em:

1. Análises lineares de estabilidade aproximada;
2. Análises lineares de estabilidade exacta,

apresentando-se de seguida cada um dos tipos de análise linear de estabilidade e a formulação dos elementos finitos associados.

2.4.1.1. Análise linear de estabilidade aproximada

Neste estudo as análises lineares de estabilidade aproximadas são efectuadas com recurso às funções de forma de Hermite.

Para análises que recorrem a estas funções de aproximação, a matriz de rigidez é dividida em duas parcelas: a matriz de rigidez elástica-linear; e a matriz de rigidez geométrica a qual reproduz os efeitos geometricamente não-lineares de redução de rigidez devidos aos esforços de compressão. A equação de equilíbrio é reescrita na forma:

$$([K_{\text{elast.}}] - \lambda [K_{\text{geo.}}])\{w\} = 0 \quad (2.34)$$

em que, λ representa o parâmetro de carga.

A determinação dos carregamentos críticos e respectivos modos de instabilidade passa pela resolução do problema de valores e vectores próprios associado à equação (2.34).

No tópico seguinte é formulado o elemento finito de viga-coluna correspondente a este tipo de análise.

Elemento de viga-coluna geometricamente não-linear com campo de deslocamentos aproximado

Uma análise linear de estabilidade aproximada é caracterizada por considerar os polinómios de Hermite como funções de aproximação, o que no caso de uma análise geometricamente não linear não correspondem à solução geral exacta da equação de equilíbrio da viga-coluna (equação (2.49)).

No entanto, apesar de aproximada o MEF converge para a solução exacta através soluções majorantes quando se aumenta o nível de discretização dado às barras da estrutura.

Considere-se a viga-coluna de secção constante indicada na Figura 2.11.

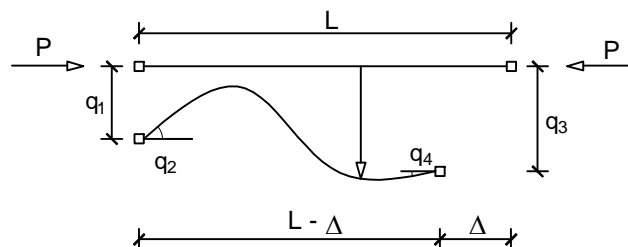


Figura 2.11 – Elemento de viga-coluna e respectiva deformada. (Reis & Camotim, 2001)

As equações que definem o comportamento à flexão da viga-coluna são:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condição de Equilíbrio: } dV = 0 \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equação de Compatibilidade: } \frac{1}{R}(x) \cong -\frac{d^2w}{dx^2} \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relação Constitutiva: } M(x) = E(x) I(x) \frac{1}{R} \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

De acordo com os princípios das análises de estabilidade a equação de equilíbrio deverá ser construída na posição deformada.

A definição da energia de deformação da barra não é alterada com a consideração dos efeitos geometricamente não-lineares sendo dada pela anterior expressão (2.22), já apresentada no tópico da formulação do elemento de viga elástico-linear.

A definição do trabalho das forças exteriores, incluindo o trabalho correspondente ao carregamento de compressão, requer a quantificação do deslocamento axial representado por Δ representado na Figura 2.11. De salientar que este deslocamento não inclui efeitos devidos à deformabilidade por fenómenos de extensão ou contração axial.

Considere-se o elemento infinitesimal da viga-coluna de comprimento ds na sua posição deformada.

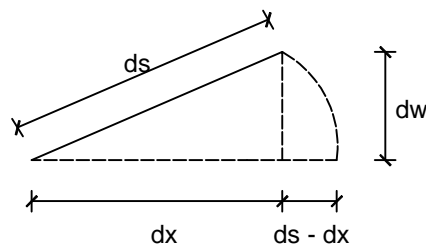


Figura 2.12 – Elemento infinitesimal da coluna. (Reis & Camotim, 2001)

A relação entre as grandezas ilustradas na Figura 2.12 é definida pela equação (2.38), a qual pode ser reescrita apenas com os termos lineares da série de Taylor através da equação (2.39).

$$ds = \sqrt{dw^2 + dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \dots\right] dx \quad (2.38)$$

$$ds - dx = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right] dx \quad (2.39)$$

O trabalho das forças exteriores pode ser definido em função do campo de deslocamentos $w(x)$ na forma:

$$W = P \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx + \int_0^L w(x) p(x) dx + M_1 w'(0) + V_1 w(0) + M_2 w'(L) + V_2 w(L) \quad (2.40)$$

A variação da energia potencial total do sistema é definida, à semelhança do procedimento anteriormente adoptado na análise elástica-linear, através de uma variação infinitesimal no campo de deslocamentos, como apresentado nas expressões:

$$\delta V = V(u(x) + \zeta(x)) - V(u(x)) \quad (2.41)$$

$$\delta V = \int_0^L E(x) I(x) \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx - P \int_0^L \frac{d\zeta}{dx} \frac{dw}{dx} dx - \int_0^L \zeta(x) \cdot n(x) dx - \sum_{i=1,2} Q_i \zeta(0) - \sum_{j=3,4} Q_j \zeta(L) = 0 \quad (2.42)$$

Considerando o campo de deslocamentos aproximado pelas funções de Hermite, conforme definido na secção 2.3. nas equações (2.29) e (2.30), a equação (2.41) pode ser reescrita na forma:

$$\delta V = \underbrace{\left[\int_0^L E(x) I(x) \{\psi''\}^T \{\psi''\} dx \right]}_{=[K_{elast.}]} \{q\} - \underbrace{\left[P \int_0^L \{\psi'\}^T \{\psi'\} dx \right]}_{=[K_{geom.}]} \{q\} - \underbrace{\left[\int_0^L \{\psi\} \cdot p(x) dx \right]}_{=Q_0} - \underbrace{\sum_{i=1,2} Q_i \cdot \{\psi(0)\} - \sum_{j=3,4} Q_j \cdot \{\psi(L)\}}_{=Q} = 0 \quad (2.43)$$

Como se pode verificar a matriz de rigidez do elemento é constituída por duas parcelas a matriz de rigidez elástica linear e a matriz de rigidez geométrica a qual quantifica os efeitos geométricos de forma linear.

A aplicação da anterior equação de equilíbrio a barras prismáticas de material homogéneo permite obter uma matriz de rigidez total definida pela expressão:

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} 6/5L & 1/10 & -6/5L & 1/10 \\ 1/10 & 2L/15 & -1/10 & -L/30 \\ -6/5L & -1/10 & 6/5L & -1/10 \\ 1/10 & -L/30 & -1/10 & 2L/15 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.4.1.2. Análise linear de estabilidade exacta

A análise linear de estabilidade exacta é caracterizada por considerar os efeitos geometricamente não-lineares provocados na matriz de rigidez de forma exacta.

Para esta análise a matriz de rigidez da estrutura não permite a divisão entre os efeitos geométricos e a rigidez elástica sendo as suas componentes definidas através de funções de estabilidade caracteristicamente não-lineares apresentadas mais à frente. A equação de equilíbrio, reescrita na seguinte expressão, deixa de constituir um problema de valores e vectores próprios por não existir uma relação linear entre o parâmetro de carga λ e o determinante da matriz de rigidez, como indicado na Figura 2.13.

$$[K(\lambda)] \{w\} = 0 \quad (2.45)$$

O cálculo dos carregamentos críticos requer uma análise iterativa para identificar quais os valores de λ para os quais o determinante da matriz de rigidez se anula, como ilustrado na figura.

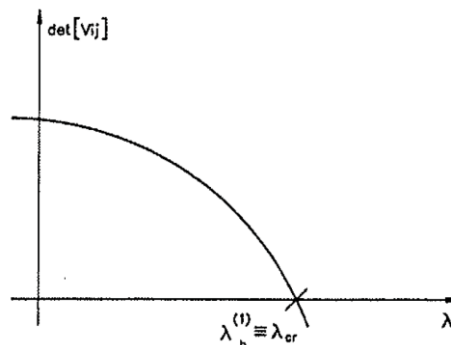


Figura 2.13 – Determinação de cargas críticas através de matriz de rigidez exacta (Reis & Camotim, 2001).

O método numérico adoptado neste estudo para a determinação dos valores dos carregamentos críticos foi o Método da Bissecção (Atkinson, 1989), o qual aplica sucessivos incrementos no carregamento até que seja identificada de uma troca no sinal do determinante da matriz de rigidez da estrutura.

Elemento de viga-coluna elástica geometricamente não-linear exacto

Considere-se novamente a viga-coluna representada na Figura 2.11, a qual se encontra sujeita a esforços de compressão. Admitindo a possibilidade da aplicação simultânea de um carregamento distribuído no vão (q) ou de forças/momentos concentrados nas extremidades, o comportamento da viga-coluna será definido pelas expressões.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equação diferencial de Equilíbrio: } \frac{d^2M}{dx^2} + P \frac{d^2w}{dx^2} - q = 0 \end{array} \right. \quad (2.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Relação cinemática: } \frac{1}{R}(x) \cong - \frac{d^2w}{dx^2} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Relação Constitutiva: } M(x) = E(x) I(x) \frac{1}{R} \end{array} \right. \quad (2.48)$$

A relação cinemática e a relação constitutiva permitem reescrever a equação de equilíbrio em função do campo de deslocamentos na forma:

$$\frac{d^4w}{dx^4} EI + P \frac{d^2w}{dx^2} + q = 0 \quad (2.49)$$

A solução geral da equação diferencial de equilíbrio (2.49) é dada pela expressão:

$$w(x) = c_1 \text{sen}(k.x) + c_2 \text{cos}(k.x) + c_3 x + c_4 \quad (2.50)$$

Reescrevendo a solução geral em função dos deslocamentos e rotações dos nós de extremidade esta é dada por:

$$w(x) = q_1 \psi_1(x) + q_2 \psi_2(x) + q_3 \psi_3(x) + q_4 \psi_4(x) \quad (2.51)$$

em que q_i representam os deslocamentos/rotações nodais e ψ_i representam as respectivas funções de aproximação.

As funções de aproximação, determinadas através da equação (2.50), são definidas pelas expressões:

$$\psi_1(x) = \frac{\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) + \frac{B}{A} \cos(kx) - \frac{k \text{sen}(kL)}{A} x + \frac{A-B}{A} \quad (2.52)$$

$$\psi_2(x) = \frac{A-B}{kA} \text{sen}(kx) + \frac{C}{kA} \cos(kx) + \frac{B}{A} x - \frac{C}{kA} \quad (2.53)$$

$$\psi_3(x) = -\frac{\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) - \frac{B}{A} \cos(kx) - \frac{k \text{sen}(kL)}{A} x + \frac{B}{A} \quad (2.54)$$

$$\psi_4(x) = -\frac{B}{kA} \text{sen}(kx) + \frac{D}{kA} \cos(kx) - \frac{B}{A} x + \frac{D}{kA} \quad (2.55)$$

em que, para $k^2 = N/(EI)$, as constantes A, B, C e D são definidas por:

$$A = 2(\cos(kL) - 1) + kL \text{sen}(kL) \quad (2.56)$$

$$B = \cos(kL) - 1 \quad (2.57)$$

$$C = kL \text{sen}(kL) - \text{sen}(kL) \quad (2.58)$$

$$D = \text{sen}(kL) - kL \quad (2.59)$$

Inserindo as funções de aproximação na equação da energia potencial mínima (equação (2.43)), e integrando a energia de deformação e o trabalho produzido pelo carregamento axial, a matriz de rigidez total do elemento é definida através da expressão (Reis & Camotim, 2001):

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12\phi_1/L^2 & 6\phi_2/L & -12\phi_1/L^2 & 6\phi_2/L \\ 6\phi_2/L & 4\phi_3 & -6\phi_2/L & 2\phi_4 \\ -12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L & 12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L \\ 6\phi_2/L & 2\phi_4 & -6\phi_2/L & 4\phi_3 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Como se pode verificar a matriz de rigidez é escrita em função de quatro funções, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 , que se designam por funções de estabilidade definidas em função da rigidez de flexão, EI, e do valor do carregamento axial, P.

$$\beta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2.61)$$

$$\phi_1 = \beta \cdot \phi_2 \cdot \cotg(\beta) \quad (2.62)$$

$$\phi_2 = \frac{\beta^2}{3(1 - \beta \cdot \cotg(\beta))} \quad (2.63)$$

$$\phi_3 = \frac{3}{4} \phi_2 + \frac{1}{4} \beta \cdot \cotg(\beta) \quad (2.64)$$

$$\phi_4 = \frac{3}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \beta \cdot \cotg(\beta) \quad (2.65)$$

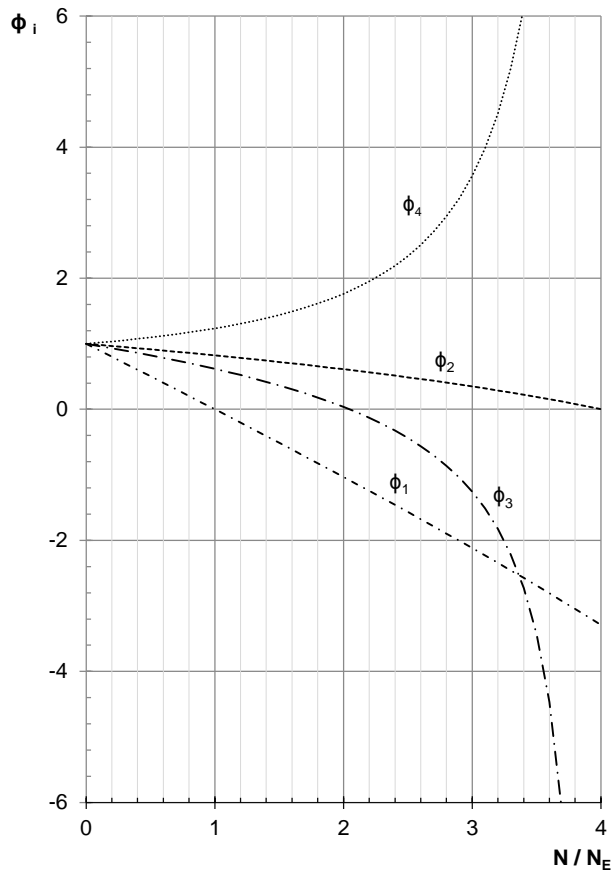


Figura 2.14 – Representação gráfica das funções de estabilidade. (Reis & Camotim, 2001)

2.4.2. Análise de 2ª ordem elástica geometricamente não-linear

De entre as diversas análises de 2ª ordem possíveis de se realizar para o estudo de estruturas considerando os efeitos geometricamente não-lineares serão utilizados neste estudo a:

1. Análise de 2ª ordem rigorosa ou exacta;
2. Análise de 1ª ordem modificada.

Para a análise exacta será formulado o processo incremental e iterativo utilizado para a determinação das trajectórias de equilíbrio.

A análise de 1ª ordem modificada será baseada no Método da Amplificação dos Efeitos de “Sway” preconizado pelo EC3 (Reis & Camotim, 2001).

2.4.2.1. Análise de 2ª ordem exacta

Uma análise de 2ª ordem elástica é caracterizada por relacionar as forças e deslocamentos estabelecendo a equação de equilíbrio na configuração deformada instantânea. A interdependência existente entre a matriz de rigidez, a geometria e os esforços de compressão dos elementos implica a utilização de métodos incrementais-iterativos.

$$[K(q,F)]\{q\} = \underbrace{\{Q\} - \{Q_0\}}_{=\{F\}} \quad (2.66)$$

Esta análise é aplicada em estruturas, que pela sua geometria ou carregamento, não existe uma distinção entre uma trajectória fundamental e uma trajectória de pós-encurvadura, sendo o comportamento estrutural marcado por uma relação não-linear entre o carregamento e os deslocamentos como indicado na Figura 2.15.

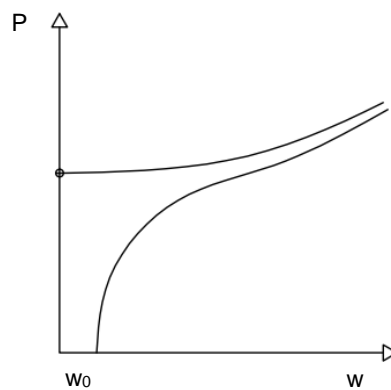


Figura 2.15 – Comportamento não-linear estrutura, tendendo para a trajectória de pós-encurvadura.

A implementação de análises de 2ª ordem exactas no modelo numérico teve por base o Método de Newton-Raphson, o qual consiste num processo incremental e iterativo que determina as configurações de equilíbrio para vários níveis de carga, traçando-se desta forma a trajectória de equilíbrio como ilustrado na Figura 2.16.

O método, considerando o carregamento aplicado à estrutura, faz a sua divisão em incrementos suficientemente pequenos os quais são aplicados sucessivamente (processo incremental), sendo para cada incremento determinada a configuração de equilíbrio por via do processo iterativo.

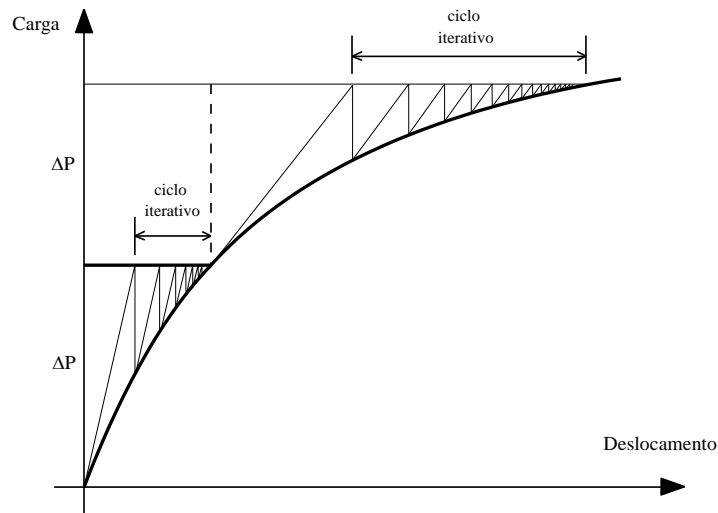


Figura 2.16 – Aproximação numérica ao comportamento não-linear de estruturas por via incremental iterativa. Adaptado de (Chan & Chui, 2000).

A metodologia implementada no modelo numérico, baseada no procedimento proposto em (Chan & Chui, 2000), é constituída pelos passos:

1. Definição do incremento do parâmetro de carga;
2. Cálculo das matrizes de rigidez dos elementos de barra (através da formulação anteriormente apresentada no desenvolver dos elementos finitos usados em análises elásticas lineares e análises lineares de estabilidade: $[K_e]$;
3. Cálculo da matriz de rigidez global da estrutura: $[K(q_i, F_i)]$;
4. Cálculo do incremento dos deslocamentos:

$$\{\Delta q\}_{i+1} = [K(q_i, F_i)]^{-1} \{\Delta F\}_i \quad (2.67)$$

5. Cálculo dos deslocamentos acumulados:

$$\{q\}_{i+1} = \{\Delta q\}_{i+1} \{q\}_i \quad (2.68)$$

6. Actualização das coordenadas da estrutura;
7. Cálculo dos incrementos dos deslocamentos nodais dos elementos: $\{\Delta q_e\}_{i+1}$;
8. Cálculo do incremento das forças nodais resistentes dos elementos:

$$\{\Delta R_e\}_{i+1} = \{K_e\}_i \{\Delta q_e\}_{i+1} \quad (2.69)$$

9. Cálculo das forças nodais resistentes acumuladas dos elementos: $\{R_e\}_{i+1}$;

$$\{R_e\}_{i+1} = \{\Delta R_e\}_{i+1} \{R_e\}_i \quad (2.70)$$

10. Cálculo das forças nodais globais resistentes da estrutura por espalhamento das forças nodais anteriormente calculadas: $\{R\}_{i+1}$;

11. Verificação do equilíbrio por comparação entre o vector global de forças nodais aplicadas e o vector global de forças nodais resistentes:

$$\{\Delta F\}_{i+1} = \{F\}_{i+1} - \{R\}_{i+1} \quad (2.71)$$

12. Cálculo do erro definido por:

$$\text{erro} = (\{\Delta F\}_{i+1} \{\Delta F\}_{i+1}^T) / (\{R\}_{i+1} \{R\}_{i+1}^T) \quad (2.72)$$

13. Actualização do esforço axial de compressão dos elementos.

O referido processo exigindo, alguma complexidade de programação permite obter soluções com um erro bem definido para carregamentos abaixo do nível crítico. De notar que o método poderá não convergir quando num problema sem resistência de pós-encurvadura significativa o valor da carga se aproxima da carga crítica, não sendo facilmente determinado o valor de carga a partir do qual se perde a capacidade de convergência. Outros métodos de análises não-lineares poderão ser implementados para contornar esta deficiência podendo-se para tal consultar (Chan & Chui, 2000).

2.4.2.2. Análise de 1ª ordem modificada (baseado no MAES do EC3)

Uma análise de 2ª ordem baseada em análises de 1ª ordem modificadas consiste num método de quantificação dos efeitos geometricamente não-lineares através de resultados obtidos em análises elásticas-lineares que por via da aplicação de factores de amplificação englobam a quantificação dos efeitos geométricos.

Para pórticos sensíveis aos efeitos globais de segunda ordem, que possuam uma relação entre o parâmetro de carregamento e o respectivo valor crítico, definida por α_{cr} , entre 3 a 10, o EC3 preconiza que estes poderão ser analisados através de uma análise de 1ª ordem modificada contabilizando os efeitos geométricos através do Método da Amplificação dos Efeitos de “Sway” (MAES) ((Chen & Lui, 1991) citado em (Reis & Camotim, 2001)).

Este método quantifica os efeitos geometricamente não-lineares globais aplicando uma separação entre os efeitos de “sway” e os efeitos de “não-sway”. Os efeitos de “não-sway” são definidos como sendo a parcela dos esforços/deslocamentos que o carregamento provoca na estrutura quando esta se encontra contraventada lateralmente. Os efeitos de “sway” são definidos através da diferença entre os esforços/deslocamentos obtidos por uma análise elástica de 1ª ordem e os respectivos esforços/deslocamentos contabilizados nos efeitos de “não-sway”.

Na Figura 2.17 é ilustrado o método de determinação dos efeitos de “sway” para o caso de um pórtico de um piso sujeito a um carregamento genérico.

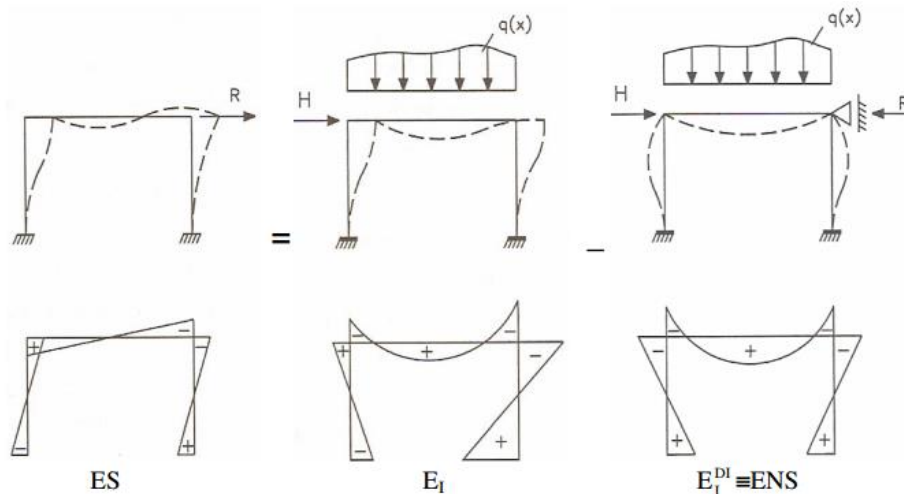


Figura 2.17 – Definição dos efeitos de “sway”. (Reis & Camotim, 2001)

Os efeitos geométricos globais são determinados pela expressão:

$$E_{II} = E_{NS} + \frac{1}{1 - 1/\alpha_{cr}} E_S \quad (2.73)$$

2.5. Integração numérica

Acerca do processo de integração numérica será de mencionar que a integração das matrizes de rigidez e dos vectores de forças de fixação foi realizada com recurso a quadraturas de Gauss. Esta metodologia quando adoptada na integração de funções polinomiais, sendo utilizado um número suficiente de pontos de Gauss, fornece a solução exacta

Este método consiste no cálculo de um integral de uma função polinomial através da multiplicação da mesma função em pontos específicos do seu domínio (pontos de Gauss) com certos coeficientes fornecidos pela teoria da quadratura de Gauss (Fish & Belytschko, 2007), que garantem a exatidão da integração. O número de pontos de Gauss a utilizar para que a integração seja exacta é dado por:

$$n_{P.G.} = \frac{p+1}{2} \quad (2.74)$$

em que p representa o grau do polinómio a ser integrado.

2.6. Algoritmo computacional

A presente secção tem como objectivo descrever a estrutura do algoritmo numérico desenvolvido e implementado em Matlab que tem por base o modelo numérico de elementos finitos que se apresentou anteriormente.

O algoritmo é constituído por uma secção de introdução de dados onde é efectuada a definição geométrica da estrutura e identificado o comportamento mecânico dos materiais adoptados, e uma secção de análise em que se aplicam as análises estruturais desenvolvidas ao longo deste capítulo.

Com o objectivo de simplificar o algoritmo, o cálculo das matrizes de rigidez foi efectuado à parte do algoritmo principal, invocando as respectivas rotinas de cálculo no seguimento das análises estruturais a efectuar.

2.6.1. Introdução de dados

A geometria e os materiais da estrutura são definidos no algoritmo com recurso a estruturas de dados onde se armazenam as características dos vários nós, elementos de barras e secções transversais da estrutura a modelar.

Os nós são definidos pelas suas coordenadas ('coords'), restrições cinemáticas ('incid') e forças aplicadas ('F' e 'F_i') através da seguinte forma:

$$Nos(1) = struct('coords', [0;0], 'incid', [-1, -1, 0], 'F', [0, 0, 0], 'F_i', [0, 0, 0]) \quad (2.75)$$

De notar que *struct* consiste numa função do Matlab com o propósito de criar uma estrutura de array com diversos campos como é ilustrado na expressão anterior.

As condições de apoio poderão ser de total ou parcial restrição dos deslocamentos. Caso se pretenda libertar ou fixar um dos deslocamentos dever-se-á preencher o campo 'incid' com o valor 0 ou -1, respectivamente. Nos casos em que sejam considerados apoios elásticos o valor a inserir no campo 'incid' deverá corresponder à respectiva rigidez.

As forças aplicadas nos nós são divididas em dois campos 'F' e 'F_i'. Para as análises elásticas-lineares, análises estabilidade linear aproximada (matriz de rigidez geométrica) e análises de estabilidade linear exacta (matriz de rigidez total), existindo um único conjunto de forças que é aplicado por inteiro à estrutura, o campo 'F' deverá ser preenchido com o valor das cargas concentradas aplicadas nos nós que pertençam a esse conjunto de acções.

No caso de análises de 2ª ordem geometricamente não-lineares, em que existe uma distinção entre um carregamento inicial que é aplicado na sua totalidade num primeiro incremento e um carregamento variável que será aplicado à estrutura posteriormente de forma incremental, o campo 'F' deverá ser preenchido com as cargas concentradas que pertençam ao carregamento variável e incremental e o campo 'F_i' deverá ser preenchido com as cargas concentradas que pertençam ao carregamento inicial e constante. Esta separação entre carregamento inicial e carregamento variável, que é aplicado posteriormente de forma incremental, é particularmente relevante no estudo geometricamente não-linear de vigas-coluna em que o carregamento de vão e as forças de compressão são aplicadas de forma diferente à estrutura – ver § 5.1.1.1.

Os elementos de barra da estrutura são definidos pelo campo 'L', 'Sec', 'ni', 'nf', 'carreg', 'carreg_i', 'Esf', 'Nod' da seguinte forma:

$$\text{Barras}(1) = \text{struct}('L', 0, 'Sec_1', 1, 'Sec_2', 1, 'Sec_4', 1, 'Sec_5', 1, 'Sec_3', 1, 'ni', 1, 'nf', 2, 'carreg', 0, 'carreg_i', -10, 'Esf', [0., 0., 0., 0., 0., 0.], 'Nod', [0., 0., 0., 0., 0., 0.]); \quad (2.76)$$

Os vários campos 'Sec' deverão ser preenchidos com o número de identificação da secção correspondente à secção inicial, 1/4 de vão, 2/4 de vão, 3/4 de vão e secção final.

Os campos 'ni' e 'nf' correspondem aos nós iniciais e finais das barras, os quais determinam o seu comprimento e orientação no referencial global. Os campos 'L', 'Esf', 'Nod' são campos a preencher durante a execução do programa, os quais correspondem ao comprimento do elemento de barra, vector de esforços e vector de forças nodais definido no referencial global.

Os campos 'carreg' e 'carreg_i', deverão ser preenchidos com os valores dos carregamentos iniciais e variáveis distribuídos no vão dos elementos, de modo semelhante ao referido nos campos das forças concentradas nos nós, sendo a direcção de aplicação perpendicular ao eixo do elemento de barra.

As propriedades das secções transversais das barras são definidas pela sua rigidez axial (campo 'EA') e rigidez de flexão (campo 'EI').

$$\text{Seccao}(1) = \text{struct}('EI', 4e4, 'EA', 4e4); \quad (2.77)$$

2.6.2. Análise de estruturas

Na secção do programa dedicada à análise estrutural é possível definir qual o tipo de análise que se pretende efectuar e quais os resultados a obter. Refira-se que os 4 tipos de análise apresentadas em 2.3, 2.4.1.1, 2.4.1.2 e 2.4.2.1 foram implementadas no algoritmo. Assim é possível efectuar as seguintes análises.

Análise elástica-linear

A análise elástica-linear tem como objectivo a determinação dos deslocamentos independentes globais considerando um comportamento elástico-linear da estrutura (§ 2.3). Tendo em conta os deslocamentos independentes, são apresentados graficamente os diagramas de esforços e a deformada, recorrendo para tal às rotinas 'Esforços' e 'Deformada', respectivamente.

Análise linear de estabilidade aproximada

A análise linear de estabilidade tem como objectivo a determinação de cargas críticas e os respectivos modos de instabilidade (§ 2.4.1.1). Esta análise é efectuada através de matrizes de rigidez que englobam os efeitos geometricamente não-lineares de forma aproximada, as quais foram definidas através dos polinómios de Hermite.

A utilização dos polinómios de Hermite permite que se faça a separação entre a rigidez elástica e a rigidez geométrica dos elementos, pelo que a rigidez total é dada pela equação (2.34).

A determinação de cargas críticas e das deformadas dos modos de instabilidade é efectuada resolvendo o problema de valores e vectores próprios associado.

Análise linear de estabilidade exacta

A análise linear de estabilidade exacta tem como objectivo determinar o valor de cargas críticas recorrendo a matrizes de rigidez exactas (§ 2.4.1.2). O recurso a matrizes de rigidez exactas implica uma dependência não-linear entre a rigidez da estrutura e as cargas aplicadas, pelo que a determinação das cargas críticas é efectuada através de processos iterativos, os quais permitem identificar os zeros do determinante da matriz de rigidez.

O processo iterativo adoptado foi o método da bissecção, o qual permite analisar o determinante em função do parâmetro de carga, identificando trocas de sinal; posteriormente é efectuado um refinamento em torno desse ponto para que o erro da solução seja inferior ao valor admissível.

Análise de 2ª ordem geometricamente não-linear

A análise de 2ª ordem geometricamente não linear tem como objectivo a determinação de trajectórias de equilíbrio de estruturas.

A análise poderá ser efectuada utilizando matrizes de rigidez que quantifiquem os efeitos geometricamente não-lineares de modo aproximado (§ 2.4.1.1) ou exacto (§ 2.4.1.2).

O carregamento é dividido numa parcela inicial, a qual é aplicada na sua totalidade à estrutura no primeiro passo do processo incremental, e num carregamento variável o qual é dividido em incrementos aplicados nos passos seguintes.

O algoritmo, desenvolvido com base no método de Newton-Raphson, é constituído por um processo incremental e por um processo iterativo. No processo incremental a estrutura é sujeita a cargas crescentes até que se atinja o patamar limite da análise e no processo iterativo é determinado o equilíbrio estrutural em cada incremento de carga com um erro relativo de cálculo máximo definido.

2.6.3. Rotinas de cálculo

As funcionalidades das rotinas dividem-se entre o cálculo de matrizes de rigidez globais e a representação de resultados.

2.6.3.1. Matrizes de rigidez

O cálculo de matrizes de rigidez globais é efectuado pelas 3 rotinas:

1. Rotina M_1: Matriz de rigidez elástica;
2. rotina M_2: Matriz de rigidez geométrica linearizada;
3. rotina M_3: Matriz de rigidez total exacta.

Em cada rotina, o valor das componentes da matriz de rigidez global é determinado através de um procedimento “barra-a-barra” constituído pelos seguintes passos genéricos:

1. Cálculo do comprimento e orientação da barra no plano com base nas coordenadas dos respectivos nós.
2. Cálculo da matriz de rigidez elementar;
3. Transformação de coordenadas da matriz elementar;
4. Espalhamento das componentes de rigidez do elemento pelos graus de liberdade globais da estrutura.

As três rotinas apresentadas diferem entre si apenas no passo 2 – *Cálculo da matriz de rigidez elementar*, sendo assim este o ponto analisado de seguida para cada uma das rotinas.

Rotina M_1: Matriz de rigidez elástica

A rotina M_1 no ponto em que processa o cálculo da matriz de rigidez elementar efectua a integração das componentes da matriz de rigidez através das derivadas das funções de aproximação e das propriedades mecânicas do elemento barra. O processo de integração inicia-se com o cálculo dos pontos e coeficientes de Gauss necessários para uma integração exacta dos polinómios correspondentes às funções de aproximação utilizadas.

Para barras de secção variável a rotina determina os coeficientes dos polinómios que descrevem o andamento da inércia e da área ($I(x)$ e $A(x)$ - respectivamente) das secções transversais ao longo dos eixos das barras.

O processo de integração das componentes da matriz prossegue-se com a aplicação da quadratura de Gauss às expressões (2.78) e (2.79).

$$[K_{Axial}] = \int_0^L E(x) A(x) \{\psi'\}^T \{\psi'\} dx \quad (2.78)$$

$$[K_{Viga}] = \int_0^L E(x)I(x) \{\psi''\}^T \{\psi''\} dx \quad (2.79)$$

Rotina M_2: Matriz de rigidez geométrica aproximada

A rotina M_2 apresenta um algoritmo de cálculo das matrizes de rigidez elementares semelhantes ao adoptado na rotina M_1.

O processo inicia-se com a determinação do valor do esforço axial das barras seguindo-se a integração numérica da equação (2.80).

$$[K_{geom.}] = P \int_0^L \{\psi'\}^T \{\psi'\} dx \quad (2.80)$$

Rotina M_3: Matriz de rigidez total exacta

A rotina M_3 recorre às funções de estabilidade apresentadas em § 2.4.1.2, para a determinação das componentes da matriz de rigidez considerando de forma exacta os efeitos geometricamente não-lineares.

A rotina inicia o processo pela determinação do esforço axial dos elementos de barra, sendo este valor considerado na definição das funções de estabilidade, necessárias à determinação da matriz de rigidez.

2.6.3.2. Esforços e deformadas

Por último referem-se duas rotinas, as quais efectuam a representação de diagramas de esforços e de deformadas: 'Esforços' e 'Deslocamentos', respectivamente.

As funções determinam os campos de esforços e de deslocamentos ao longo dos eixos dos elementos, através dos esforços nas secções de extremidade dos elementos e dos deslocamentos independentes globais.

O campo de deslocamentos é determinado efectuando um espalhamento dos deslocamentos independentes globais pelos graus de liberdade locais, considerando as funções de aproximação (polinómios de Hermite) para definição do campo de deslocamentos das barras.

O campo de esforços é determinado de modo semelhante, tendo em conta as derivadas das funções de aproximação, as quais permitem obter as deformações ao longo do eixo das barras em função dos deslocamentos. Considerando a relação linear entre as deformações e os esforços, o campo é determinado e representado graficamente.

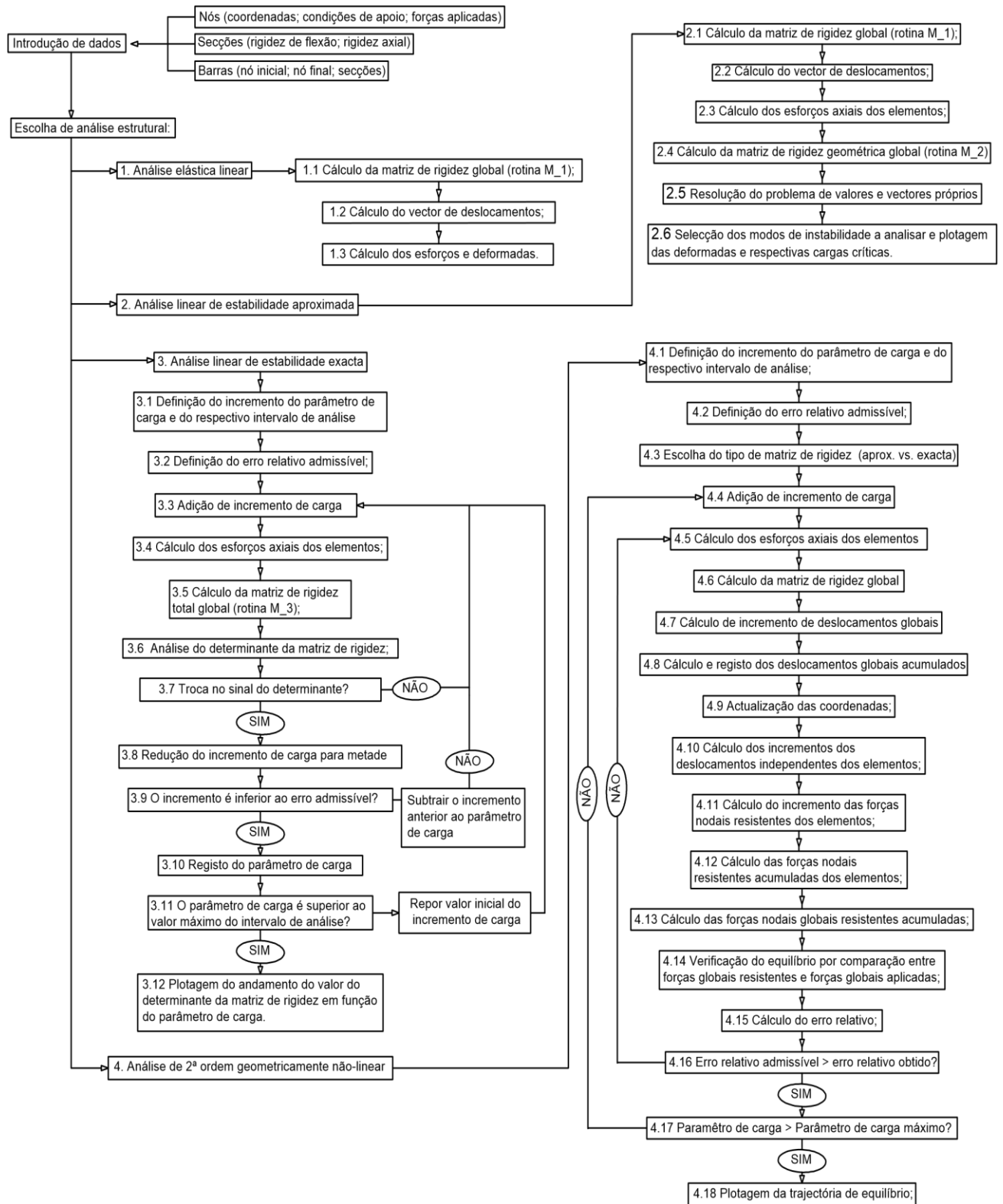


Figura 18 – Fluxograma do algoritmo computacional.

3. Disposições regulamentares (EN1993-1-1)

No presente capítulo são apresentadas algumas das disposições estipuladas pela norma europeia EN1933-1-1 (Eurocódigo 3: Parte 1-1). Pretende fazer-se uma breve introdução dos pontos do eurocódigo a que se recorrerão nos estudos posteriormente apresentados, explicitando-se os tipos de análises de estruturas em regime elástico, os tipos de imperfeições geométricas e a metodologia de verificação de segurança de barras (vigas-coluna).

3.1. Análises globais

Em § 5.2.1, da EN1993-1-1, é indicado que a análise de pórticos metálicos deverá ser realizada através de análises de primeira ordem ou análises de segunda ordem nas quais é contabilizado o efeito da deformação geométrica no cálculo dos esforços internos.

De um modo geral os efeitos geometricamente não-lineares são divididos em efeitos globais (P- Δ) associados aos deslocamentos laterais dos pórticos, e os efeitos locais (P- δ) associados aos desvios dos eixos dos elementos face às respectivas cordas.

O eurocódigo contabiliza estes dois efeitos de natureza não-linear de formas distintas: os efeitos locais são contabilizados através de fórmulas de dimensionamento que têm em consideração a interação entre esforço axial e momentos flectores, salvo excepções em que é exigida uma análise de 2ª ordem exacta, em que estes valores devem ser extraídos directamente da análise estrutural; os efeitos globais, conforme as características do conjunto pórtico-carregamento, são contabilizados ou por análises de 2ª ordem exactas ou análises de 1ª ordem modificadas.

Este regulamento efectua a classificação do conjunto pórtico-carregamento quanto à relevância dos efeitos P- Δ em: pórticos susceptíveis a efeitos geométricos globais de 2ª ordem, os quais deverão contabilizar os efeitos da deformação no cálculo dos esforços, e pórticos não susceptíveis a tais efeitos.

A divisão entre os dois tipos de pórtico-carregamento é efectuada através do parâmetro α_{cr} determinado através da relação entre o parâmetro de carga actuante (λ_{ed}) e o parâmetro de carga correspondente à carga crítica de instabilidade global (λ_{cr}) determinado com base na rigidez elástica dos elementos.

$$\alpha_{cr} = \frac{\lambda_{ed}}{\lambda_{cr}} \quad (3.1)$$

$$\alpha_{cr} < 10 \rightarrow \text{Pórtico sensível aos efeitos de 2ª ordem globais.} \quad (3.2)$$

$$\alpha_{cr} \geq 10 \rightarrow \text{Pórtico pouco sensível aos efeitos de 2ª ordem globais.} \quad (3.3)$$

Os pórticos susceptíveis aos efeitos geométricos globais deverão analisar-se através de :

1. Análises de 2ª ordem geometricamente não-lineares para pórticos em que $\alpha_{cr} < 3$, nos quais os efeitos da deformação amplificam consideravelmente os esforços;
2. Análises de 1ª ordem modificadas baseadas no Método da Amplificação dos Efeitos de “Sway” (MAES) para pórticos em que $3 < \alpha_{cr} < 10$.

3.2. Imperfeições geométricas

Em § 5.3.1 o eurocódigo estipula que a análise de estruturas metálicas deverá contabilizar os efeitos provocados pelas imperfeições geométricas (desvios na verticalidade, desvios aos eixos das barras) e tensões residuais.

Estes efeitos, na ausência de métodos mais precisos, poderão ser incorporados na análise estrutural através de imperfeições geométricas equivalentes, nomeadamente:

1. Imperfeições globais dos pórticos;
2. Imperfeições locais dos elementos.

De acordo com § 5.3.2 da referida norma, as imperfeições globais em pórticos susceptíveis a efeitos geometricamente não-lineares deverão ser caracterizadas por um ângulo de desvio vertical da posição da corda dos montantes, como ilustrado na Figura 3.1.

O ângulo de desvio (ϕ) é definido pelos parâmetros:

$$\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m \quad (3.4)$$

em que:

$$\phi_0 = 1/200, \text{ valor base da deformação global} \quad (3.5)$$

$$\alpha_h = 2/\sqrt{h}, \quad 2/3 \leq \alpha_h \leq 1,0, \text{ factor de redução devido à altura do piso} \quad (3.6)$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + \frac{1}{m})}, \text{ factor de redução devido ao número de colunas do piso (m)} \quad (3.7)$$

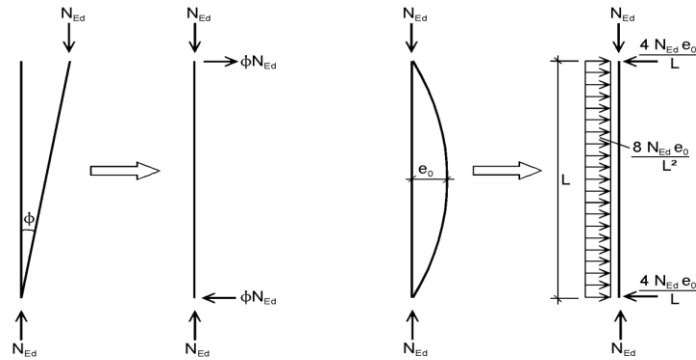


Figura 3.1 – Imperfeições geométricas da EN1993-1-1.

As imperfeições locais a adoptar, definidas por uma geometria parabólica dos elementos do pórtico, são determinadas em função da geometria da secção, do eixo de flexão e do respectivo processo de fabrico. Na Tabela 3.1, são indicadas as flechas a meio vão a adoptar em função da respectiva curva de dimensionamento ao Estado Limite Último (ELU) de resistência à encurvadura. Em anexo apresenta-se a Tabela 6.2 da EN1993 na qual se pode identificar qual a curva de dimensionamento a adoptar em função do tipo de perfil.

Tabela 3.1 – Definição da imperfeição geométrica de barra.

Curvas de dimensionamento	a ₀	a	b	c	d
Imperfeições a meio vão (e ₀)	L/350	L/300	L/250	L/200	L/150

Em § 5.3.2 é indicado que, no âmbito da verificação da segurança ao ELU de resistência à encurvadura, a consideração directa de imperfeições locais na geometria da estrutura para uma análise global é dispensável, sendo os efeitos de 2ª ordem P-δ contabilizados através das expressões de dimensionamento e verificação de segurança de vigas-coluna.

Contudo em pórticos susceptíveis a efeitos de 2ª ordem, às imperfeições globais dever-se-ão adicionar as imperfeições locais da Tabela 3.1 para os elementos que verifiquem as condições de:

1. Ocorrência do momento resistente da ligação em pelo menos uma das extremidades;
2. Esforço axial actuante superior a 0,25% do carregamento crítico admitindo o elemento como uma coluna de Euler.

3.3. Verificação da segurança ao Estado Limite Último de Encurvadura

3.3.1. Elementos uniformes em compressão

Para elementos de pórticos susceptíveis aos efeitos das deformações, que não verifiquem as condições do ponto anterior, a verificação da segurança poderá ser efectuada com base nas fórmulas de dimensionamento fornecidas pela EN1993.

Em § 6.3.1 na EN1993 é estipulado que a verificação de uma coluna, solicitada unicamente por um esforço de compressão, deve efectuar-se através da relação entre o esforço solicitante e o correspondente esforço resistente.

$$N_{ed} / N_{b,rd} \leq 1,0 \quad (3.8)$$

O esforço axial resistente aos fenómenos de encurvadura deverá ser determinado adoptando como critério de rotura a entrada no regime plástico da fibra mais solicitada, incorporando no cálculo os efeitos das imperfeições geométricas, das tensões residuais resultantes do processo de fabrico, bem como o efeito de amplificação dos esforços provocado pela deformação.

Considere-se a equação diferencial de uma coluna de Euler:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} E(x)I(x) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.9)$$

cuja solução analítica definida na forma de uma série de Fourier é:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cdot \text{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (3.10)$$

Assumindo um conjunto de imperfeições geométricas (w_0), também definidas em série de Fourier, sendo a amplitude da componente de ordem m representada por $w_{0,m}$, a solução da equação de equilíbrio poderá ser reescrita em função das séries de Fourier do campo de deslocamentos e das imperfeições (Reis & Camotim, 2001).

$$w_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{0,m} \cdot \text{sen} \frac{m \pi x}{L} \quad (3.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-EI \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 + P \right] w_n \text{sen} \frac{n \pi x}{L} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-EI \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \right] w_{0,m} \text{sen} \frac{m \pi x}{L} \quad (3.12)$$

Igualando os coeficientes correspondentes a cada termo sinusoidal obtém-se a relação entre a amplitude da deformação inicial da viga-coluna e a deformação existente devido aos esforços de compressão, dada pela expressão:

$$w_m = \frac{EI \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2}{EI \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 - P} w_0 \quad (3.13)$$

Reescrevendo a anterior expressão em função dos carregamentos críticos:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr,i}}} w_{0,m} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (3.14)$$

e desprezando-se a contribuição dos modos superiores ao primeiro, pode concluir-se que a deformação inicial existente na viga é amplificada por um factor:

$$w = w_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (3.15)$$

A tensão máxima presente na viga-coluna é, então, determinada pela expressão:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M c}{I} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{c \cdot w_0}{i^2} \frac{P_E}{P_E - P} \right] \quad (3.16)$$

em que, A representa a área da secção transversal do perfil; c representa a distância da fibra mais afastada da linha neutra elástica; I representa a inércia da secção transversal para o eixo de flexão correspondente; w_0 representa a flecha a meio vão correspondente à imperfeição inicial.

Sendo o critério de rotura a limitação da tensão máxima do perfil à tensão de cedência do aço (f_y), a tensão média máxima, definida por P/A , será dada em função da tensão de cedência pela fórmula de Perry:

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left\{ [f_y + \sigma_E(1 + \theta)] - \sqrt{[f_y + \sigma_E(1 + \theta)]^2 - 4 f_y \sigma_E} \right\}, \theta = \frac{w_0 \cdot c}{i^2} \quad (3.17)$$

em que, σ_m representa a tensão média; σ_E representa a tensão média correspondente à carga de Euler; e θ representa um parâmetro proporcional à imperfeição geométrica a meio vão.

Numa coluna axialmente carregada a tensão axial média correspondente à carga crítica é definida por:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 E \frac{i^2}{L_{cr}^2} = \pi^2 E \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.18)$$

em que λ representa a esbelteza geométrica definida pela razão entre o comprimento de encurvadura e o raio de giração da secção na direcção de encurvadura em análise.

Considerando simultaneamente os fenómenos de encurvadura e de plastificação da secção, define-se como esbelteza padrão (λ_1) o valor da esbelteza geométrica, sendo a tensão média correspondente à carga crítica igual à tensão de cedência do material.

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (3.19)$$

A partir da definição da esbelteza geométrica e da esbelteza padrão define-se o conceito de esbelteza normalizada:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{1}{93,9 \varepsilon} \quad (3.20)$$

sendo ε o factor que contabiliza a variação da resistência do aço face a uma resistência padrão de 235 MPa (S235: $\varepsilon = 1,0$; S275: $\varepsilon = 0,92$; S355: $\varepsilon = 0,81$).

Reescrevendo a fórmula de Perry em função do coeficiente de redução χ , definido como a razão entre a máxima tensão axial média a que a secção poderá ser sujeita e a tensão de cedência do material, e da esbelteza normalizada $\bar{\lambda}$ obtém-se a expressão:

$$1 = \chi + \chi \theta \frac{1/\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}^2 - \chi} \quad (3.21)$$

Escrevendo a expressão em ordem a χ obtém-se a expressão preconizada pelo EC3:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1,0 \quad (3.22)$$

em que, ϕ é definido por:

$$\phi = 0,5 \left[1 + \theta + \bar{\lambda}^2 \right] \quad (3.23)$$

Os efeitos das imperfeições geométricas e tensões residuais são contabilizados através de uma imperfeição geométrica equivalente quantificada através da parcela θ , a qual é definida de acordo com o eurocódigo por uma função da esbelteza normalizada e de um parâmetro α .

$$\theta = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) \quad (3.24)$$

Notar que para $\bar{\lambda} < 0,2$ o factor de redução de resistência axial é unitário.

O parâmetro α é definido em função da curva de dimensionamento adoptada de acordo com a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Factores de imperfeição associados às curvas de dimensionamento.

Curva de dimensionamento	a ₀	a	b	c	d
Factor de imperfeição	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Na Figura 3.2 são representadas as curvas de dimensionamento de colunas a adoptar em função do parâmetro de imperfeição de acordo com o eurocódigo.

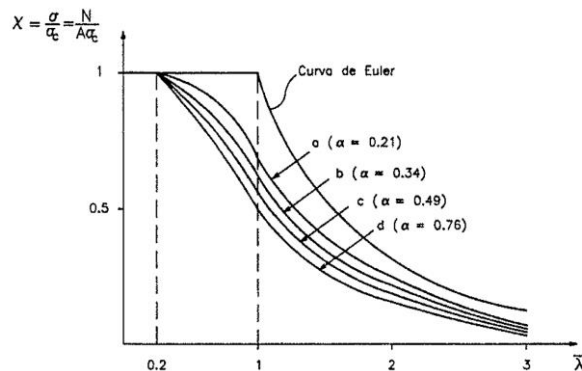


Figura 3.2 – Curvas de dimensionamento do EC3. (Reis & Camotim, 2001)

De notar que as imperfeições a meio vão, incorporadas na definição das curvas de dimensionamento, não são equivalentes às apresentadas anteriormente na Tabela 3.1, podendo ser determinado o seu valor em função da esbelteza normalizada e dos parâmetros geométricos da secção do perfil pela expressão:

$$w_0 = \frac{i^2}{c} (\bar{\lambda} - 0,2) \quad (3.25)$$

3.3.2. Vigas-coluna de secção uniforme

A verificação de elementos em compressão e flexão é estipulado em § 6.3.3 na EN1993 através das fórmulas de interação de esforços, exceptuando situações em que os efeitos geométricos não exijam análises não-lineares:

$$\frac{N_{ed}}{\chi_y N_{rk}/\gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{\Delta M_{y,ed} + M_{y,ed}}{\chi_{LT} M_{y,rk}/\gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{\Delta M_{z,ed} + M_{z,ed}}{M_{z,rk}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (3.26)$$

$$\frac{N_{ed}}{\chi_z N_{rk}/\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,ed}}{\chi_{LT} M_{y,rk}/\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{M_{z,ed}}{M_{z,rk}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (3.27)$$

em que, y e z, correspondem, respectivamente, aos eixos de maior e menor inércia; N_{rk} , $M_{y,rk}$, $M_{z,rk}$, correspondem aos esforços resistentes da secção; k_{yy} , k_{yz} , k_{zy} , k_{zz} , correspondem a factores de

interacção entre o esforço axial e os momentos flectores, definidos para os casos de estudo pelo Método 2 do Anexo B do EC3; χ_y , χ_z , correspondem a factores de redução do esforço axial resistente devido a fenómenos de encurvadura; χ_{LT} corresponde ao factor de redução da resistência à flexão em torno do eixo y por efeitos de instabilidade por flexão-torção; e γ_{M1} corresponde ao factor de minoração da resistência do material, que para o caso dos pórticos estudados à frente será 1,0.

No caso de pórticos, os factores de redução χ_y e χ_z , bem como os factores de interacção k_{ij} (para definição de dos factores k_{ij} ver Anexo 1), são determinados considerando um comprimento de encurvadura igual ao comprimento real dos elementos.

As fórmulas de interacção, sendo baseadas num diagrama de momentos uniforme, recorrem aos factores definidos na Tabela B.3 do EC3 (C_{my} , C_{mz} - ver Anexo I) para contabilizar a diferença nos diagrama de momentos flectores face ao modelo base.

4. Exemplos de aplicação do modelo numérico

No seguimento deste capítulo apresentam-se alguns exemplos simples de aplicação do modelo numérico, com o objectivo de analisar a qualidade das análises implementadas numericamente, comparando resultados numéricos com soluções analíticas.

4.1. Análises lineares de estabilidade

De seguida são apresentados 4 problemas de estabilidade bifurcacional com solução analítica definida, os quais foram analisados numericamente com recurso às análises lineares de estabilidade aproximada e exacta.

Os problemas estudados e apresentados seguidamente são: coluna bi-encastada, coluna bi-encastada com um encastramento deslizante, pórtico de montantes encastrados e barra de secção bi-simétrica de altura e largura linearmente variáveis.

A análise destes exemplos tem como objectivo confirmar que as matrizes de rigidez exactas obtidas numericamente fornecem resultados de acordo com as soluções analíticas.

Confirmando a fiabilidade dos resultados, efectua-se uma análise da capacidade de convergência das soluções obtidas através de matrizes de rigidez aproximadas em função do nível de discretização dos elementos estruturais.

4.1.1. Coluna bi-encastada

Considere-se a coluna bi-encastada da Figura 4.1, sujeita ao carregamento axial de compressão indicado.

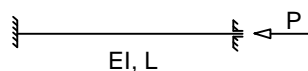


Figura 4.1 - Representação da barra bi encastrada.

A opção por uma viga bi-encastada tem o seu interesse pela maior variação do campo de deslocamentos dos modos de encurvadura ao longo do eixo da barra.

No estudo considerou-se uma coluna com o comprimento e rigidez de flexão indicados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades da barra bi-encastada.

L (m)	EI (kN.m ²)
4,0	4,00E+04

Foi realizado um conjunto de análises constituído por uma análise de estabilidade exacta e quatro análises de estabilidade aproximadas, utilizando discretizações de 2 a 5 elementos finitos para a

modelação da coluna, conforme ilustrado na Figura 4.2. Nas análises efectuadas estudaram-se apenas os dois primeiros modos de encurvadura.

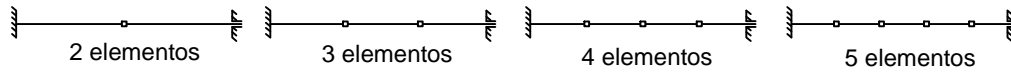


Figura 4.2 - Discretizações da estrutura.

Uma análise analítica fornece como solução exacta do problema o resultado da equação (4.1).

$$P_1 = \pi^2 \frac{EI}{(0,5 L)^2} = 98696,0 \text{ (kN)} \quad (4.1)$$

Na Tabela 4.2 encontram-se os valores dos carregamentos críticos determinados pela análise numérica aproximada (análise linear de estabilidade aproximada – matriz de rigidez geométrica) e pela análise numérica exacta (análise linear de estabilidade exacta – matriz de rigidez total), sendo na Figura 4.3 representado o andamento do determinante da matriz de rigidez exacta em função do valor do carregamento axial.

Tabela 4.2 – Valores de carregamentos críticos e respectivos erros relativos em %.

Nº El.	P 1º Modo (kN)	Erro 1º Modo (%)	P 2º Modo (kN)	Erro 2º Modo (%)
2	100000,2	1,32%	300000,5	48,58%
3	100860,7	2,19%	204440,0	1,25%
4	99400,0	0,71%	207100,3	2,57%
5	99012,3	0,32%	204330,2	1,20%
Exacta	98696,1	(-)	201907,3	(-)

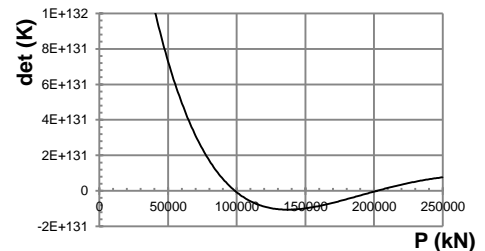


Figura 4.3 - Determinante da matriz de rigidez exacta.

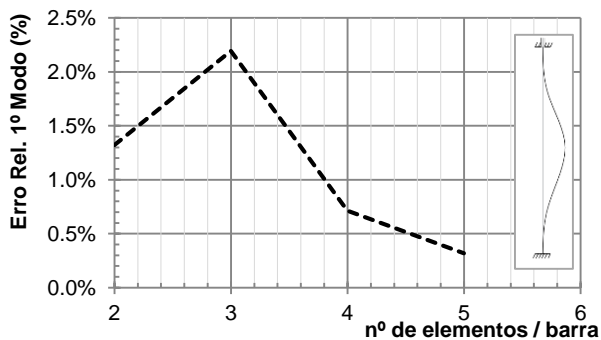


Figura 4.4 – Erro relativo obtido para o primeiro modo de instabilidade.

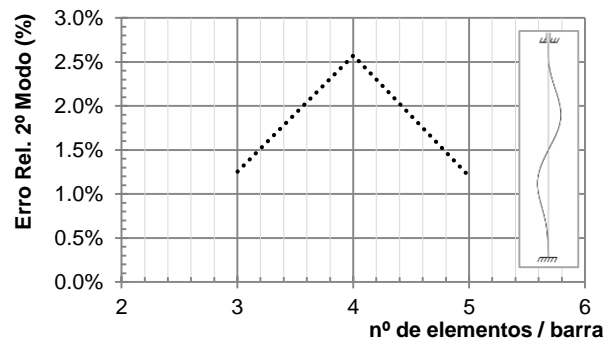


Figura 4.5 – Erro relativo obtido para o segundo modo de instabilidade.

Nos gráficos da Figura 4.4 e da Figura 4.5 evitou representar-se o erro relativo associado ao segundo modo para uma discretização com dois elementos, pois como se pode ver na Tabela 4.2, o seu valor é muito superior a todos os outros, causando assim um problema de escala na representação gráfica. O valor do erro relativo para este caso de discretização deve-se à grande deficiência que as funções de aproximação de Hermite têm para aproximar o campo de deslocamentos exacto.

Dos resultados apresentados pode constatar-se que a análise numérica exacta tem capacidade para determinar com bastante rigor o valor da solução do carregamento crítico do primeiro modo, estando de acordo com o resultado analítico (4.1).

Por comparação dos resultados numéricos obtidos pela via exacta e aproximada, observa-se que o uso de um grau de discretização adequado garante a convergência das soluções, obtendo-se erros relativos pouco superiores a 1% em nos modos de instabilidade analisados.

4.1.2. Coluna bi-encastrada com deslocamentos de “sway” no topo

Considere-se o caso de uma coluna bi-encastrada com a possibilidade de deslocamentos laterais no topo sujeita ao carregamento axial de compressão, conforme indicado na Figura 4.6.

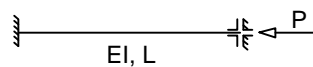


Figura 4.6—Representação da barra bi-encastrada com deslocamentos de “sway” no topo.

No estudo considerou-se uma coluna com propriedades idênticas à coluna do exemplo anterior (Tabela 4.1).

As condições de apoio consideradas conferem à coluna um comprimento de encurvadura de valor igual ao seu comprimento geométrico, pelo que a solução analítica para o valor da carga crítica do primeiro modo, com base na expressão (4.1), é 24674,0 kN. De notar que a solução analítica da carga crítica do segundo modo de instabilidade é igual ao valor obtido para a carga crítica do primeiro da coluna bi-encastrada (98696,0 kN).

A aplicação do mesmo procedimento adoptado anteriormente, permite obter os resultados apresentados na Tabela 4.3, sendo na Figura 4.7 representado o andamento do determinante da matriz de rigidez exacta em função do valor do carregamento axial.

Tabela 4.3 - Carregamentos críticos e respectivo erro relativo.

Nº el.	P 1º Modo (kN)	Erro 1º Modo (%)	P 2º Modo (kN)	Erro 2º Modo (%)
2	24859,6	0,75%	100000,0	1,32%
3	24713,0	0,16%	100857,9	2,19%
4	24686,6	0,05%	99438,5	0,75%
5	24679,2	0,02%	99012,5	0,32%
Exacta	24674,0	(-)	98696,0	(-)

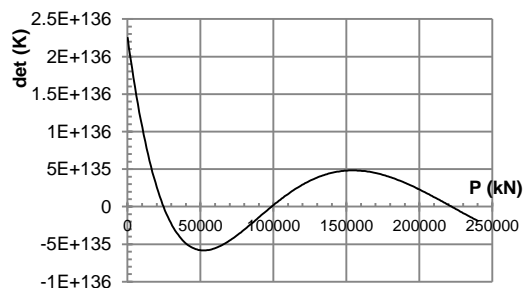


Figura 4.7 – Determinante da matriz de rigidez.

Como se pode observar, as matrizes de rigidez exactas fornecem resultados iguais aos que são fornecidos pelas soluções analíticas.

Note-se que, como referido anteriormente, os erros relativos para a barra bi-encastada são sempre superiores, em cada modo, aos obtidos para a coluna com deslocamentos de “sway”, devido à maior variação dos campos de deslocamentos dos modos de instabilidade, conforme anteriormente referido.

Nas Figuras 4.8 e 4.9 são apresentados os valores percentuais dos erros relativos obtidos da análise de estabilidade linear aproximada em função do número de elementos finitos adoptados, juntamente com a representação gráfica dos modos de encurvadura.

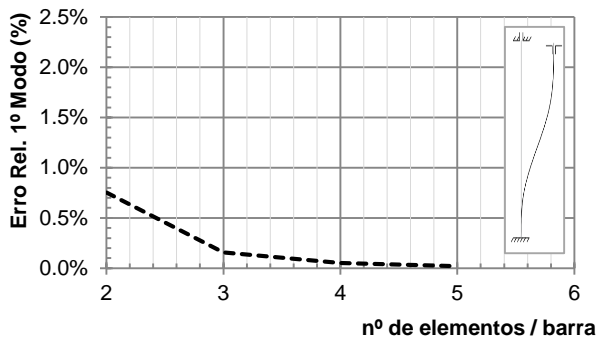


Figura 4.8 – Erro relativo obtido para o primeiro modo de instabilidade.

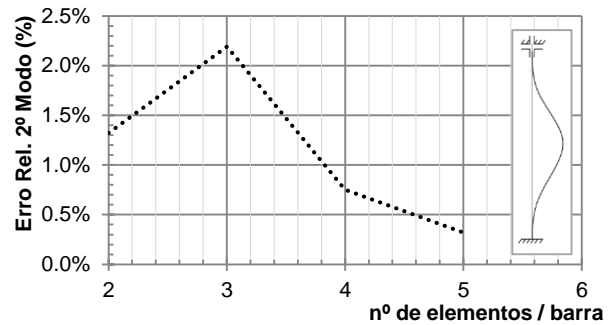


Figura 4.9 – Erro relativo obtido para o segundo modo de instabilidade.

Como se constata, os resultados numéricos obtidos com matrizes de rigidez aproximadas convergem para a solução exacta, obtendo-se erros relativos da ordem de 1% para discretizações de 4 elementos por barra.

4.1.3. Pórtico simples de um piso

Na sequência da análise da influência da discretização da estrutura na qualidade das soluções determinadas através de uma análise de estabilidade aproximada, efectuou-se o estudo com o caso de um pórtico simples de um piso com encastramento da base dos dois montantes. Na Figura 4.10 indica-se o carregamento do pórtico. As suas propriedades geométricas e mecânicas são apresentadas na Tabela 4.4.

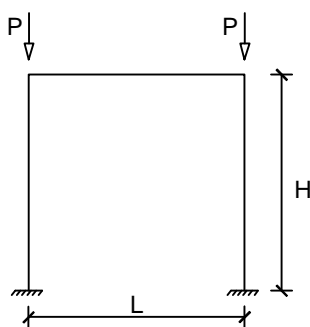


Tabela 4.4 - Propriedades e geometria do pórtico.

H (m)	L (m)	EI (kN.m ²)
4,0	4,0	4,00E+04

Figura 4.10 – Pórtico e respectivo carregamento.

Foram efectuadas 4 análises lineares de estabilidade do pórtico, uma com recurso a matrizes de rigidez exactas e 3 com matrizes de rigidezes aproximadas e discretizações de 2 a 4 elementos finitos

por elemento (montantes e travessa), como indicado na Figura 4.11. Os valores críticos do parâmetro de carga para cada análise são indicados na

Tabela 4.5, representando-se na Figura 4.12 o andamento do determinante da matriz de rigidez exacta em função do valor do carregamento axial.

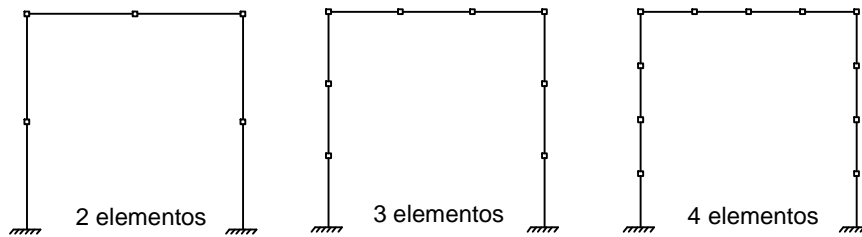


Figura 4.11 - Discretizações da estrutura.

Tabela 4.5 - Carregamentos críticos e respectivo erro relativo.

Nº El.	P 1º Modo (kN)	Erro 1º Modo (%)	P 2º Modo (kN)	Erro Rel. 2º Modo (%)
2	18481,0	1,34%	64426,0	1,69%
3	18437,7	1,10%	63421,7	0,10%
4	18429,0	1,05%	63114,7	0,38%
Exacta	18237,0	(-)	63357,6	(-)

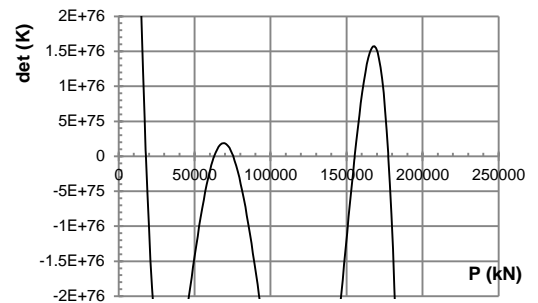


Figura 4.12 – Determinante da matriz de rigidez.

Na Figura 4.13 e na Figura 4.14 são apresentados os erros relativos dos valores das cargas críticas obtidas por via de uma análise de estabilidade aproximada face à solução obtida por uma via exacta.

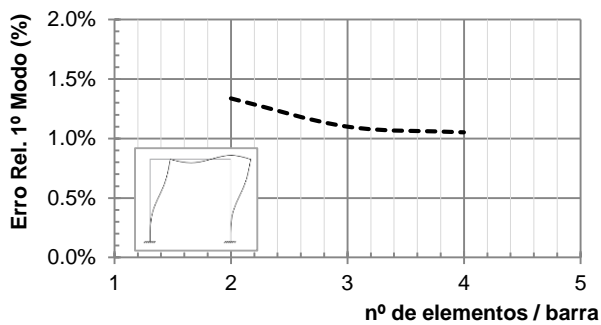


Figura 4.13 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 1º modo de instabilidade.

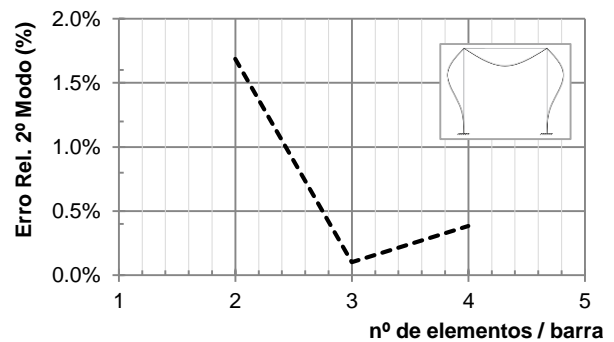


Figura 4.14 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 2º modo de instabilidade.

Nota-se que a convergência do primeiro modo é inferior à do segundo, podendo este facto ser explicado pela maior variação do campo de deslocamentos.

4.1.4. Coluna em consola de secção bi-simétrica variável

O modelo numérico foi também desenvolvido tendo em conta a análise de colunas de inércia variável, tendo sido analisada a influência da discretização na qualidade das soluções. Considerou-se uma barra de secção simétrica com dimensões linearmente variáveis ao longo do eixo, o que implica que a respectiva inércia seja definida por um polinómio do quarto grau.

Considere-se uma coluna carregada axialmente com uma secção de dimensão proporcional ao afastamento à origem do eixo longitudinal (eixo x), conforme representado na Figura 4.15

As dimensões da coluna são definidas recorrendo aos parâmetros a e b , os quais correspondem, respectivamente, às distâncias à origem do eixo x da secção inicial e final da barra, sendo o comprimento da coluna definido pela diferença entre estes dois valores.

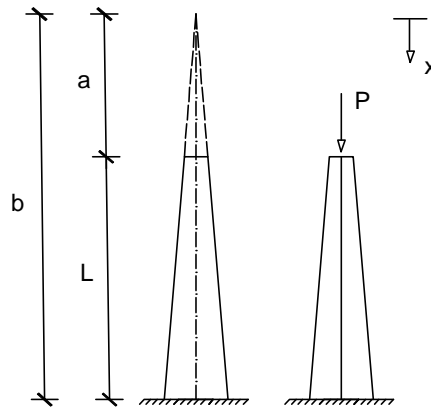


Figura 4.15 - Coluna de secção variável encastada (Theodore Von Kármán, 1940).

A função que define a variação da inércia ao longo do eixo x é dada pela expressão (4.2), em que I_0 representa o valor da inércia da barra na secção de encastamento.

$$I(x) = I_0 \left(\frac{x}{b} \right)^4 \quad (4.2)$$

As propriedades geométricas da coluna são apresentadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Coluna de secção variável: propriedades geométricas.

a (m)	b (m)	L (m)	E (kPa)	I_{base} (m ⁴)
1,0	5,0	4,0	2,00E+08	2,00E-04

A equação de equilíbrio da coluna, escrita em função do campo de deslocamentos, com secção linearmente variável e carregada axialmente é definida por:

$$EI_0 \left(\frac{x}{b} \right)^4 \frac{d^2 w}{dx^2} + N \cdot w = 0 \quad (4.3)$$

As soluções da equação (4.3) são determinadas analiticamente através da resolução das equações (4.4) e (4.5). A determinação dos valores do parâmetro α que cumprem a equação (4.4) e a sua posterior inserção na equação (4.5) permite a determinação dos vários carregamentos críticos de cada modo. (Theodore Von Kármán, 1940)

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{L} \alpha \quad (4.4)$$

$$P_k = \alpha_n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{EI_0}{L^2} \quad (4.5)$$

Tendo como referência a solução analítica definida por Von Kármán, apresentam-se os resultados obtidos através de uma análise de estabilidade aproximada por via do MEF.

Consideraram-se duas abordagens para a modelação da estrutura. Numa primeira abordagem (Abordagem 1), de acordo com a formulação do método de Rayleigh-Ritz (equação (2.43)), as componentes da matriz de rigidez dos elementos são determinadas através da integração do produto do polinómio de inércia de quarto grau ($I(x)$) com as derivadas de segunda ordem das funções de aproximação de Hermite:

$$[K] = \int_0^L EI_0 \left(\frac{x}{b}\right)^4 \{\psi''\}^T \{\psi''\} \{w\} dx \quad (4.6)$$

A influência da discretização foi avaliada modelando a estrutura com 1 a 7 elementos finitos, sendo indicados na Tabela 4.7 os valores das cargas críticas obtidos para os dois primeiros modos de instabilidade e o respectivo erro relativo à solução exacta de Von Kármán.

Tabela 4.7 – Resultados obtidos pela Abordagem 1.

Nº El./Barra	P 1º Modo (kN)	Erro Rel. 1º Modo(%)	P 2º Modo (kN)	Erro Rel. 2º Modo(%)
1	909.1	37.59%	12692.8	342.79%
2	687.4	3.98%	3975.0	38.67%
3	672.3	1.71%	3125.0	9.02%
4	671.0	1.56%	2989.7	4.27%
5	669.0	1.26%	2983.1	4.06%
6	667.5	0.95%	2981.6	3.99%
7	665.0	0.65%	2967.0	3.50%
Sol. Exacta (Von Kármán)	660.7	(-)	2866.5	(-)

Simultaneamente considerou-se um outro método de resolução mais simples, mas menos preciso, que se designou por Abordagem 2; considera-se a modelação efectuada a partir de barras de secção constante definidas de forma a aproximar o polinómio do quarto grau da inércia.

Para a definição do valor da inércia dos troços de secção constante considera-se o valor da inércia da secção média.

Notar que o número de pontos de Gauss foram sempre ajustados de modo a que as integrações sejam sempre efectuadas de modo exacto.

Os erros relativos em valor percentual associados às cargas críticas obtidas por via do modelo numérico face à solução exacta fornecida por Von Kármán são apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 - Resultados obtidos pela Abordagem 2.

Nº El./Barra	P 1º Modo (kN)	Erro Rel. 1º Modo(%)	P 2º Modo (kN)	Erro Rel. 2º Modo(%)
1	805.2	21.84%	10426.1	263.71%
2	559.0	-15.39%	6235.0	117.51%
3	540.3	-18.27%	4144.9	44.56%
4	555.1	-16.00%	3303.1	15.23%
5	575.0	-12.97%	2951.5	2.95%
6	592.7	-10.40%	2796.7	-2.46%
7	607.1	-8.13%	2734.2	-4.62%
Sol. Exacta (Von Kármán)	660.7	(-)	2866.5	(-)

A representação gráfica dos valores apresentados anteriormente está presente na Figura 4.16 e na Figura 4.17.

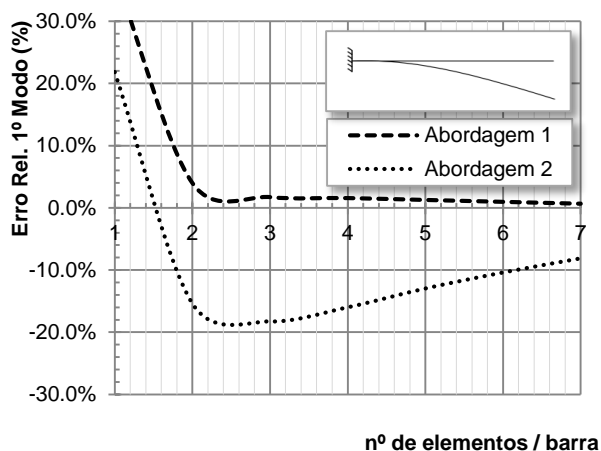


Figura 4.16 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 1º modo de instabilidade.

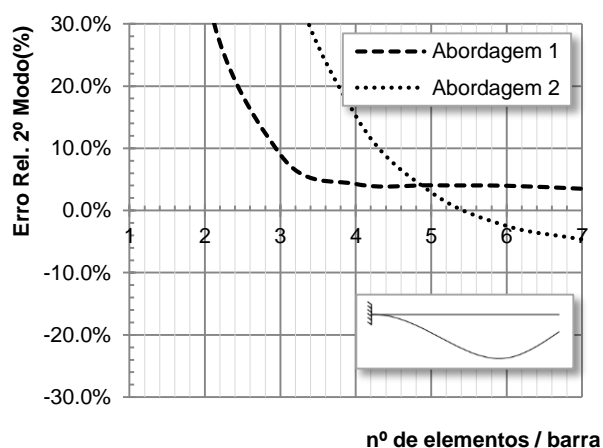


Figura 4.17 – Valor do carregamento crítico correspondente ao 2º modo de instabilidade.

Dos resultados obtidos, pode concluir-se que à adopção da Abordagem 2 para a modelação de colunas de secção variável correspondem soluções com erros elevados, mesmo considerando uma elevada discretização.

Nos gráficos pode verificar-se a rapidez com que a Abordagem 1 converge para erros perto de 2%, bastando uma discretização de 3 elementos finitos para tal.

Os resultados comprovam que a consideração do polinómio de quarto grau na integração da matriz de rigidez, mesmo quando utilizando funções de aproximação de Hermite, permitem resultados bastante próximos da solução exacta.

4.2. Análise de 2ª ordem geometricamente não-linear

Como exemplo de aplicação da análise de 2ª ordem geometricamente não-linear, considerou-se uma viga-coluna simplesmente apoiada constituída por um perfil IPE200 com comprimento de 4 metros, como ilustrado na Figura 4.18.

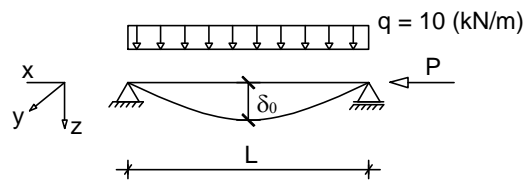


Figura 4.18 – Exemplo de aplicação de viga-coluna.

A geometria da viga é constituída por uma imperfeição local parabólica com um desvio ao eixo de $L/300$ na secção de meio vão ($\delta_0 = 0,0133$ m).

O carregamento aplicado na viga é constituído por uma carga constante distribuída no vão com o valor de 10 kN/m ($\delta_1 = 0,00859$ m), o que corresponde a uma flecha inicial total a meio vão de 0,0219 m, e por uma carga axial paramétrica que é posteriormente aplicada em incrementos de 1% da carga crítica do primeiro modo de instabilidade.

Apresenta-se na Figura 4.19 o andamento do determinante da matriz de rigidez e os valores das cargas críticas dos primeiros três modos de instabilidade, os quais foram determinados através de uma análise de estabilidade exacta, a qual permite, por comparação face à análise aproximada, obter desde logo os valores das cargas críticas com a maior precisão possível.

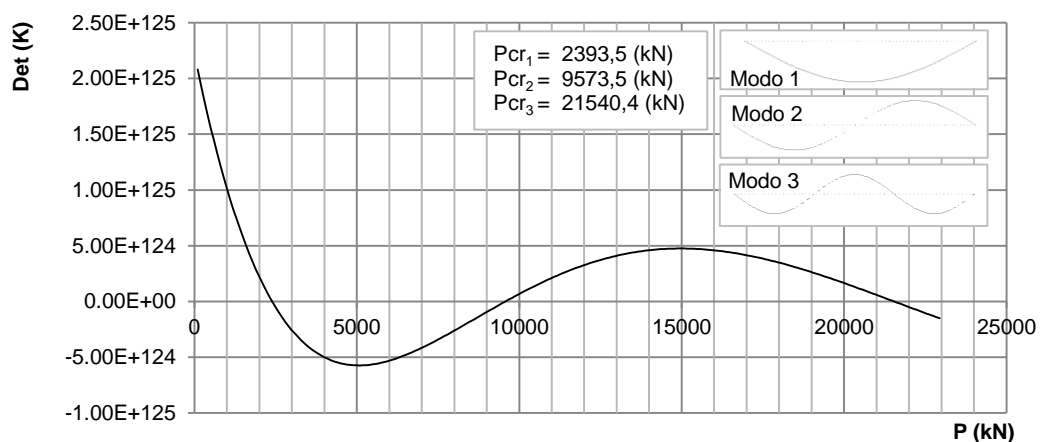


Figura 4.19 – Determinação da carga crítica da viga-coluna.

O valor da carga crítica do primeiro modo de instabilidade foi utilizado para estabelecer o parâmetro de carga axial máximo a aplicar nas análises de 2ª ordem aplicadas à viga.

A modelação da viga, para as análises de 2ª ordem efectuadas, foi realizada recorrendo a 8 elementos finitos de igual comprimento, considerando uma matriz de rigidez elástica geometricamente não-linear aproximada.

Com o objectivo de efectuar uma análise de sensibilidade aos efeitos provocados pelos valores adoptados como erro relativo máximo do método de Newton-Raphson (ver expressão (2.72)) sobre a convergência do modelo, foi realizado um conjunto de análises em que se estudou a variação do campo de deslocamentos e o número médio de iterações por incremento de carga.

Entende-se por variação do campo de deslocamentos como sendo a diferença entre campos de deslocamentos determinados com valores diferentes de erros relativos máximos admitidos (ver expressão (2.72)). Esta é determinada de modo simplificado analisando a diferença dos deslocamentos na secção de meio vão.

Na Tabela 4.9 apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 4.9 – Variação dos deslocamentos em função do erro relativo máximo.

Erro relativo (Newton-Raphson)	1,00E-01	1,00E-03	1,00E-05	1,00E-07	1,00E-09
Iterações/Incremento	2,00	2,03	2,21	2,72	3,24
$\Delta\delta$ (m)	(-)	3,163E-02	8,754E-03	6,418E-04	1,946E-05

Na Tabela 4.9 observa-se que a variação dos deslocamentos nas soluções decresce rapidamente com pequenas variações no número médio de iterações por incremento.

A consideração de um erro relativo máximo de 10^{-5} implica no deslocamento a meio vão um erro máximo da ordem dos milímetros, pelo que será este o valor adoptado nos casos de estudo do capítulo seguinte.

Como validação dos resultados obtidos, efectou-se uma análise comparativa entre a trajectória de equilíbrio determinada através da análise geometricamente não-linear do modelo e a trajectória de equilíbrio obtida por aplicação da pela fórmula analítica da amplificação das deformações (expressão (3.15)), apresentada em § 3.3.1.

Apresentam-se na Figura 4.20, as trajectórias de equilíbrio definidas em função das cargas axiais e dos deslocamentos a meio vão através de um diagrama forças vs. deslocamentos.

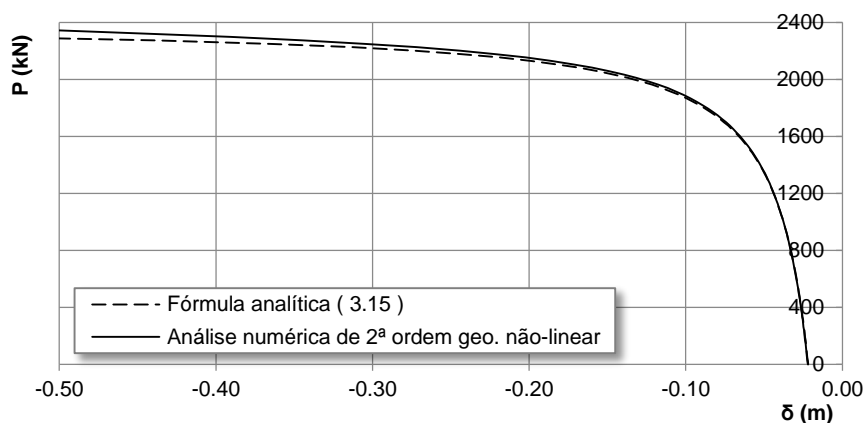


Figura 4.20 – Trajectória de equilíbrio numérica e analítica.

Como se pode verificar na Figura 4.20, os resultados da análise numérica são bastante próximos dos resultados obtidos através da expressão da amplificação dos deslocamentos, resultante da solução definida em série de Fourier como apresentado na equação (3.15). Existe apenas uma divergência entre estes quando a carga se aproxima do respectivo valor crítico.

Nos gráficos da Figura 4.21 são representadas as diferenças obtidas nos deslocamentos das trajectórias de equilíbrio apresentadas na Figura 4.20 em valor relativo.

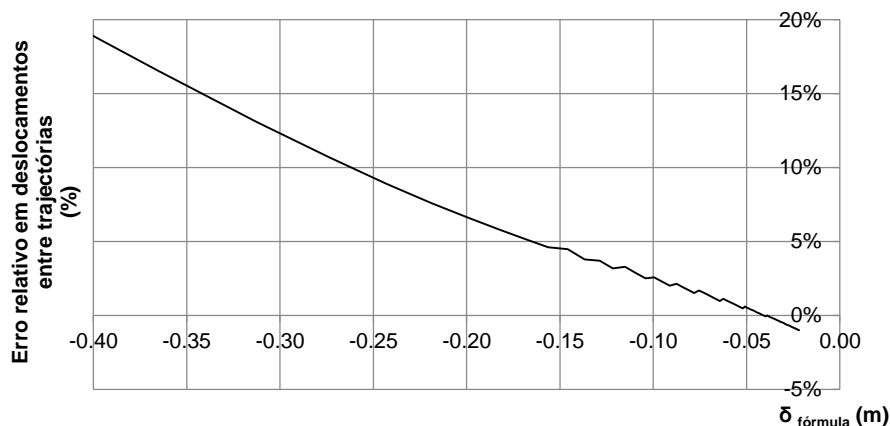


Figura 4.21 – Erro relativo medido em deslocamentos.

Admitindo-se um erro relativo máximo de 10^{-5} no processo iterativo de Newton-Raphson, não se conhece à partida o desequilíbrio em forças ou momentos existente na estrutura, pelo que se efectuou uma segunda análise comparativa entre os resultados numéricos e os respectivos valores determinados directamente por equilíbrio dos esforços e forças aplicadas.

A comparação foi efectuada analisando momentos flectores a meio vão e esforços axiais na extremidade da barra.

O momento flector obtido numericamente é comparado com o produto entre a flecha total a meio vão e o valor da carga axial aplicada.

Na Figura 4.22 apresenta-se a variação dos erros relativos e absolutos entre momentos flectores em função do parâmetro de carga. Os erros são determinados por comparação do momento flector obtido numericamente com o momento flector obtido através do produto entre a flecha total a meio vão e o carregamento axial total.

Representa-se também o erro existente entre a força axial aplicada e a força axial resistida pela estrutura.

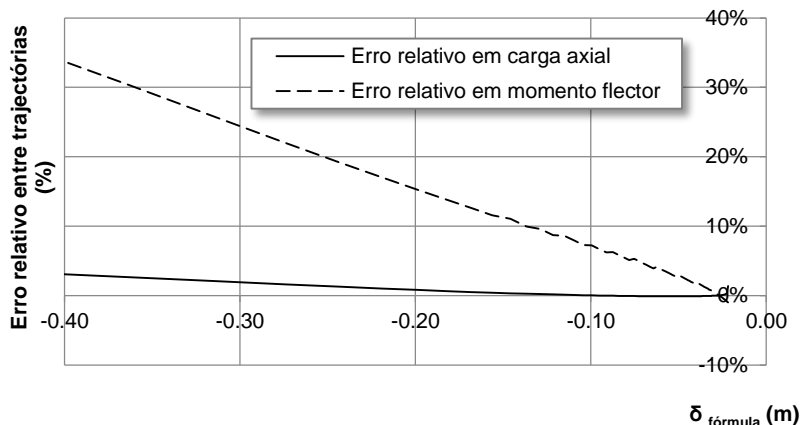


Figura 4.22 – Erros relativos medidos em momentos flectores e em forças axiais aplicadas.

Como se pode constatar existe uma diferença nos resultados obtidos através duas metodologias, observando-se que ambos, o erro relativo em forças e o erro relativo em deslocamentos, apresentam um crescimento com a aproximação da carga axial ao respectivo valor crítico da viga-coluna.

O equilíbrio entre forças axiais aplicadas e forças axiais resistentes apresenta um crescimento pouco acentuado, obtendo-se erros de 0,07 % para uma deformação a meio-vão de 0,035 m (a qual corresponde a um valor de P/P_{cr} de 40%, o qual não é ultrapassado nos casos de estudo efectuados posteriormente). O erro relativo máximo no equilíbrio de momentos a meio vão apresenta um crescimento mais acentuado, obtendo-se erros de 2,17% para deformações a meio-vão no valor de 0,035 m, quando se admite um erro relativo máximo no processo iterativo do método de Newton-Raphson de 10^{-5} . O erro relativo em deslocamentos para deformações inferiores a 0,035 m tem o valor de 0,22%.

5. Casos de Estudo

Após a formulação e validação do modelo numérico, apresentam-se neste capítulo os casos de estudo realizados, os quais se dividem pelos seguintes tipos de estruturas:

1. Viga-coluna simplesmente apoiada;
2. Viga-coluna contínua;
3. Pórtico não contraventado;
4. Pórtico contraventado.

Na análise de cada estrutura é apresentado um conjunto de dados onde se efectua a:

1. Identificação de secções e classes de aço adoptadas;
2. Identificação da geometria da estrutura;
3. Identificação das imperfeições geométricas consideradas na definição da geometria;
4. Apresentação das propriedades do modelo adoptado, identificando matrizes de rigidez, níveis de discretização e passos de cálculo.

Cada tipo de estrutura é analisada em um ou mais casos de estudo, os quais são estruturados nas seguintes componentes:

1. Introdução, onde é apresentada a problemática em estudo e quais os objectivos pretendidos;
2. Apresentação do conjunto de análises realizadas, em que para cada análise deverá ser especificado o tipo de carregamento, o valor dos carregamentos aplicados, as imperfeições consideradas e outros parâmetros específicos de cada caso;
3. E por último, uma secção de resultados e conclusões.

5.1. Vigas-coluna

O estudo de vigas-coluna através de análises de 2ª ordem geometricamente não-lineares tem como objectivo analisar o efeito dos carregamentos sobre as trajectórias de equilíbrio (no caso da viga-coluna simplesmente apoiada) e efectuar uma comparação entre o processo de verificação de segurança com base em esforços retirados directamente do modelo numérico e com base no processo de verificação estipulado pelo EC3 (aplicado a ambas as vigas-coluna).

5.1.1. Viga-coluna simplesmente apoiada

A viga-coluna simplesmente apoiada em estudo é constituída por um perfil com 4 m de comprimento com uma secção IPE200 em aço S355. Nas Tabelas 5.1 a 5.3 apresentam-se as propriedades geométricas e mecânicas da secção transversal adoptada.

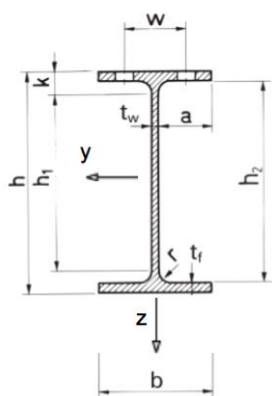


Figura 5.1 – IPE200.

Tabela 5.1 – Geometria.

h	b	t _w	t _f	r	h ₁	k	a
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
200	100	5,6	8,5	12	158	21	47

Tabela 5.2 – Propriedades geométricas.

A	I _y	W _{el,y}	i _y	I _z	W _{el,z}	i _z
(m ²)	(m ⁴)	(m ³)	(mm)	(m ⁴)	(m ³)	(mm)
2,85E-3	1,94E-5	194E-6	82,6	1,42E-06	28,5E-6	22,4

Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas.

E	EA	EI _y	EI _z
(GPa)	(kN)	(kN.m ²)	(kN.m ²)
210	5,70E+05	3,88E+03	2,84E+02

Em todos os estudos foram consideradas as imperfeições geométricas:

1. implícitas nas curvas de dimensionamento definidas em § 6.3.1.2 do EC3 (§ 3.3.1 – ver capítulo 3, expressão (3.25));
2. preconizadas para barras com particular importância dos efeitos geometricamente não-lineares definidas no § 5.3.2 do EC3 (tópico 3.2 - Tabela 3.1).

Na Tabela 5.4 apresentam-se os valores das imperfeições geométricas adoptadas de acordo com o referido anteriormente para cada uma das direcções de flexão.

Tabela 5.4 – Imperfeições adoptadas a meio vão.

Eixo	$\bar{\lambda}$	Curvas de dim. – Capítulo 6.3.1.2 do EC3					Capítulo 5.3.2 do EC3	
		c (m)	i (m)	θ (-)	L / w ₀	w ₀ (m)	L / w ₀	w ₀ (m)
y	0,64	0,100	0,083	0,092	L/667	0,006	300	0,013
z	2,36	0,050	0,022	0,734	L/571	0,007	250	0,016

Ao determinarem-se as imperfeições geométricas implícitas nas curvas de dimensionamento do EC3 pode constatar-se que estas têm em consideração imperfeições geométricas com valores de cerca de metade das imperfeições preconizadas no ponto § 5.3.2. do EC3.

A modelação da estrutura analisada foi realizada com recurso a 8 elementos finitos de viga-coluna de matriz de rigidez geometricamente não-linear aproximada (ver § 2.4.1.1), com um total de 9 nós.

Os carregamentos axiais foram aplicados na forma de incrementos de carga, adoptando-se valores de 1% das respectivas cargas críticas, determinadas através de análise linear de estabilidade exacta.

Na modelação do comportamento tridimensional da viga-coluna simplesmente apoiada, e uma vez que se estão a usar apenas modelos planos, é necessária a consideração de dois modelos distintos,

representativos do comportamento da viga-coluna em cada uma das direcções de flexão, como indicado na Figura 5.2 e Figura 5.3.

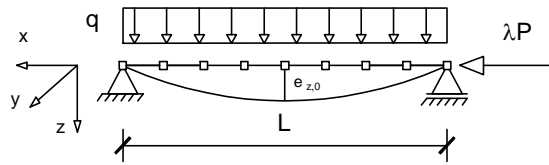


Figura 5.2 – Viga-coluna: flexão em y.

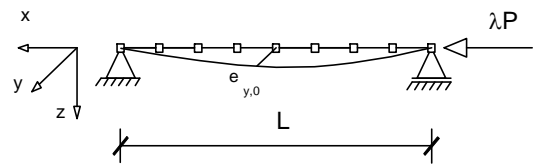


Figura 5.3 – Viga-coluna: flexão em z.

Nas Figuras 5.4 a 5.7 são ilustradas as geometrias dos vários modelos analisados, com respectiva identificação das coordenadas dos nós, definidas de modo a incorporar na geometria inicial da estrutura as imperfeições geométricas parabólicas definidas pelo EC3.

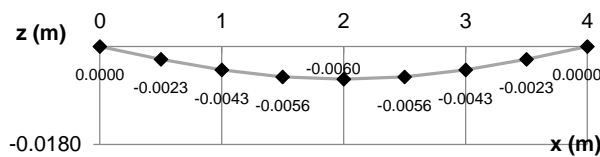


Figura 5.4 - Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em y – (imperfeição de $L/300$).

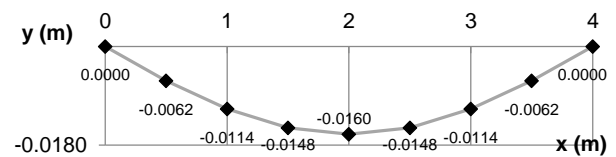


Figura 5.5 - Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em z – (imperfeição de $L/250$).

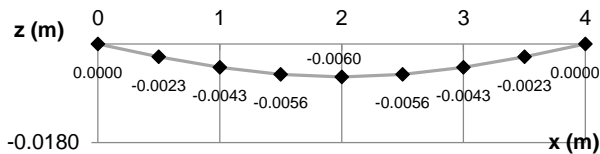


Figura 5.6 – Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em y – (imperfeição de $L/667$).

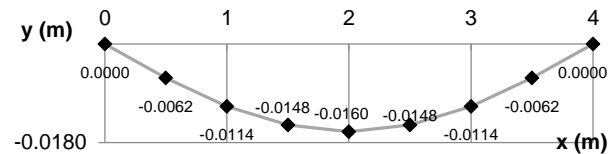


Figura 5.7 – Modelo de viga-coluna simplesmente apoiada para flexão em z – (imperfeição de $L/571$).

5.1.1.1. Caso 1 – Influência do carregamento em vigas solicitadas apenas num plano

O caso 1 tem como objectivo quantificar a influência que os carregamentos aplicados a vigas-coluna simplesmente apoiadas exercem sobre as suas trajectórias de equilíbrio, quando se admite um comportamento de flexão unicamente no eixo y.

O estudo incide sobre um conjunto de 8 análises: nas 4 primeiras analisa-se o efeito de carregamentos distribuídos no vão nas trajectórias de equilíbrio, definidas em função do carregamento axial e do deslocamento a meio vão (ver carregamento tipo 1 da Figura 5.8); nas restantes análises avalia-se o efeito que cargas axiais de compressão exercem sobre as trajectórias de equilíbrio definidas em função do valor do carregamento distribuído no vão e do respectivo deslocamento a meio vão (ver carregamento tipo 2 na Figura 5.8).



Figura 5.8 – Carregamentos tipo.

Na Tabela 5.5 apresenta-se uma listagem e descrição das análises de 2ª ordem realizadas, identificando-se as imperfeições geométricas adoptadas e a caracterização dos carregamentos.

Tabela 5.5 - Conjunto de análises – Estudo 1.

Análise	Flexão	Imp.	Tipo	q (kN/m)		P (kN)	
				Variação	Min/Max	Variação	Min/Max
1	y	L/300	1	C ^{te}	10	Crescente	0 → 2376 (99% P _{cr})
2	y	L/300	1	C ^{te}	20	Crescente	0 → 2376 (99% P _{cr})
3	y	L/300	1	C ^{te}	30	Crescente	0 → 2376 (99% P _{cr})
4	y	L/300	1	C ^{te}	40	Crescente	0 → 2376 (99% P _{cr})
5	y	L/300	2	Crescente	0 → 100	C ^{te}	25% P _{cr}
6	y	L/300	2	Crescente	0 → 100	C ^{te}	50% P _{cr}
7	y	L/300	2	Crescente	0 → 100	C ^{te}	75% P _{cr}
8	y	L/300	2	Crescente	0 → 100	C ^{te}	98% P _{cr}

Nas Figuras 5.9 e 5.10 apresentam-se as trajectórias de equilíbrio da viga-coluna simplesmente apoiada quando sujeita aos carregamentos da Tabela 5.5.

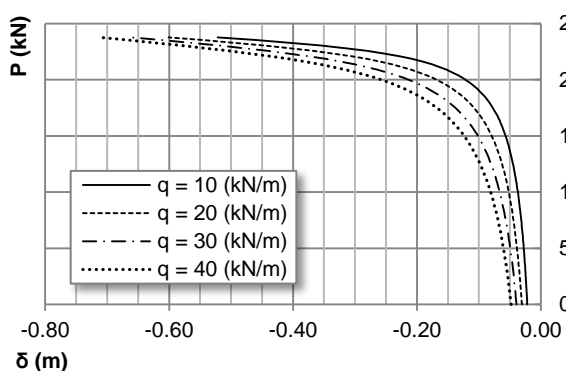


Figura 5.9 – Trajectórias de equilíbrio (P vs δ): Análises 1 a 4.

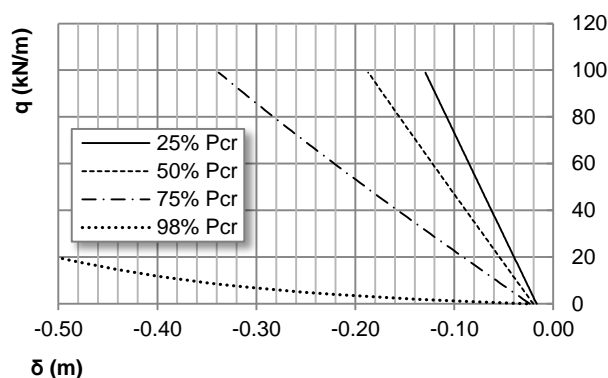


Figura 5.10 - Trajectórias de equilíbrio (q vs δ): Análises 5 a 8.

Nas análises representadas no gráfico à esquerda, constata-se que a aplicação de carregamentos constantes distribuídos no vão actua no comportamento da estrutura como um acréscimo na imperfeição inicial.

Nas análises do gráfico da direita, verifica-se que a aplicação de cargas de compressão constantes produz uma perda na rigidez do elemento, sendo esta anulada quando aquelas se aproximam do respectivo valor crítico.

Como se observa, na análise efectuada com uma carga axial de 98% do seu valor crítico, o modelo apresenta uma variação crescente na rigidez da barra, produzida pela sua resistência de pós-encurvadura.

5.1.1.2. Caso 2 – Comparação com curvas de dimensionamento do EC3

Neste estudo efectua-se uma comparação entre a metodologia do EC3 da verificação da segurança de vigas-coluna e resultados obtidos numericamente.

A comparação é realizada considerando como caso de estudo a viga-coluna simplesmente-apoiada estudada no parágrafo anterior (§ 5.1.1.1), cujas propriedades geométricas e mecânicas são apresentadas nas Tabelas 5.1 a 5.3.

A metodologia do EC3 efectua a verificação da segurança à encurvadura de vigas-coluna através de curvas de interacção (N ; $M_{y,i}$; $M_{z,i}$), as quais definem a relação entre os valores dos esforços de primeira ordem na situação de início de cedência. A verificação da segurança é efectuada considerando dois planos de encurvadura, existindo para cada um conjunto de curvas de interacção.

$$\frac{N_{ed}}{\chi_y N_{el}/\gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,ed}}{M_{y,el}/\gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{M_{z,ed}}{M_{z,el}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (5.1)$$

$$\frac{N_{ed}}{\chi_z N_{el}/\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,ed}}{M_{y,el}/\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{M_{z,ed}}{M_{z,el}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (5.2)$$

O objectivo deste estudo é comparar as curvas de interacção aplicadas pelo EC3 com resultados obtidos através de análises não-lineares. As curvas são comparadas graficamente com pontos de início de cedência determinados numericamente através de análises de 2ª ordem geometricamente não-lineares.

Na Figura 5.11 é representado o modelo tridimensional da viga-coluna.

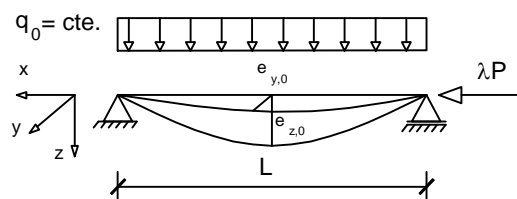


Figura 5.11 – Viga-coluna simplesmente apoiada.

A viga-coluna, com 4,0 m de vão, é constituída por uma secção IPE200 em aço S355 com a maior inércia orientada segundo o eixo y da figura, à qual é aplicado um carregamento constituído por:

1. Carga distribuída no vão segundo a direcção z no valor de 0, 10, 20 e 30 kN/m, de valor constante no desenvolvimento do processo incremental das análises de 2ª ordem;
2. Força axial de valor crescente no desenvolvimento do processo incremental das análises de 2ª ordem.

Os valores das imperfeições geométricas adoptadas em cada uma das direcções são apresentados na Tabela 5.4 do caso de estudo anterior.

Na Tabela 5.6 são identificados os valores dos parâmetros necessários à determinação das curvas de interação, que definem os fenómenos de encurvadura no comportamento da viga-coluna.

Tabela 5.6 – Parâmetros de encurvadura do perfil.

Eixo de Flexão	P _{cr} (kN)	$\bar{\lambda}$	α	φ	χ	C _{my}
y	2393,4	0,64	0,21	0,75	0,88	0,95
z	175,2	2,36	0,34	3,64	0,16	

O estudo desenvolve-se considerando o comportamento tridimensional da viga-coluna dividido em dois modelos planos separados. Cada modelo é definido pela geometria e condições de carregamento da viga-coluna para cada plano.

De cada modelo são extraídos os valores dos esforços de segunda ordem, os quais são combinados para determinar o valor da tensão máxima em cada incremento através da expressão seguinte, até à identificação do ponto de início de cedência.

$$\frac{N_{ed}}{A} + \frac{M_{y,ed}}{W_{y,el}} + \frac{M_{z,ed}}{W_{z,el}} = \sigma \leq f_y \quad (5.3)$$

O conjunto de análises não-lineares é desenvolvido considerando que:

1. As imperfeições geométricas são consideradas em apenas uma das direcções em cada análise;
2. O valor da força axial é incrementado de um valor nulo até 99% do respectivo valor crítico.

Na Tabela 5.7 é apresentada a lista das análises realizadas e dos respectivos carregamentos.

Tabela 5.7 - Conjunto de análises não-lineares.

Análise	P (kN)	Modelo de flexão em y		Modelo de flexão em z	
		Imp.	q _z	Imp.	q _y
1	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/300	0	0	0
2	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/300	10	0	0
3	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/300	20	0	0
4	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/300	30	0	0
5	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	0	L/250	0
6	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	10	L/250	0
7	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	20	L/250	0
8	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	30	L/250	0
9	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/667	0	0	0
10	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/667	10	0	0
11	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/667	20	0	0
12	0 → 2393 (99% P _{cr,y})	L/667	30	0	0
13	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	0	L/571	0
14	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	10	L/571	0
15	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	20	L/571	0
16	0 → 171 (98% P _{cr,z})	0	30	L/571	0

Como se observa, as análises são desenvolvidas de modo a efectuarem-se duas comparações:

1. Comparação entre os resultados numéricos e as curvas de interação, admitindo imperfeições geométricas definidas de acordo com o § 5.3.2 do EC3 (L/300 e L/250);
2. Comparação entre os resultados numéricos e as curvas de interação, admitindo imperfeições geométricas definidas de acordo com o § 6.3.1.2 do EC3 (L/667 e L/571).

Na Figura 5.12 e 5.13 são representadas graficamente as curvas de interação do EC3 juntamente com os pontos de cedência determinados numericamente.

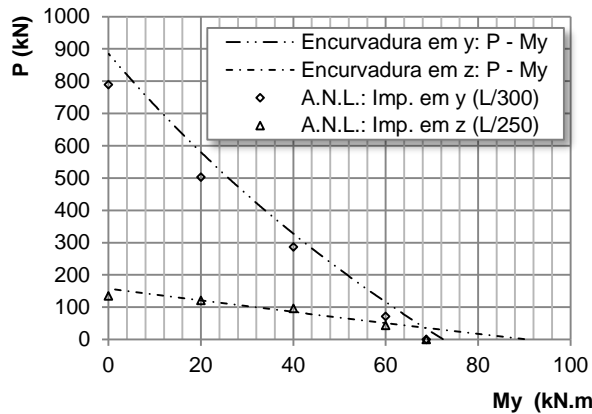


Figura 5.12 – Curva de interação P-My e pontos de cedência obtidos através do § 5.3.2 do EC3.

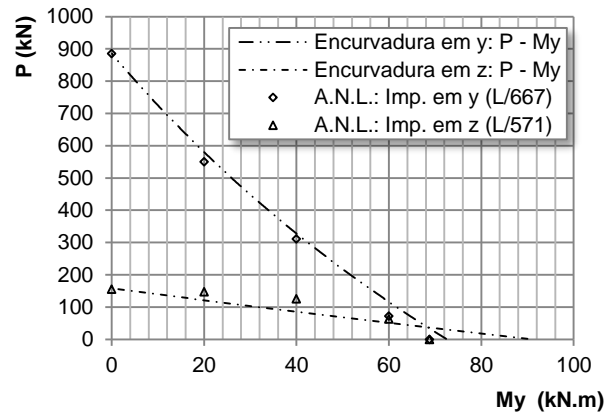


Figura 5.13 – Curva de interação P-My e pontos de cedência obtidos através do § 6.3.1.2 do EC3.

Em cada gráfico são apresentadas as duas curvas de interação, definidas pelas fórmulas (5.1) e (5.2), as quais relacionam o valor de $M_{y,i}$ e P no início da cedência quando o valor de M_z é nulo.

Os resultados são agrupados de acordo com a imperfeição geométrica adoptada, dividindo-se entre a análise não-linear (A.N.L.) com imperfeição em y, e a A.N.L. com imperfeição em z.

Como se pode observar os resultados obtidos apresentam uma distribuição de pontos de cedência próximos das fórmulas de interação, sendo de notar que:

1. À esquerda dos gráficos, sendo a barra influenciada principalmente pelo seu comportamento de coluna, existe uma divergência entre as curvas e entre resultados numéricos obtidos através de imperfeições diferentes, o que era esperado face à diferença entre o valor das cargas críticas da viga-coluna em cada direcção;
2. À direita dos gráficos a barra é influenciada pelo seu comportamento de viga na direcção y, o que provoca a aproximação das curvas de interacção e dos resultados, os quais convergem para o valor do momento de cedência da secção;
3. A diferença entre as curvas e os resultados para $P = 0$ kN é devida à influência dos coeficientes de interacção k_{yy} e k_{zy} que estipulam um valor do momento de cedência superior a $w_{el,y} \cdot f_y$.

De notar que, sendo a imperfeição geométrica contabilizada através dos factores de redução χ_y e χ_z em cada uma das fórmulas de interacção, os resultados numéricos aproximam-se das curvas que têm a imperfeição definida segundo a mesma direcção que o modelo.

Do estudo podem extrair-se as seguintes conclusões:

1. As análises de segunda ordem geometricamente não-lineares fornecem resultados bastante próximos dos valores fornecidos pela metodologia do EC3 baseada em fórmulas de interacção de esforços, o que mais uma vez aponta para uma correcta modelação do comportamento físico da viga-coluna;
2. Os resultados obtidos através da consideração das imperfeições definidas no § 5.3.2 do EC3 afastam-se das curvas, comprovando que a aplicação destas na geometria da estrutura conduz a resultados mais desfavoráveis e a um dimensionamento mais condicionado das estruturas.

5.1.2. Viga-coluna contínua

O estudo realizado sobre vigas-coluna contínuas visa complementar o exemplo apresentado no caso de estudo 2, efectuando uma segunda comparação das curvas de interacção do EC3 com os resultados de análises de segunda ordem geometricamente não-lineares.

Considere-se uma viga-coluna constituída por 3 tramos iguais, à qual é aplicado um carregamento distribuído no vão segundo a direcção z , como ilustrado na Figura 5.14 e na Figura 5.15. Os deslocamentos fora do plano da estrutura estão travados ao longo de todo o comprimento da viga.

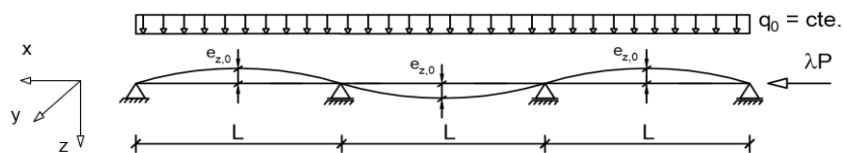


Figura 5.14 – Viga-coluna de 3 tramos com imperfeição para verificação do tramo intermédio.

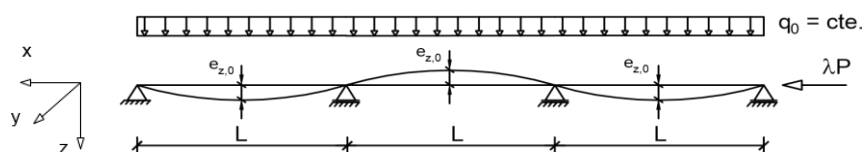


Figura 5.15 – Viga-coluna de 3 tramos com imperfeição para verificação dos tramos de extremidade.

Como indicado nas Figura 5.14 e 5.15, a verificação da segurança dos tramos intermédios e de extremidade, tendo em consideração os fenómenos de encurvadura, implica que sejam consideradas duas geometrias de modo a maximizar os efeitos geométricos.

O perfil considerado, igual ao adoptado para a viga-coluna simplesmente apoiada, é constituído por uma secção IPE200 de aço S355, sendo as suas propriedades geométricas e mecânicas apresentadas na Tabela 5.2 e na Tabela 5.3 em § 5.1.1.

As imperfeições geométricas foram definidas considerando a forma do primeiro modo de instabilidade da estrutura. Na Tabela 5.8 apresentam-se os valores da imperfeição a meio-vão adoptados, definidos de acordo com o § 5.3.2 e § 6.3.1.2 do EC3.

Tabela 5.8 – Imperfeições adoptadas a meio vão.

Eixo	$\bar{\lambda}$	Curvas de dim. – Capítulo 6.3.1.2 do EC3					Capítulo 5.3.2 do EC3	
		c (m)	i (m)	θ (-)	L / w ₀	w ₀ (m)	L / w ₀	w _{0, directo} (m)
y	0,64	0,100	0,083	0,092	667	0,006	300	0,013

A modelação da estrutura foi realizada com 8 elementos finitos de viga-coluna geometricamente não-lineares de matriz de rigidez aproximada por barra (ver tópico 2.4.1.1), com um total de 25 nós e 24 elementos.

Os incrementos de carga axial foram definidos adoptando-se valores de 1% da respectiva carga crítica, determinada através de uma análise linear de estabilidade exacta.

Nas Figuras 5.16 e 5.17 são ilustradas as geometrias dos vários modelos construídos no âmbito da simulação do comportamento do perfil em flexão segundo y.

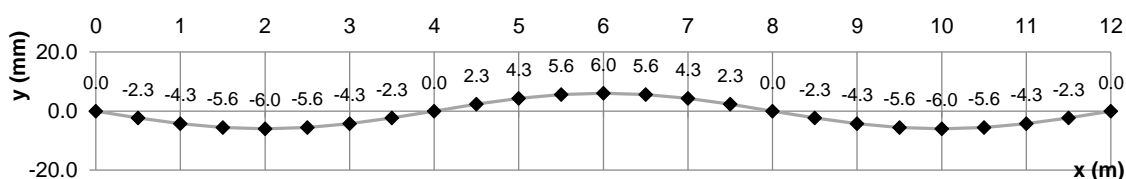


Figura 5.16 - Modelo de viga-coluna de 3 tramos para flexão em y - (imperfeição - L/667). Imperfeições à escala 1:1000.

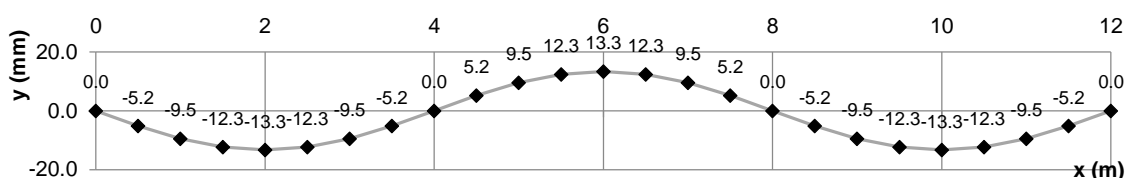


Figura 5.17 - Modelo de viga-coluna de 3 tramos para flexão em y – (imperfeição de L/300). Imperfeições à escala 1:1000.

5.1.2.1. Caso 3 - Comparação com curvas de dimensionamento do EC3

O presente estudo incide na comparação entre resultados de análises não-lineares e as curvas de interacção do EC3, dando assim seguimento à análise iniciada no caso de estudo anterior.

O procedimento adoptado é semelhante ao adoptado naquele caso, em que por via do modelo numérico se determinou um conjunto de pontos de cedência (P , $M_{y,i}$ - em que $M_{y,i}$ corresponde ao momento máximo obtido através de uma análise de 1ª ordem) que permitem analisar como os resultados do modelo se relacionam com as curvas de interacção do EC3.

Note-se que, no caso da viga-coluna contínua existe uma necessidade de verificar em separado o comportamento dos tramos intermédio e de extremidade uma vez que as curvas de interacção não são as mesmas.

O processo foi desenvolvido efectuando dois tipos de comparação: numa primeira (Comparação 1 – Figura 5.18 à esquerda) estuda-se a diferença entre as curvas de interacção do EC3 e os resultados numéricos através de uma modelação individual dos tramos, considerando-se vigas-coluna bi-apoiadas com momentos aplicados nas extremidades; na segunda (Comparação 2 - Figura 5.18 à direita), estuda-se a diferença entre as curvas de interacção e os resultados numéricos considerando uma modelação do comportamento global da viga-coluna contínua.

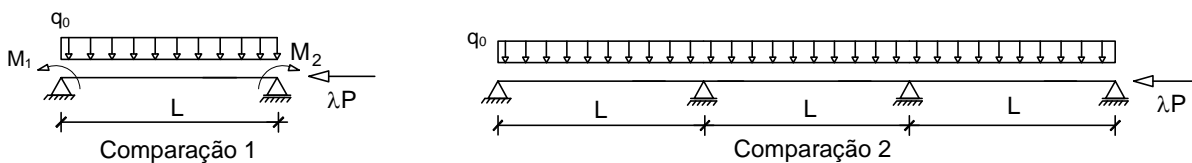


Figura 5.18 – Métodos de comparação.

Na Figura 5.19 representa-se o diagrama de momentos flectores obtido de uma análise elástica de 1ª ordem, o qual permite que sejam determinados rigorosamente todos os parâmetros necessários à definição das curvas de interacção dos tramos da viga-coluna de acordo com o EC3.

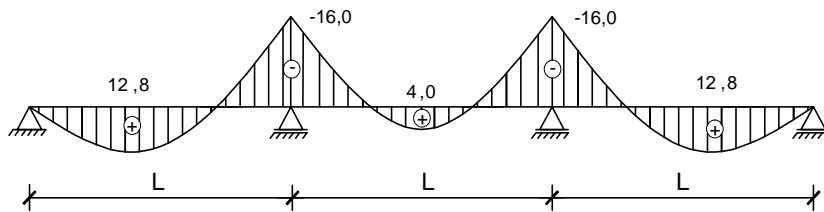


Figura 5.19 – Diagrama de momentos flectores da viga-coluna.

Na Tabela 5.9 apresentam-se os referidos parâmetros, sendo o coeficiente C_{my} determinado através dos valores do diagrama de momentos anterior com base no procedimento estabelecido na tabela B.2 do Anexo 2 do EC3 (ver Anexo 1).

Tabela 5.9 – Parâmetros de encurvadura do perfil.

Eixo	$\bar{\lambda}$	α	φ	χ	C_{my} (Tramo Interior)	C_{my} (Tramo Extremidade)
y	0,64	0,21	0,75	0,88	0,40	0,74

Estando o perfil travado para deslocamentos segundo y, a verificação da segurança será realizada através de uma única fórmula de interacção (equação (3.26)).

O conjunto de análises realizadas com o objectivo de determinar os vários pontos de início de cedência dos tramos intermédios e de extremidade é apresentado na Tabela 5.10, onde são indicados os carregamentos aplicados e as imperfeições adoptadas.

Tabela 5.10 – Conjunto de análises – Viga contínua; Estudo 3.

Análise	P (kN)	Flexão em y	
		Imp.	q_z (kN/m)
1	0 → 2393 (99% P_{cr})	L/300	0
2	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/300	10
3	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/300	20
4	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/300	30
5	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/300	40
6	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/667	0
7	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/667	10
8	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/667	20
9	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/667	30
10	0 → 2376 (99% P_{cr})	L/667	40

Através dos resultados das análises não-lineares efectuou-se o cálculo da tensão máxima a meio-vão de cada um dos tramos, apresentando-se nos gráficos das Figuras 5.20 e 5.21 as representações dos pontos de cedência e das curvas de interacção de cada tramo para cada tipo de imperfeição geométrica.

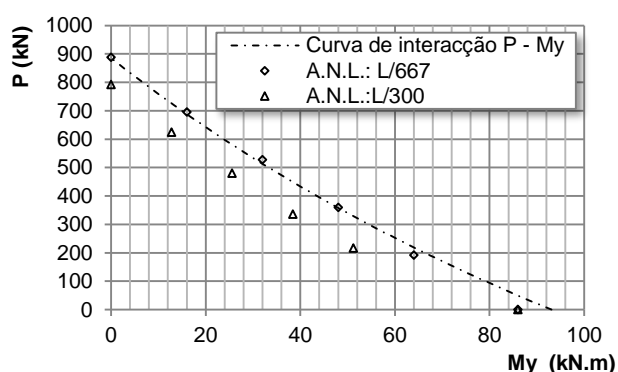


Figura 5.20 – Tramo de extremidade: curva de interacção P- M_y e pontos de cedência numéricos (Comparação 1).

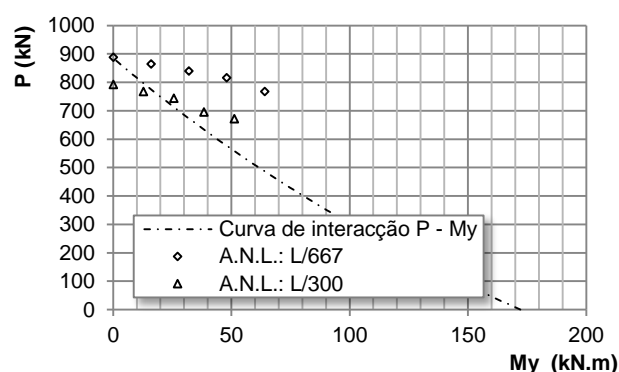


Figura 5.21 – Tramo intermédio: curva de interacção P- M_y e pontos de cedência numéricos (Comparação 1).

Como se pode observar dos andamentos do valor das tensões máximas o modelo numérico fornece resultados bastante próximos das curvas de interacção do EC3 para o caso do tramo de extremidade.

Para o tramo intermédio os pontos de cedência obtidos pelas análises de 2ª ordem exactas afastam-se consideravelmente da curva de interacção do EC3, observando-se que a redução da resistência à compressão não é afectada pelos momentos flectores como proposto pelas curvas de interacção, as quais fornecem resultados claramente mais conservativos.

Mais uma vez pôde comprovar-se que a consideração de imperfeições locais definidas no § 5.3.2 do EC3 (L/300) conduzem a resultados mais conservativos que aqueles obtidos através das fórmulas de interacção.

Nas Figuras 5.22 e 5.23 apresentam-se as representações gráficas das curvas de interacção e dos pontos de início de cedência obtidos através da modelação conjunta (Comparação 2) e separada dos tramos (Comparação 1).

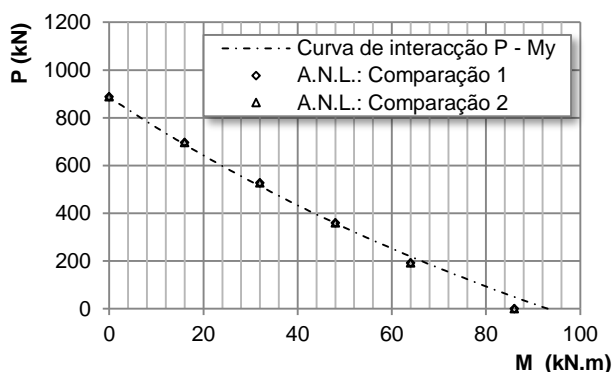


Figura 5.22 – Tramo de extremidade: curva de interação P- M_y e pontos de cedência numéricos (L/667)

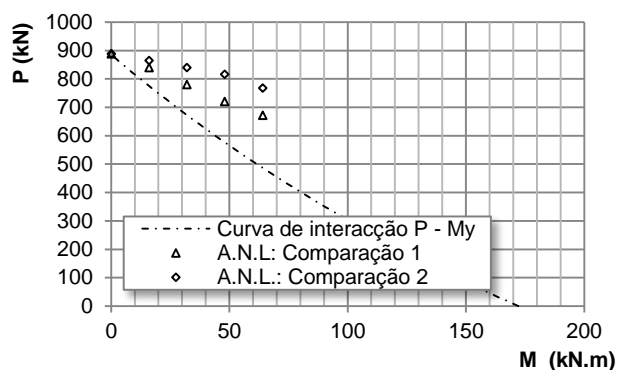


Figura 5.23 – Tramo intermédio: curva de interação P- M_y e pontos de cedência numéricos (L/667).

Como se observa nos gráficos, os resultados obtidos para o tramo exterior apresentam uma reduzida variação com a alteração dos modelos, sendo apresentados nos dois casos resultados bastante próximos das curvas propostas pelo EC3.

A consideração de um modelo global da estrutura conduz a um comportamento do tramo intermédio diferente do comportamento anteriormente obtido nos modelos com os tramos isolados. O início da cedência é dado para valores superiores de P o que produz um dimensionamento menos condicionado.

Na Figura 5.24 apresentam-se as trajectórias de equilíbrio definidas pelo deslocamento a meio-vão do tramo intermédio e a carga axial, quando é considerado o modelo global da viga (Comparação 2).

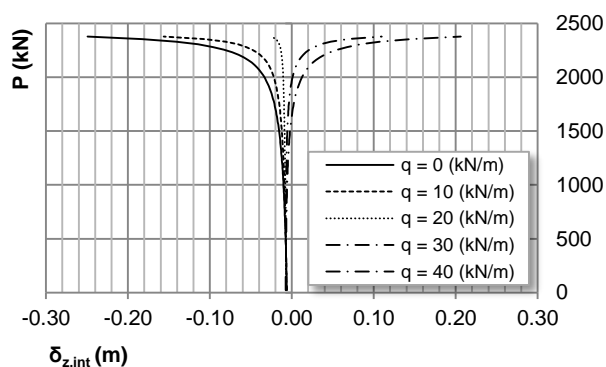


Figura 5.24 – Trajectórias de equilíbrio para o tramo intermédio.

Constata-se das curvas que a modelação conjunta dos tramos permite ao tramo de extremidade provocar uma redução na deformação do tramo intermédio, proporcional ao valor da carga distribuída no vão.

Na Tabela 5.11 apresentam-se os valores dos deslocamentos iniciais a meio-vão para ambos os tramos em função do valor da carga distribuída.

Tabela 5.11 – Deslocamentos iniciais a meio-vão.

q (kN/m)	0	10	20	30	40
δ_{ext} (m)	-0,006	-0,0016	0,0029	0,0074	0,0119
δ_{int} (m)	0,006	0,0064	0,0067	0,0070	0,0074

A aplicação das forças distribuídas produz na deformação do tramo de extremidade um efeito contrário ao das imperfeições iniciais, observando-se que estes trocam o seu sinal quando são aplicadas cargas distribuídas superiores a 10 kN/m.

Para cargas distribuídas de valor igual ou superior a 30 kN/m o valor do deslocamento a meio-vão do tramo de extremidade ultrapassa o valor do deslocamento a meio-vão do tramo intermédio.

Nos casos em que esta condição é verificada, os efeitos de 2ª ordem são necessariamente superiores no tramo de extremidade, pelo que a deformação deste amplificar-se-á mais rapidamente que a deformação do tramo intermédio produzindo o comportamento observado na Figura 5.24.

Conclui-se do estudo os seguintes pontos:

1. Na análise do tramo exterior os resultados numéricos são bastante próximos das curvas de interação, considerando os dois tipos de modelação;
2. Na análise do tramo intermédio os resultados numéricos apresentam uma diferença substancial face às curvas de interação do EC 3 em ambos os tipos de modelação, as quais fornecem claramente uma posição mais conservativa;
3. No caso do tramo interior a modelação conjunta permite que exista uma influência dos tramos de extremidade sobre o comportamento desta, produzindo um aumento na capacidade de carga axial para um mesmo momento flector máximo de primeira ordem;

5.2. Estrutura em pórtico

Neste capítulo apresenta-se o estudo geometricamente não-linear de estruturas em pórtico, sendo feita uma divisão entre: pórticos não-contraventados e pórticos contraventados.

5.2.1. Pórtico não-contraventado

No âmbito das estruturas em pórtico sem contraventamento são realizados 2 estudos.

No primeiro estudo pretende analisar-se como o primeiro modo de instabilidade do pórtico é influenciado pelas rigidezes dos montantes e travessas quando estas não são iguais, e de que forma aquele modo é influenciado pela assimetria dos carregamentos verticais actuantes sobre os montantes.

No segundo estudo efectua-se uma comparação entre resultados obtidos numericamente por via de análises de 2ª ordem e resultados obtidos através das análises lineares modificadas do EC3.

5.2.1.1. Caso 4 – Influência da rigidez dos elementos no primeiro modo de instabilidade global do pórtico

Este estudo incidirá na análise da influência da relação entre rigidez dos montantes e travessas no primeiro modo de instabilidade de pórticos não contraventados e sujeitos a carregamentos verticais assimétricos.

O estudo que se apresenta resulta de um conjunto de análises lineares de estabilidade aproximadas nas quais se fez variar a relação entre as rigidezes dos montantes e da travessa. Simultaneamente para cada conjunto de rigidezes fez-se variar a assimetria do carregamento vertical, sendo em cada caso obtido da análise do modelo o valor do carregamento crítico do pórtico.

Na Figura 5.25 representa-se o pórtico tipo e as respectivas variáveis geométricas. Admitiu-se que os montantes do pórtico são encastrados na base, possuindo uma rigidez de flexão $EI_{mont.}$, e as travessas rigidamente ligadas a estes possuirão uma rigidez de flexão $EI_{trav.}$.

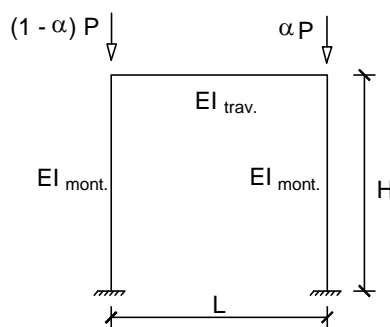


Figura 5.25 – Pórtico em estudo.

A relação entre a rigidez dos montantes e a rigidez da travessa será definida através do parâmetro β determinado pela expressão:

$$\beta = \frac{EI_{travessa} H}{EI_{montante} L} \quad (5.4)$$

De notar que o parâmetro β não adimensionaliza com rigor o problema em estudo. Os resultados são extrapoláveis para pórticos com diferentes geometrias ou diferentes valores das rigidezes dos elementos desde que o valor do parâmetro não se afaste em demasia da unidade.

Os resultados obtidos serão apresentados em função do parâmetro β mesmo quando este difere da unidade, sendo no entanto efectuada uma quantificação do erro que outras análises com diferentes pórticos poderão ter face à solução apresentada mais à frente.

O carregamento axial dos montantes, sendo assimétrico, é definido por um parâmetro de carga (P) e por um factor que quantifica o seu nível de assimetria (α), como indicado na Figura 5.25.

As cargas críticas foram calculadas para as cinco geometrias e valores de rigidez apresentadas na Tabela 5.12. A variação do parâmetro β foi efectuada através da variação do valor da altura do pórtico.

Tabela 5.12 - Propriedades mecânicas dos pórticos considerados no estudo.

Geometria	H (m)	L (m)	EI _{mont.} (kN.m ²)	EI _{trav.} (kN.m ²)	β
1	2,0	4,0	4,00E+04	4,00E+04	0,50
2	3,0	4,0	4,00E+04	4,00E+04	0,75
3	4,0	4,0	4,00E+04	4,00E+04	1,00
4	8,0	4,0	4,00E+04	4,00E+04	2,00
5	16,0	4,0	4,00E+04	4,00E+04	4,00

Como ilustrado na Figura 5.26, neste estudo adoptou-se uma modelação do pórtico com uma discretização de 4 elementos finitos por barra, constituindo um total de 12 elementos finitos e 13 nós no caso de estudo 4 e uma discretização de 8 elementos finitos por barra com um total de 24 elementos e 25 nós no caso de estudo 5.

As análises, num total de 30, foram efectuadas através de análises lineares de estabilidade aproximadas, de acordo com a metodologia apresentada em § 2.4.1.

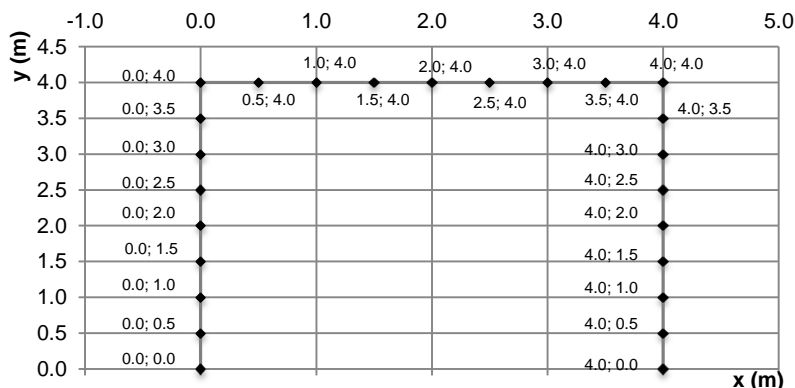


Figura 5.26 – Representação geométrica do modelo do pórtico tipo com 8 el. por barra.

Aos pórticos com diferentes geometrias foi aplicado um conjunto de carregamentos caracterizados pelo respectivo valor do parâmetro de assimetria (α), como indicado na Tabela 5.13.

Foi considerada uma variação do parâmetro α de 0 a 0,5 de modo a abranger um conjunto de carregamentos que varia entre um carregamento simétrico e um carregamento que concentra a carga P em apenas um montante.

Tabela 5.13 – Carregamentos: estudo 4.

Carregamento	1	2	3	4	5	6

α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

No gráfico da Figura 5.27 apresentam-se os resultados obtidos das análises. O valor das cargas críticas do pórtico são adimensionalizadas em relação ao valor da carga crítica para a situação de carregamento simétrico.

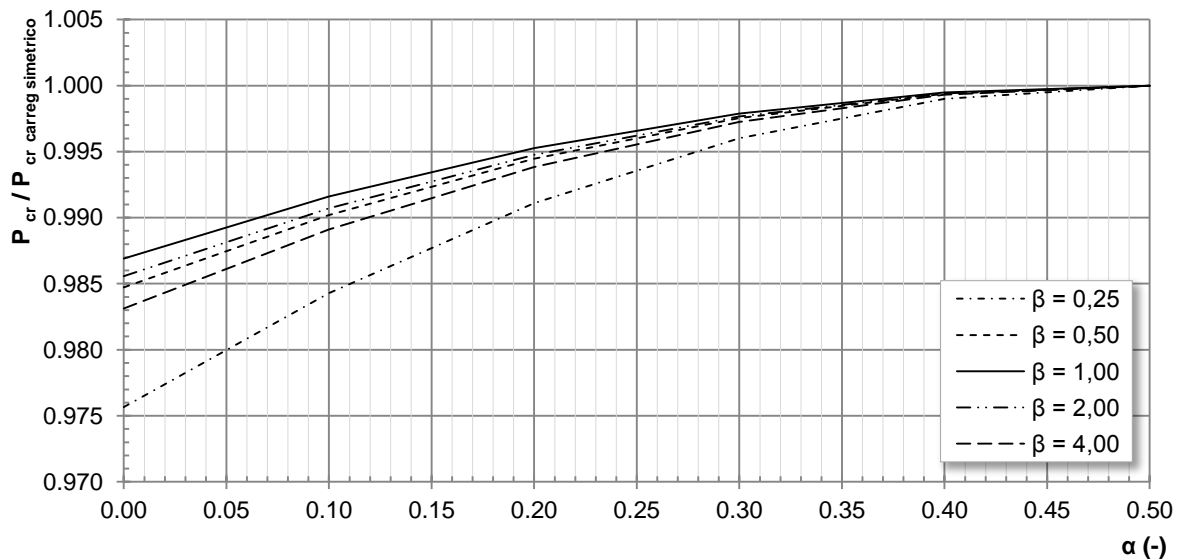


Figura 5.27 – Carregamento crítico do primeiro modo de instabilidade em função de α e de β .

Como se observa, a assimetria e a relação de rigidez dos elementos do pórtico são factores determinantes no comportamento do primeiro modo de instabilidade global do pórtico.

Como esperado a assimetria provoca uma redução no valor da carga crítica global do pórtico. Ao concentrar-se o carregamento sobre um único montante o seu respectivo esforço axial é aumentado, e os efeitos geometricamente não lineares concentram-se numa zona particular da estrutura.

A diferença entre os esforços axiais dos montantes provoca uma rotura global induzida pela perda de rigidez de um dos montante, implicando valores de P_{cr} inferiores aos obtidos para uma configuração simétrica do carregamento.

Observando o gráfico, conclui-se que a variação da carga crítica de um carregamento face à configuração simétrica é proporcional à diferença entre β e 1,0, tendo um valor máximo de 2,5% para $\beta = 0,25$.

Como referido anteriormente, a consideração do parâmetro β como factor adimensional é válida apenas quando este tomar valores próximos da unidade. Com o objectivo de quantificar a variação dos resultados quando o valor de β é variado através de um parâmetro diferente de H , foram realizados três conjuntos de análises adicionais.

Na Tabela 5.14 são apresentadas as diferenças máximas obtidas entre os resultados apresentados na Figura 5.27 e os resultados obtidos nos três conjuntos de análises.

Tabela 5.14 – Diferenças nos resultados.

	Largura	EI travessa	EI montante
Diferença	0,28%	0,22%	0,16%

Recorde-se que, de acordo com o estudo efectuado na secção 4, a utilização de uma matriz de rigidez aproximada com uma discretização de 4 elementos finitos por barra terá associado um erro relativamente à solução exacta para o primeiro modo de instabilidade de cerca de 1%.

5.2.1.2. Caso 5 – Comparação com métodos de análise do EC3

O objectivo do presente estudo consiste numa comparação entre a metodologia do EC3 da verificação da segurança de estruturas em pórtico e resultados obtidos através de análises geometricamente não-lineares.

Como caso de estudo considera-se o pórtico ilustrado na Figura 5.28, ao qual é aplicado um carregamento constituído por uma força horizontal aplicada ao nível da travessa e duas cargas verticais sobre os montantes.

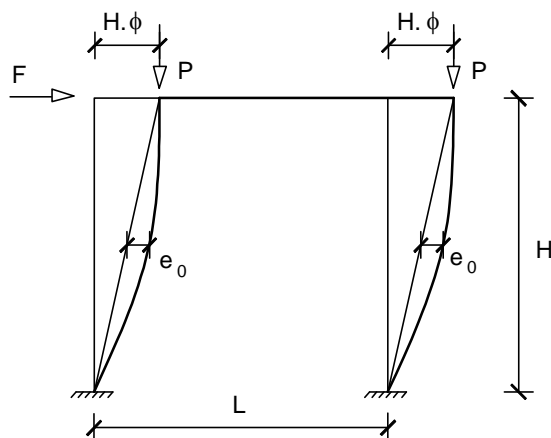


Figura 5.28 – Pórtico e respectivo carregamento.

Sendo o objectivo deste estudo efectuar uma comparação entre resultados numéricos e os procedimentos de verificação da segurança do EC3 é imperativa a consideração das imperfeições globais e locais definidas anteriormente no capítulo 3.

Na constituição do pórtico adoptaram-se barras de secção IPE200 em aço S355, cujas propriedades geométricas são apresentadas nas Tabelas 5.1 a 5.3 dos casos de estudo da vigas-colunas (ver § 5.1.1). Considerou-se uma altura e uma largura de 4,0 metros para a geometria da do pórtico.

O caso de estudo é restringido ao pórtico de altura de 4,0 m, pelo que a imperfeição geométrica global, determinada pelo ângulo ϕ definido na expressão (3.4) do capítulo 3.2, tem o valor de 0,00435 radianos.

Como efectuado anteriormente nos casos de estudo da viga-coluna simplesmente apoiada e da viga-coluna contínua, as análises estruturais efectuadas têm em consideração dois tipos de imperfeições locais:

1. As imperfeições apresentadas na Tabela 3.1 do capítulo 3.2, definidas pelo EC3 como proporcionais ao valor dos vãos dos elementos;
2. As imperfeições implícitas nas curvas de dimensionamento do EC3, definidas pela expressão (3.25) apresentada em § 3.3.1.

Na Tabela 5.15 apresentam-se os valores das imperfeições a meio-vão adoptadas de acordo com a geometria da estrutura em estudo.

Tabela 5.15 – Imperfeições adoptadas a meio vão.

		Curvas de dimensionamento – § 6.3.1.2 do EC3				§ 5.3.2 do EC3		
Eixo	$\bar{\lambda}$	c (m)	i (m)	θ (-)	L / w ₀	w ₀ (m)	L / w ₀	w _{0, directo} (m)
y	0,74	0,100	0,083	0,113	L/521	0,008)	300	0,013

Na Tabela 5.16 apresenta-se um resumo das propriedades geométricas consideradas na definição dos modelos.

Tabela 5.16 – Resumo das propriedades geométricas do pórtico tipo.

H (m)	L (m)	Seccção	Condições de apoio	Imperfeições		
				Globais	Locais	
4,0	4,0	IPE200	Encastramentos na base dos montantes	$\phi = 0,00435$ rad	EC3 – 5.3.2	EC3 – 6.3.1.2
					L/300	L/521

O estudo desenvolve-se considerando a modelação do pórtico recorrendo a 8 elementos finitos por barra com matriz de rigidez aproximada (ver § 2.4.1.1).

Analisando o pórtico através de uma análise de estabilidade linear determinou-se que o valor da carga crítica do primeiro modo global é 1754,6 kN.

A metodologia do EC3 de verificação da segurança de pórticos é constituída pelos passos:

1. Análise global do pórtico, através da qual são quantificados os esforços de dimensionamento tendo em consideração os efeitos geometricamente não-lineares globais (efeitos P- Δ). Este processo é realizado através do Método da Amplificação dos Efeitos de Sway (MAES), apresentado em § 2.4.2.2;
2. Análise local das barras, através da qual é verificada a segurança destas contabilizando os efeitos geometricamente não-lineares locais (efeitos P- δ), os quais se relacionam com a existência de esforços de compressão simultaneamente com desvios dos eixos dos elementos às respectivas cordas. Esta análise como referido anteriormente é realizada através das fórmulas de dimensionamento do EC3 as quais incluem os efeitos devidos às imperfeições locais, esforços de compressão, e interação entre compressão e flexão.

De notar que na análise local das barras a verificação de viga-coluna, efectuada através da aplicação das fórmulas de dimensionamento, não dispensa uma verificação da segurança das secções extremas dos elementos. Este ponto é particularmente relevante em estruturas em pórtico pois os momentos de extremidade frequentemente são condicionantes.

A estrutura é analisada considerando um conjunto de análises não-lineares (A.N.L.) que têm como objectivo efectuar uma comparação entre pontos de início de cedência obtidos por estas, e as curvas de dimensionamento do EC3.

Das análises realizadas são extraídos os valores dos esforços de segunda ordem (N e M_y) em 9 secções diferentes do montante à direita, os quais são combinados para determinar os valores das tensões máximas em cada incremento através da expressão seguinte.

$$\frac{N_{ed}}{A} + \frac{M_{y,ed}}{W_{y,el}} = \sigma \leq f_y \quad (5.5)$$

O processo incremental, o qual é desenvolvido até que se identifique o início da cedência em alguma das secções de análise, considera um carregamento com as seguintes características:

1. Cargas verticais aplicadas incrementalmente até valores próximos do carga crítica do pórtico;
2. Força horizontal aplicada na primeira iteração e mantida constante ao longo do processo incremental.

Na Tabela 5.17 apresenta-se uma descrição dos carregamentos aplicados nas diferentes análises.

Tabela 5.17 – Definição dos carregamentos aplicados ao pórtico.

Análise	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Imp. Local	L/300											
F (kN)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
F / P_{cr}	0,00%	0,29%	0,57%	0,86%	1,14%	1,43%	1,71%	2,00%	2,28%	2,57%	2,85%	3,14%
P (kN)	0 → 1754,6 (incrementos de 1%)											
Análise	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Imp. Local	L/667											
F (kN)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
F / P_{cr}	0,00%	0,29%	0,57%	0,86%	1,14%	1,43%	1,71%	2,00%	2,28%	2,57%	2,85%	3,14%
P (kN)	0 → 1754,6 (incrementos de 1%)											

Apresentam-se nas Figura 5.29 e 5.30 os pontos de início de cedência, identificados pela força horizontal e pelo carregamento vertical, juntamente com as duas curvas de interação de esforços as quais incluem os efeitos P- Δ e P- δ :

1. Curva de interação entre F e $P/(\chi.A.f_y)$ para situação de cedência na secção de extremidade do montante, a qual representa uma verificação de segurança da secção;
2. Curva de interação entre F e $P/(\chi.A.f_y)$ correspondente à verificação de viga-coluna do montante.

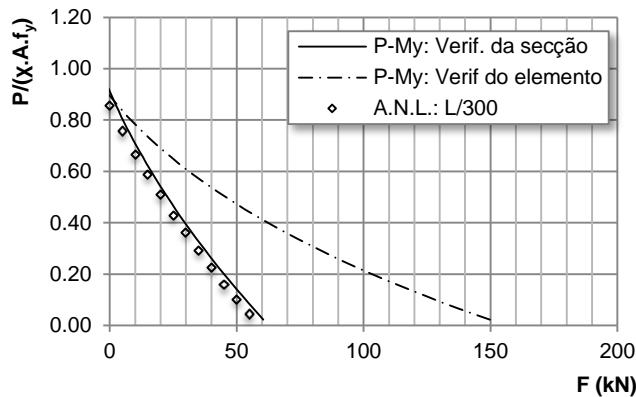


Figura 5.29 – Comparação de resultados: L/300.

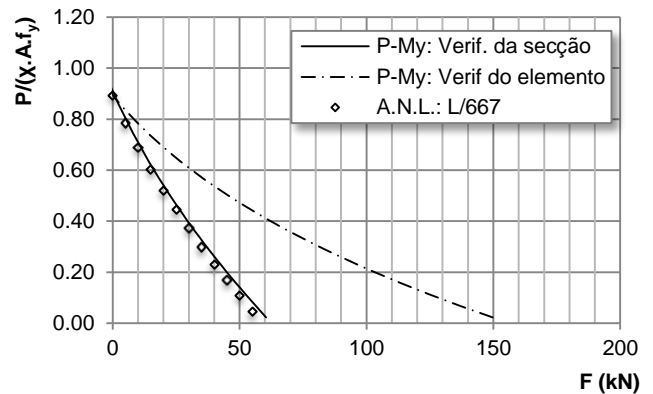


Figura 5.30 – Comparação de resultados: L/667.

Como se verifica, pode concluir-se que o modelo numérico forneceu resultados espectáveis e que estes estão em acordo com a metodologia do EC3, observando-se que o início da cedência do montante deu-se em todos os casos na secção de extremidade.

Constata-se nos gráficos anteriores que, de acordo com a metodologia do EC3 (M.A.E.S. e fórmulas de interação), o início da cedência dá-se, quase exclusivamente, na secção de extremidade da base do montante, e que os efeitos P- δ não apresentam valores relevantes para o processo de dimensionamento do pórtico.

De acordo com esta metodologia, apenas para valores de $N/(\chi.A.f_y)$ próximos 0,90 existe a possibilidade de início de cedência numa secção intermédia, notando-se no entanto que as curvas de interação para estes valores de carga vertical possuem valores muito próximos.

De notar que nos gráficos obteve-se uma diferença sistemática entre os pontos numéricos e a curva da verificação da secção de extremidade, a qual é devida à actualização das coordenadas dos elementos da estrutura no desenvolvimento do processo incremental, o qual produz uma redução nos esforços axiais dos elementos quando estes apresentam rotações não desprezáveis.

Os resultados obtidos não dependem da secção adoptada para os elementos do pórtico, pelo que se conclui que em pórticos que mantenham um carregamento do tipo considerado, mantendo um diagrama de momentos flectores primários semelhante ao do caso em estudo, e com imperfeições locais inseridas no intervalo de valores estipulados pelo EC3, as conclusões anteriores poderão ser extrapoladas para pórticos de geometria e rigidezes diferentes.

5.2.2. Pórtico contraventado

Em pórticos metálicos a estrutura de contraventamento representa um ponto de relevância no processo do seu dimensionamento. Com efeito este elemento confere ao pórtico a rigidez e resistência necessárias para que os deslocamentos e consequentes efeitos de 2ª ordem produzidos pelas acções horizontais sejam devidamente controlados, conseguindo-se assim um dimensionamento mais económico para o pórtico.

Pretende estudar-se nesta secção da dissertação o efeito que a estrutura de contraventamento exerce sobre o comportamento global do pórtico, analisando-se, no caso de estudo 6, a influência que a rigidez do contraventamento exerce nos primeiros modos de instabilidade e nas respectivas cargas críticas, e no caso de estudo 7, a influência das imperfeições geométricas e da rigidez do contraventamento nas trajectórias de equilíbrio do pórtico.

5.2.2.1. Caso 6 – Influência da rigidez do contraventamento na configuração dos modos de instabilidade globais

O presente estudo tem como objectivo analisar o efeito da rigidez das barras de contraventamento sobre os modos de instabilidade globais do pórtico. O estudo incide num pórtico simples contraventado ao qual é efectuado um conjunto de análises lineares de estabilidade aproximadas onde se faz variar a rigidez do contraventamento.

Considere-se o pórtico genérico da Figura 5.31. O pórtico é constituído por montantes e viga de igual secção e comprimento, possuindo uma estrutura de contraventamento consituída por duas barras bi-articuladas, de rigidez EA, posicionadas em cruz de Santo André. O carregamento vertical aplicado sobre os eixos dos montantes é simétrico, e definido através do parâmetro de carga P.

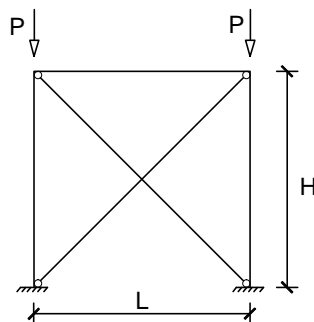


Figura 5.31 – Pórtico contraventado.

A relação entre a rigidez lateral do pórtico conferida pelos pilares e a rigidez lateral associada ao contraventamento é quantificada através do parâmetro adimensional, η , definido pela expressão:

$$\eta = \frac{EI_{\text{montante}}}{EA_{\text{diagonal}}} \cdot \frac{L_{\text{diagonal}}}{H^3} \quad (5.6)$$

Na expressão anterior $L_{diagonal}$ representa o comprimento das diagonais do contraventamento, H , a altura do pórtico, $EI_{montante}$, a rigidez de flexão dos montantes, e $EA_{diagonal}$, a rigidez axial das barras do contraventamento.

A geometria, sem ter em consideração quaisquer imperfeições, é definida pelos parâmetros geométricos e mecânicos, indicados na Tabela 5.18, constituindo um total de 6 pórticos com diferentes rigidezes axiais das barras do contraventamento.

Tabela 5.18 – Propriedades mecânicas dos pórticos considerados no estudo.

Carreg.	EA (kN)	$L_{diagonal}$ (m)	$EI_{pórtico}$ (kN.m ²)	H (m)	L (m)	η (-)
1	3,54E+08	5,65685	4,00E+04	4,0	4,0	0,00001
2	3,54E+07	5,65685	4,00E+04	4,0	4,0	0,0001
3	3,54E+06	5,65685	4,00E+04	4,0	4,0	0,001
4	3,54E+05	5,65685	4,00E+04	4,0	4,0	0,01
5	7,07E+04	5,65685	4,00E+04	4,0	4,0	0,05
6	3,54E+04	5,65685	4,00E+04	4,0	4,0	0,1

Os modelos foram construídos adoptando uma discretização de 4 elementos finitos por barra, somando um total de 19 nós e 20 elementos. A análise da estrutura foi realizada com base numa análise linear de estabilidade aproximada (§ 2.4.1).

Os valores das cargas críticas para os primeiros três modos de instabilidade, juntamente com o modo de “sway” puro, são apresentados na Figura 5.32, definidos em função do parâmetro η .

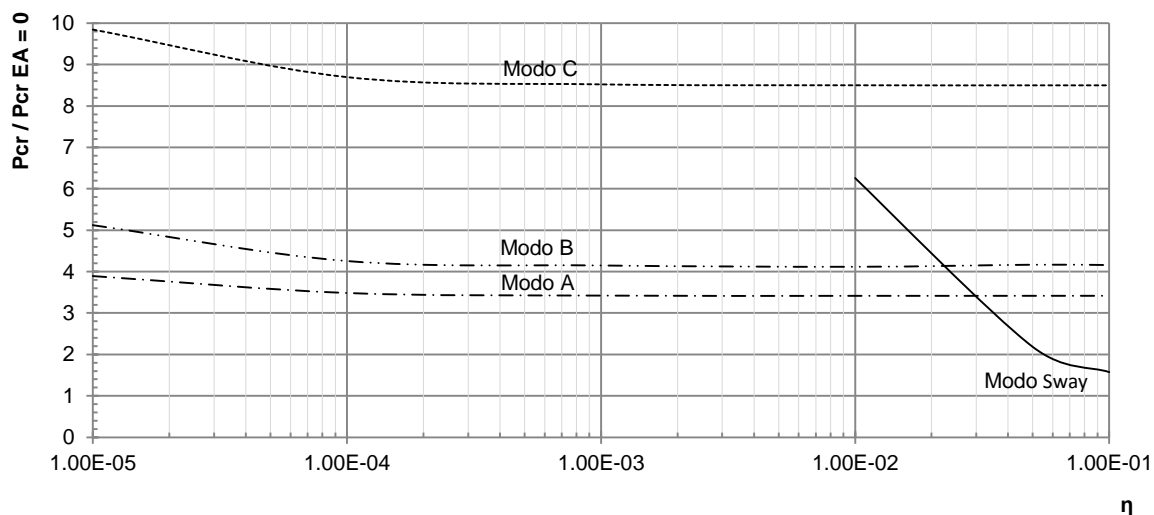


Figura 5.32 – Carregamentos críticos para os 6 primeiros modos de instabilidade do pórtico em função de η .

A configuração das deformadas dos modos de instabilidade é apresentada nos gráficos da Figura 5.33.

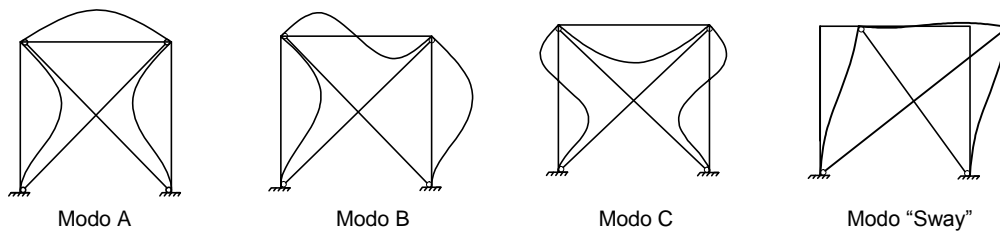


Figura 5.33 – Modos de instabilidade.

Observa-se dos resultados obtidos que as cargas críticas dos três primeiros modos mantêm-se aproximadamente invariáveis, verificando-se um acréscimo nos seus valores no extremo direito do gráfico.

O modo de "sway", como esperado, é o mais influenciado pela rigidez de contraventamento verificando-se um rápido decréscimo no seu valor com a redução desta.

As configurações deformadas dos modos mantêm-se constantes ao longo do processo de variação da rigidez do contraventamento, à excepção do modo B, que a partir de valores de $1E-3$ do parâmetro η , apresenta deslocamentos de "sway", como indicado na Figura 5.35.

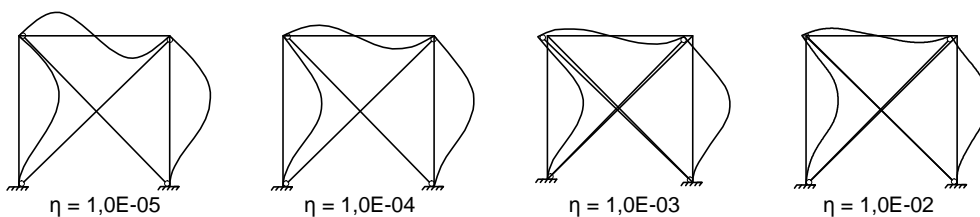


Figura 5.34 - Variação da configuração deformada do modo B.

Como se verifica na Figura 5.32 o modo de "sway" puro não foi sempre identificado nas várias análises, pelo que existe uma descontinuidade na respectiva curva.

Observou-se ainda que para valores elevados da rigidez do contraventamento não existia um modo de instabilidade cuja configuração deformada que se assemelhe à configuração do modo de "sway" puro, constatando-se que para tais casos este modo encontra-se acoplado com outros modos do pórtico.

Na Figura 5.35 são ilustrados alguns dos casos em que se observa o acoplamento do modo de "sway" com outros modos do pórtico.

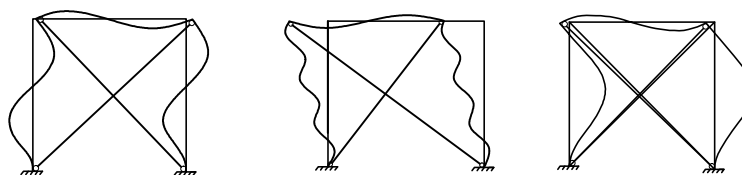


Figura 5.35 – Acoplamento do modo de "sway" com outros modos do pórtico.

Conclui-se deste estudo que a rigidez de contraventamento é um factor relevante na definição do valor da carga crítica do primeiro modo global de um pórtico.

Apesar de não apresentar relevância nos modos de “não sway” do pórtico, a rigidez do contraventamento influencia os modos com deslocamentos laterais determinando muitas vezes qual o primeiro modo global do pórtico.

Como se observa no gráfico da Figura 5.32, para valores de η superiores a $3E-2$ dever-se-á considerar no dimensionamento do pórtico que o primeiro modo de instabilidade corresponde ao modo de “sway”.

5.2.2.2. Caso 7 – Estudo paramétrico do comportamento do pórtico contraventado

Neste estudo pretende efectuar-se uma análise paramétrica da rigidez lateral do pórtico em função da (i) rigidez do contraventamento, (ii) imperfeições geométricas locais e (iii) dos esforços de compressão dos montantes.

As análises realizadas constituíram um conjunto de análise de 2ª ordem geometricamente não-lineares, as quais permitiram traçar trajectórias de equilíbrio do pórtico evidenciando a variação da rigidez lateral da estrutura em função dos parâmetros de estudo.

Na Figura 5.36 representa-se a geometria da estrutura, identificando-se os carregamentos aplicados e as imperfeições geométricas globais e locais.

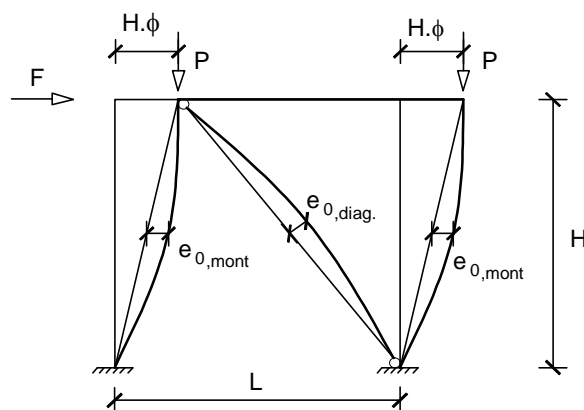


Figura 5.36 – Pórtico genérico e respectivo carregamento.

O pórtico é constituído por montantes e travessa com 4 metros de comprimento e secções IPE200 em aço S355.

O estudo é dividido em três conjuntos de análises, analisando-se em cada um a influência que a rigidez do contraventamento, imperfeições geométricas locais e dos esforços de compressão dos montantes exerce no comportamento geometricamente não-linear do pórtico.

Nas análises de 2ª geometricamente não-lineares realizadas a estrutura foi modelada considerando uma discretização de 8 elementos finitos por barra com matrizes de rigidez aproximadas (§ 2.4.1.2).

Influência da rigidez do contraventamento

O primeiro conjunto de análises é efectuado considerando um valor nulo do carregamento vertical do pórtico e uma imperfeição geométrica local constante de L/150.

A relação entre a rigidez do contraventamento e a rigidez do pórtico é definida pelos dois parâmetros:

$$\kappa = \frac{EI_{\text{pórtico}}}{EA_{\text{diag.}} L_{\text{diag.}}^2} \quad \bar{\lambda} = \frac{L_{\text{diag.}}}{i_{\text{diag.}} \sqrt{93,9 \varepsilon}} \quad (5.7)$$

o primeiro representa uma relação entre a rigidez lateral do pórtico e a rigidez lateral do contraventamento, e o segundo representa a esbelteza normalizada da barra de contraventamento.

Como indicado na Tabela 5.19 foi realizado um total de 30 análises, analisando-se em cada uma um par de valores de κ e de $\bar{\lambda}$. Na tabela são indicados os valores da inércia e da área da barra de contraventamento considerados em cada análise.

Tabela 5.19 – Valores da inércia e área da barra de contraventamento.

k	A _{diag.} (m ²)	I _{diag.} (m ⁴)				
		$\bar{\lambda} = 1$	$\bar{\lambda} = 1,25$	$\bar{\lambda} = 1,5$	$\bar{\lambda} = 1,75$	$\bar{\lambda} = 2$
0,001	6,06E-04	3,35E-06	2,15E-06	1,49E-06	1,10E-06	8,38E-07
0,002	3,03E-04	1,68E-06	1,07E-06	7,45E-07	5,48E-07	4,19E-07
0,003	2,02E-04	1,12E-06	7,15E-07	4,97E-07	3,65E-07	2,79E-07
0,004	1,52E-04	8,38E-07	5,37E-07	3,73E-07	2,74E-07	2,10E-07
0,005	1,21E-04	6,71E-07	4,29E-07	2,98E-07	2,19E-07	1,68E-07
0,006	1,01E-04	5,59E-07	3,58E-07	2,48E-07	1,83E-07	1,40E-07

Da Figura 5.37 à Figura 5.42 são apresentados os resultados obtidos das análise numéricas.

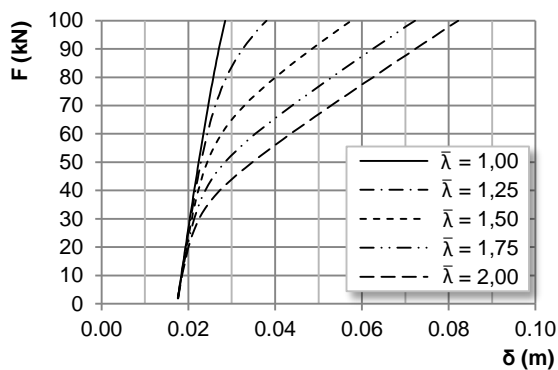


Figura 5.37 – Trajectória de equilíbrio para $\kappa = 0,001$.

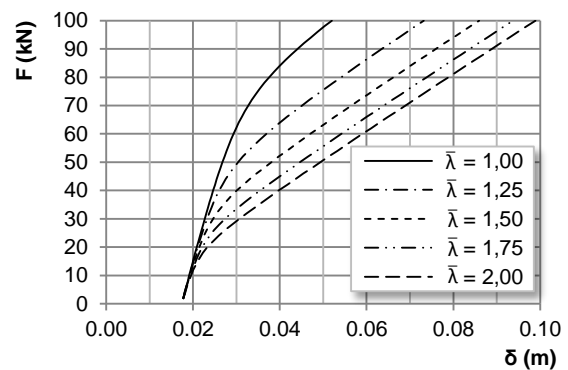


Figura 5.38 – Trajectória de equilíbrio para $\kappa = 0,002$.

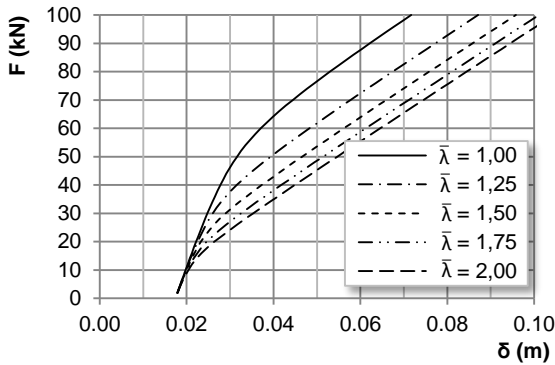


Figura 5.39 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,003$.

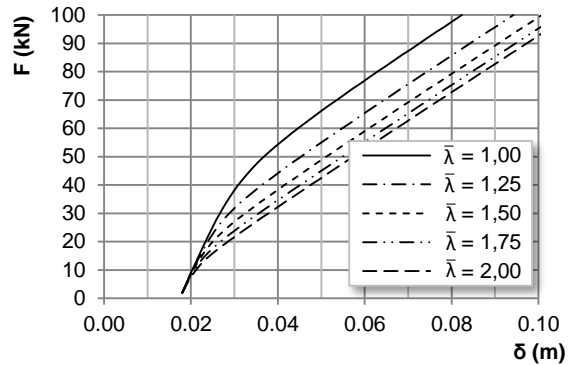


Figura 5.40 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,004$.

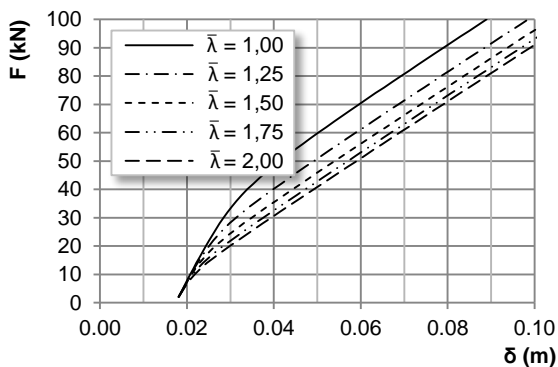


Figura 5.41 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,005$.

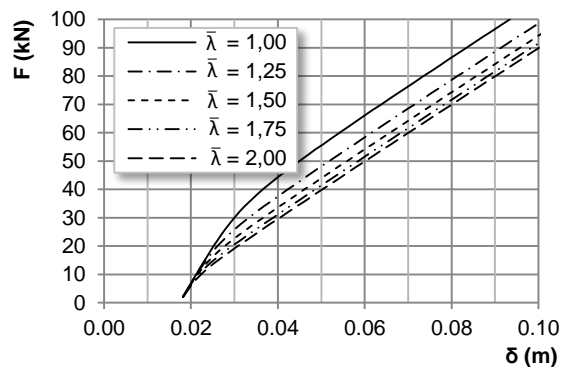


Figura 5.42 – Trajectória de equilíbrio para $k = 0,006$.

Observa-se nos gráficos anteriores que, para pequenas deformações a estrutura apresenta um troço linear de rigidez elevada. Este troço representa um comportamento global da estrutura em que a rigidez lateral é conferida pelo conjunto pórtico-contraventamento.

A rigidez axial do contraventamento é inversamente proporcional ao parâmetro k , sendo a rigidez lateral conferida à estrutura pela diagonal reduzida com o aumento deste parâmetro. Como consequência, é observado nos gráficos uma redução da inclinação do troço inicial.

Para deformações aproximadamente superiores a 0,01 m, o aumento significativo dos efeitos geometricamente não-lineares da diagonal provocam uma perda acentuada da rigidez axial da barra e consequentemente uma perda na rigidez global da estrutura.

O troço não-linear dos gráficos representa a passagem do comportamento definido pelo conjunto pórtico-contraventamento para um comportamento definido unicamente pelo pórtico.

Observando o conjunto de gráficos, constata-se que o efeito da diagonal no comportamento global da estrutura representa um patamar de resistência que será tanto maior quanto o valor da carga crítica desta.

Influência das imperfeições locais

No estudo da influência das imperfeições geométricas locais na rigidez lateral da estrutura, as análises realizadas consideram um valor constante de 0,006 do parâmetro κ e uma esbelteza normalizada do contraventamento de 1,50.

Na Tabela 5.20 identificam-se as imperfeições geométricas adoptadas na formulação da geometria da estrutura. Os valores apresentados têm por base a metodologia do EC3 apresentada anteriormente em § 3.2.

Tabela 5.20 – Imperfeições geométricas adoptadas.

Análise	Imperfeição global	Imperfeição local (m)	
		Montantes	Contraventamento
1	$\phi = 0,00435$ (rad)	0,0114 (L/350)	0,0162 (L/350)
2		0,0133 (L/300)	0,0189 (L/300)
3		0,0160 (L/250)	0,0226 (L/250)
4		0,0200 (L/200)	0,0283 (L/200)
5		0,0267 (L/150)	0,0377 (L/150)

Na Figura 5.43 apresentam-se os resultados das cinco análises.

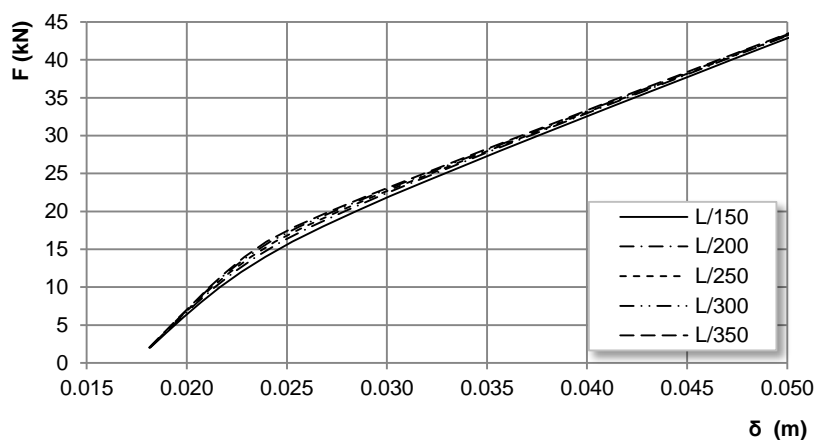


Figura 5.43 – Trajectórias de equilíbrio: $\kappa = 0,06$ e $\bar{\lambda} = 1,50$.

As imperfeições geométricas locais são um factor de grande relevância no modo como os efeitos geometricamente não-lineares influenciam a variação da rigidez axial do contraventamento (como estudado em § 5.1.1.1 para vigas-coluna simplesmente apoiadas).

Observando a Figura 5.43 constata-se que a diferença entre as várias curvas se situa nos respectivos troços não-lineares. O aumento do esforço de compressão no contraventamento produz uma redução na rigidez axial, a qual converge para um valor nulo com a aproximação ao respectivo valor crítico.

Conclui-se dos resultados apresentados que a variação das imperfeições locais produz uma redução na rigidez lateral da estrutura, sendo a redução proporcional ao valor da imperfeição.

Influência do carregamento vertical do pórtico

Para finalizar o estudo, analisa-se a influência de carregamentos verticais sobre a rigidez lateral do pórtico. Como ilustrado na Figura 5.36, é considerada a aplicação de um carregamento vertical simétrico actuando sobre os montantes.

Efectuou-se um conjunto de três análises, considerando-se diferentes carregamentos verticais definidos em função do carregamento crítico do pórtico isolado. Os carregamentos considerados foram constituem uma percentagem de 25%, 50% e 75% do carregamento crítico do pórtico.

O pórtico, analisado separadamente através de uma análise de estabilidade exacta, possui um carregamento crítico de 1789,5 kN.

Na Figura 5.44 apresentam-se os resultados obtidos.

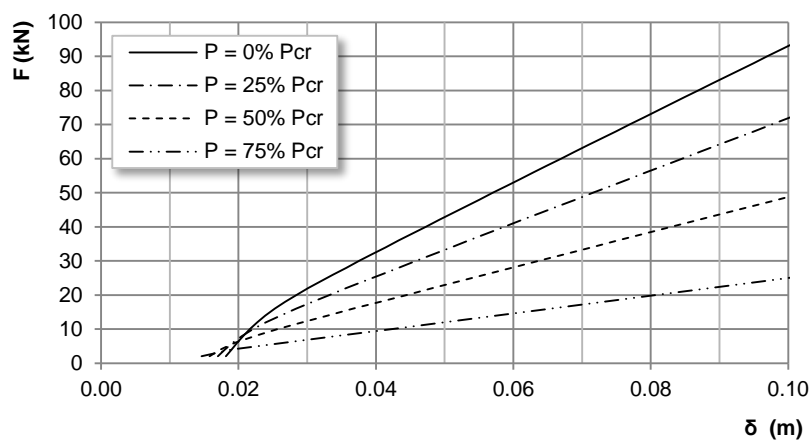


Figura 5.44 - Trajectórias de equilíbrio: $k = 0,06$ e $\bar{\lambda} = 1,5$.

A consideração de esforços de compressão nos montantes produz um aumento dos efeitos geometricamente não-lineares no pórtico, os quais reduzem a rigidez lateral conferida à estrutura pelo pórtico.

O comportamento do pórtico quando carregado verticalmente é semelhante ao de uma viga-coluna. A aplicação de esforços de compressão implica uma redução na rigidez lateral que poderá ser anulada com a aproximação das cargas verticais aos respectivos valores críticos.

A perda de rigidez do pórtico em função do carregamento vertical dos montantes é observada no troço final das curvas do gráfico da Figura 5.44. Após a diagonal encurvar, deixando de oferecer rigidez à estrutura, o comportamento global será definido unicamente pela rigidez do pórtico, que é reduzida com a consideração de carregamentos verticais cada vez maiores.

6. Conclusões

6.1. Considerações finais

Como proposto inicialmente formulou-se um modelo numérico de elementos finitos que permite avaliar os efeitos geometricamente não-lineares em estruturas metálicas.

O modelo numérico foi programado em Matlab, tendo sido adoptado para efectuar análises lineares de estabilidade (determinação de cargas críticas e respectivos modos de encurvadura) e também análises geometricamente não-lineares de 2ª ordem de viga-colunas e pórticos planos.

O modelo foi formulado por aplicação do método de Rayleigh-Ritz tendo-se formulado três matrizes de rigidez elementares (elástica-linear; geométrica aproximada; e total exacta), as quais descrevem o comportamento de elementos de barra, tendo em conta os respectivos efeitos geometricamente não-lineares.

A matriz de rigidez exacta total foi obtida através de funções de estabilidade que caracterizam de forma exacta os efeitos geométricos na rigidez dos elementos. A matriz de rigidez geométrica aproximada foi desenvolvida adoptando os polinómios de Hermite como funções de aproximação do campo de deslocamentos de viga-coluna, os quais permitem a separação da rigidez elástica da rigidez geométrica.

Foram implementadas quatro análises estruturais na ferramenta de cálculo:

1. Análise elástica-linear: determinação de esforços e respectivas deformadas;
2. Análise de estabilidade aproximada: determinação de cargas críticas e modos de instabilidade, considerando os efeitos geometricamente não-lineares de forma linearizada;
3. Análise de estabilidade exacta: determinação de cargas críticas considerando os efeitos geométricos de forma exacta;
4. Análise de segunda ordem geometricamente não-linear: determinação de trajectórias de equilíbrio não-lineares.

As análises de segunda ordem geometricamente não-lineares foram implementadas numericamente através de um algoritmo baseado no método de Newton-Raphson. O método é aplicado com o desenvolvimento de um processo incremental e iterativo, que através de actualizações da geometria e dos esforços das barras, permite determinar as diversas configurações de equilíbrio para os diferentes valores do parâmetro de carga.

As imperfeições devidas a tensões residuais e os seus efeitos no comportamento geometricamente não-linear de vigas e pórticos planos foram incluídas no modelo numérico e nos casos de estudo considerando imperfeições geométricas equivalentes.

Os resultados obtidos foram comparados com fórmulas analíticas clássicas, tendo sido efectuadas alguns estudos de validação e/ou convergência de resultados.

No âmbito das análises lineares de estabilidade foi elaborado um estudo da influência da discretização das barras na convergência do valor das cargas críticas para o respectivo valor exacto quando determinadas através de matrizes de rigidez aproximadas. O âmbito do estudo incidiu sobre vigas-coluna com várias condições de apoio e de secção constante ou variável, para as quais os resultados foram comparados com a solução exacta fornecida por (Theodore Von Kármán, 1940). Ainda no referido estudo foi analisada a capacidade do modelo determinar cargas críticas de pórticos planos (adoptando matrizes de rigidez aproximadas) sujeitos unicamente a esforços de compressão nos montantes, efectuando uma comparação com as respectivas soluções exactas determinadas numericamente.

Concluiu-se deste estudo que a adopção de discretizações mais refinadas permite uma maior convergência da solução aproximada para o seu valor exacto, obtendo-se erros da ordem de 1% para os valores das cargas críticas do primeiro e segundo modo de instabilidade das vigas-coluna de secção constante e do pórtico plano analisado, quando se discretizam as barras com 4 elementos finitos em ambos os casos.

O modelo foi aplicado à análise de vários casos de estudo, permitindo avaliar a influência de alguns parâmetros no comportamento geometricamente não-linear de pórticos e vigas. Foram estudados, nomeadamente, os efeitos provocados por imperfeições geométricas, variações nas rigidezes dos elementos, variações na rigidez de contraventamentos de pórticos e assimetrias de carregamentos de pórticos, quer no valor de cargas críticas quer no comportamento geometricamente não-linear de segunda ordem. Foram ainda efectuadas diversas comparações com as disposições regulamentares do EC3, avaliando o grau de aproximação dos resultados obtidos numericamente por via do modelo desenvolvido aos resultados obtidos por via das referidas metodologias.

Dentro do domínio do estudo do comportamento geometricamente não-linear de vigas-coluna foram desenvolvidos os seguintes casos de estudo:

1. Estudo da influência do carregamento em vigas solicitadas apenas num plano. Foi efectuado um conjunto de análises não-lineares que permitiram observar como as trajectórias de equilíbrio de vigas simplesmente apoiadas variam em função das cargas distribuídas no vão e das cargas axiais aplicadas;
2. No domínio das análises não-lineares de vigas-coluna foi também efectuada uma comparação entre as curvas de dimensionamento propostas pelo EC3 e os resultados numéricos obtidos. Foi determinado um conjunto de pontos de início de cedência, analisando a sua posição face às curvas e comparando a diferença obtida entre as duas metodologias de análise; os resultados revelaram-se conclusivos, aproximando-se de forma bastante razoável das curvas de dimensionamento do EC3;

No âmbito do estudo de estruturas planas em pórtico, tanto ao nível de determinação de cargas críticas como de análises de segunda ordem geometricamente não-lineares, foram desenvolvidos os casos de estudo:

1. Influência da rigidez dos elementos do pórtico (colunas e travessas) no respectivo primeiro modo de instabilidade global: neste estudo foi analisada a influência da assimetria do carregamento e da relação entre a rigidez dos montantes e da travessa nas cargas críticas do primeiro modo do pórtico, elaborando-se um ábaco adimensional para consulta posterior;
2. Influência da rigidez do contraventamento nos modos de instabilidade dos modos globais do pórtico: neste estudo foi analisada a influência da rigidez do contraventamento nas cargas críticas do 3 primeiros modos globais do pórtico, sendo analisado como a carga crítica do modo de “sway” se posiciona em relação a estes.
3. Análise não-linear de pórtico não-contraventado e comparação dos resultados com os métodos de análise de pórticos do EC3. No seguimento das comparações efectuadas para a viga-coluna, simplesmente apoiada e contínua, foi também efectuado um estudo semelhante para o caso do pórtico não-contraventado, tendo-se comparado pontos de início de cedência com as curvas de interação do montante mais condicionante;
4. Estudo da influência das imperfeições geométricas locais, do carregamento vertical dos montantes e da relação entre rigidez lateral do pórtico e da rigidez lateral do contraventamento no comportamento global do pórtico. Os resultados são apresentados num conjunto de gráficos que reúnem as diferentes trajectórias de equilíbrio determinadas numericamente, as quais permitem observar o modo como a rigidez lateral do conjunto pórtico varia com a deformação lateral.

6.2. Perspectiva de desenvolvimentos futuros

Ao longo do desenvolvimento deste estudo, o modelo numérico implementado permitiu realizar análises geometricamente não lineares com resultados que se aproximaram de forma adequada das respectivas soluções exactas, e que revelaram uma boa aproximação às metodologias de verificação de vigas-coluna e de pórticos planos do EC3, o que indica um bom funcionamento e ilustra a utilidade da ferramenta de cálculo automático produzida.

No desenvolvimento futuro das capacidades do modelo numérico, seria interessante desenvolver o domínio de aplicação a:

1. Estruturas tridimensionais com consideração de fenómenos de instabilidade por compressão-torção e flexão-torção;
2. Fenómenos fisicamente não-lineares devidos a plasticidade dos materiais;
3. Tensões residuais dos elementos, permitindo analisar as variações dos valores dos esforços de dimensionamento quando estas se introduzem explicitamente no modelo de cálculo.

Relativamente à coluna de inércia variável, a definição da inércia foi formulada através de dois tipos de polinómios: grau nulo, em que o efeito da variação da inércia ao longo do eixo é quantificado através da consideração de troços de secção constante e de polinómios de quarto grau.

Tendo em conta a diferença observada nos resultados quando aplicadas as duas metodologias, seria interessante analisar a influência que o grau do polinómio das funções de inércia poderá ter na qualidade dos resultados finais.

Referências e Bibliografia

Atkinson, K. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*, (2ª ed.).

Chan, S., & Chui, P. (2000). *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connectios* (1ª ed.). Oxford, Kidlington, U.K.: Elsevier Science Ltd.

Chen, W., & Lui, E. (1991). *Stability Design of Steel Frames*. Boca Raton: CRC Press.

Comité Européen de Normalisation. (2005). Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings.

Fish, J., & Belytschko, T. (2007). *A First Course in Finite Elements*. Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd.

Greiner, R., & Lindner, J. (2006). Interaction formulae for members subjected to bending and axial compression in EUROCODE 3—the Method 2 approach . *Journal of constructional steel research*.

MathWorks Inc. (2012). Matlab.

Reis, D., & Camotim, D. (2001). *Estabilidade Estrutural*. Amadora, Lisboa: McGraw-Hill.

Theodore Von Kármán, M. A. (1940). *Mathematical methods in engineering: an introduction to the mathematical treatment of engineering problems*. McGraw-Hill.

ANEXOS

ANEXO 1

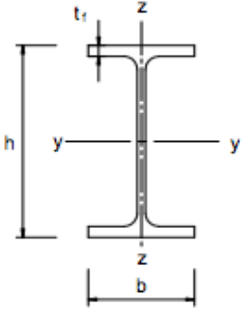
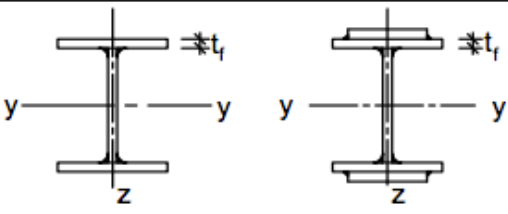

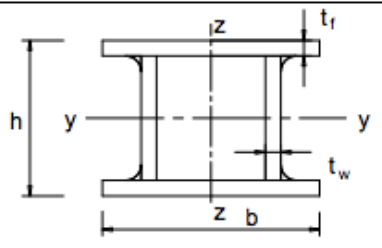
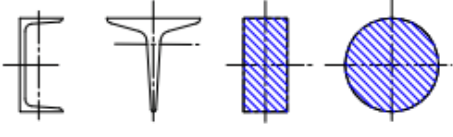

Secção transversal		Limites	Encurvadura em relação ao eixo	Curva de encurvadura	
				S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Perfis laminados		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y - y z - z	a a ₀
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	y - y z - z	b a
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y - y z - z	b a
			$t_f > 100 \text{ mm}$	y - y z - z	d c
Perfis I soldados			$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y - y z - z	b c
			$t_f > 40 \text{ mm}$	y - y z - z	c d
Secções tubulares			acabadas a quente	qualquer	a a ₀
			enformadas a frio	qualquer	c c
Secções em caixão soldadas			em geral (excepto como abaixo indicado)	qualquer	b b
			soldaduras espessas: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	qualquer	c c
Perfis U, T e secções cheias			qualquer	c c	
Cantoneiras			qualquer	b b	

Tabela B.1: Tabela 6.2 do Eurocódigo 3.

Factores de interacção	Tipo de secções	Hipóteses de cálculo	
		Propriedades elásticas das secções transversais	Propriedades plásticas das secções transversais
		Classe 3, Classe 4	Classe 1, Classe 2
k_{yy}	Secções em I Secções tubulares rectangulares	$C_{my} \left(1 + 0,6 \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left(1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left(1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left(1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
k_{yz}	Secções em I Secções tubulares rectangulares	k_{zz}	$0,6 k_{zz}$
k_{zy}	Secções em I Secções tubulares rectangulares	$0,8 k_{yy}$	$0,6 k_{yy}$
k_{zz}	Secções em I	$C_{mz} \left(1 + 0,6 \bar{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left(1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left(1 + (2\bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left(1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	Secções tubulares rectangulares		$C_{mz} \left(1 + (\bar{\lambda}_z - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left(1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
Para secções em I e H e para secções tubulares rectangulares submetidas a compressão axial e a flexão recta $M_{y,Ed}$, o factor k_{zy} poderá considerar-se $k_{zy} = 0$.			

Tabela B.1: Anexo B EN1993-1-1 – Quadro B.1.

Factores de interacção	Hipóteses de cálculo	
	Propriedades elásticas das secções transversais Classe 3, Classe 4	Propriedades plásticas das secções transversais Classe 1, Classe 2
k_{yy}	k_{yy} do Quadro B.1	k_{yy} do Quadro B.1
k_{yz}	k_{yz} do Quadro B.1	k_{yz} do Quadro B.1
k_{zy}	$\left[1 - \frac{0,05\bar{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ $\geq \left[1 - \frac{0,05}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$	$\left[1 - \frac{0,1\bar{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ $\geq \left[1 - \frac{0,1}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ <p>para $\bar{\lambda}_z < 0,4$:</p> $k_{zy} = 0,6 + \bar{\lambda}_z \leq 1 - \frac{0,1\bar{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}}$
k_{zz}	k_{zz} do Quadro B.1	k_{zz} do Quadro B.1

Tabela B.1: Anexo B EN1993-1-1 – Quadro B.2.


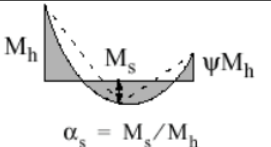
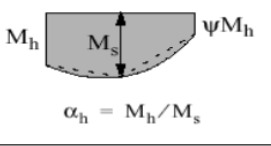
Diagrama de momentos	Domínio de aplicação		C_{my} e C_{mz} e C_{mLT}	
			Carga uniforme	Carga concentrada
	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 $\alpha_s = M_s / M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$-0,8\alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,1(1-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$
 $\alpha_h = M_h / M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1+2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h(1+2\psi)$
Em elementos com modos de encurvadura associados a deslocamentos laterais, o coeficiente de momento uniforme equivalente deverá tomar-se igual a $C_{my} = 0,9$ ou $C_{mz} = 0,9$, respectivamente.				
C_{my} , C_{mz} e C_{mLT} deverão ser obtidos de acordo com o diagrama dos momentos flectores actuantes entre as secções de travamento, de acordo com:				
coeficiente de momento	eixo de flexão	travamento na direcção		
C_{my}	y-y	z-z		
C_{mz}	z-z	y-y		
C_{mLT}	y-y	y-y		

Tabela B.1: Anexo B EN1993-1-1 – Quadro B.3.